



<http://www.youtube.com/watch?v=9FFDJK8jmms>

## *Ableitungen einiger Funktionen*

# Die Ableitung einer konstanten Funktion

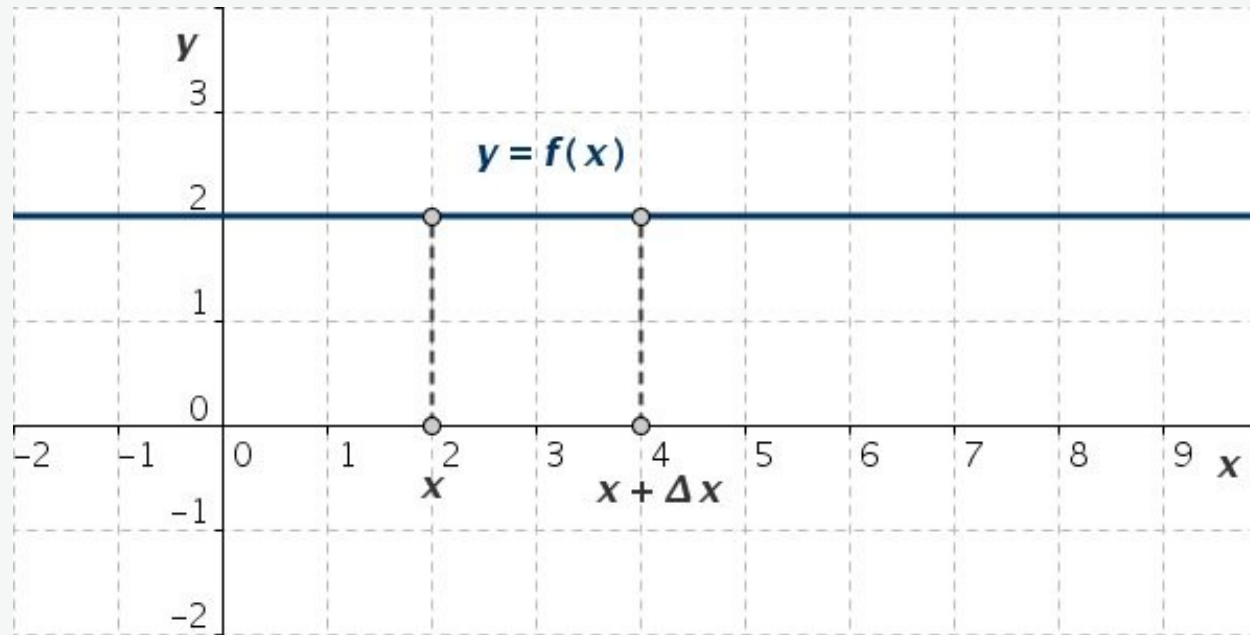


Abb. 1-1: Darstellung einer konstanten Funktion  $f(x) = c$

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Die Ableitung einer konstanten Funktion ist gleich Null.



*Die Ableitung einer linearen Funktion*

## Die Ableitung einer linearen Funktion

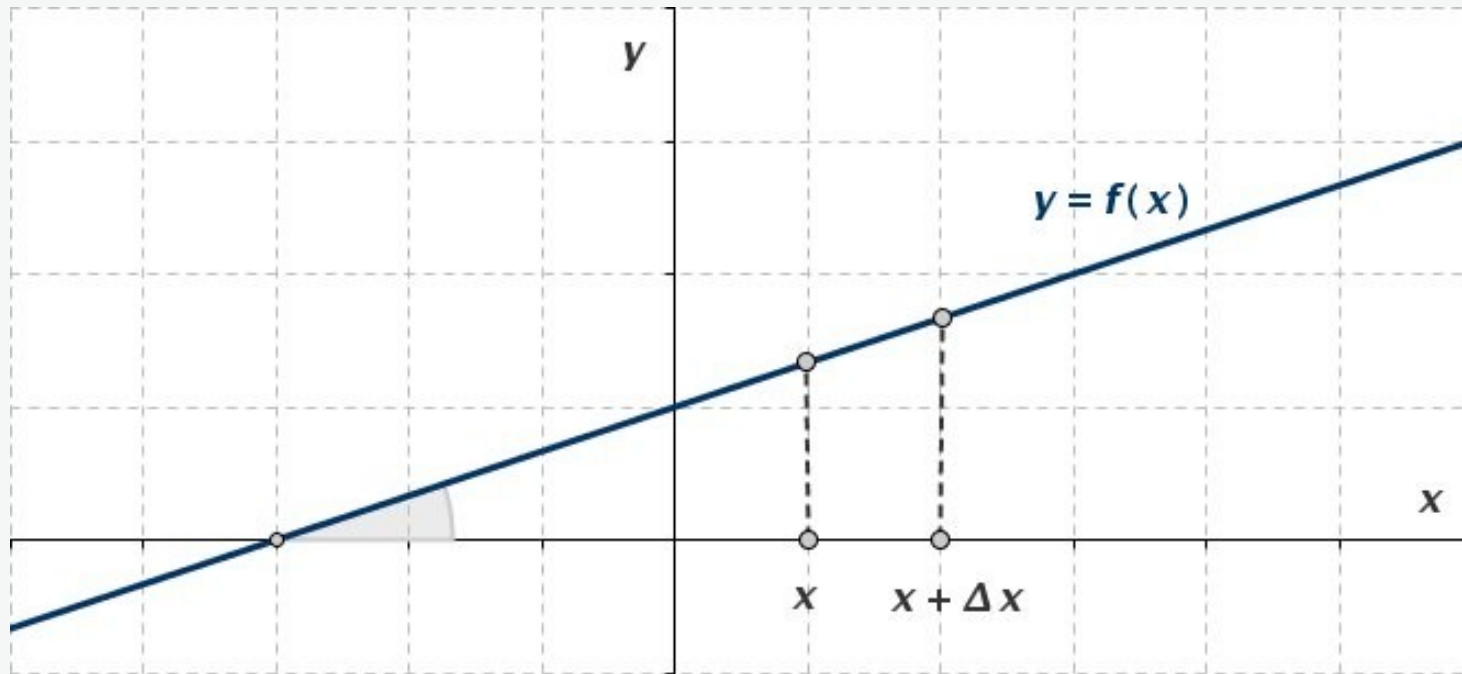


Abb. 1-2: Darstellung einer linearen Funktion  $f(x) = mx + n$  und der konstanten Steigung  $m$

$$f(x) = mx + n, \quad m, n \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) + n - (mx + n)}{\Delta x} = m$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (mx + n) = m$$

Die Ableitung einer linearen Funktion  $f(x) = mx + n$  ist eine Konstante  $m$ .



<http://www.youtube.com/watch?v=9FFDJK8jmms>

*Die Ableitung einer quadratischen Funktion*

## Ableitung einer quadratischen Funktion

$$f(x) = ax^2 + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 + b - (ax^2 + b)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + b - (ax^2 + b)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(2x + \Delta x) = 2ax \end{aligned}$$

$$f'(x) = (ax^2 + b)' = 2ax$$

# Ableitung einer quadratischen Funktion

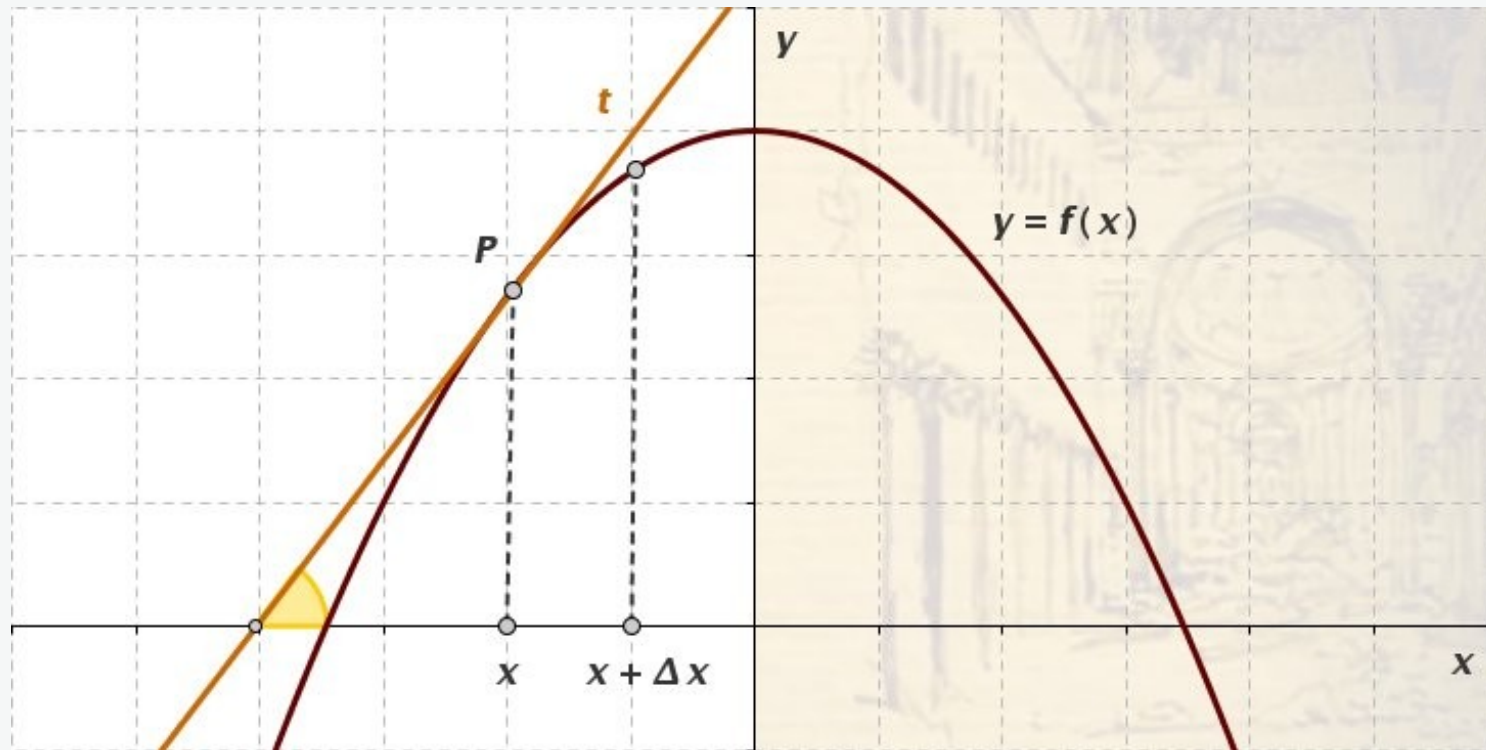


Abb. 1-3: Darstellung einer quadratischen Funktion  $f(x) = -x^2/3 + 4$  und ihrer Steigung im Punkt  $P$

In jedem Punkt  $(x, f(x))$  der abgebildeten Kurve ist die Tangentensteigung  $2ax = -2x/3$ . Also ist  $4/3$  die Steigung der Tangente bei  $x = -2$ .

# Ableitung einer Funktion $y = x^n$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \times$$

$$\times \left( x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + C_n^n (\Delta x)^n - x^n \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \dots \right) = n x^{n-1}$$

$$f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}$$



## Binomialkoeffizienten:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k, n \in \mathbb{N}^*, \quad k \leq n)$$

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1$$

## n Fakultät:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \quad 0! = 1$$

## Ableitung der Kosinusfunktion

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} =$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = - \sin x$$

$$\sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \sin x \cos \frac{\Delta x}{2} + \cos x \sin \frac{\Delta x}{2}$$

# Ableitung der Kosinusfunktion

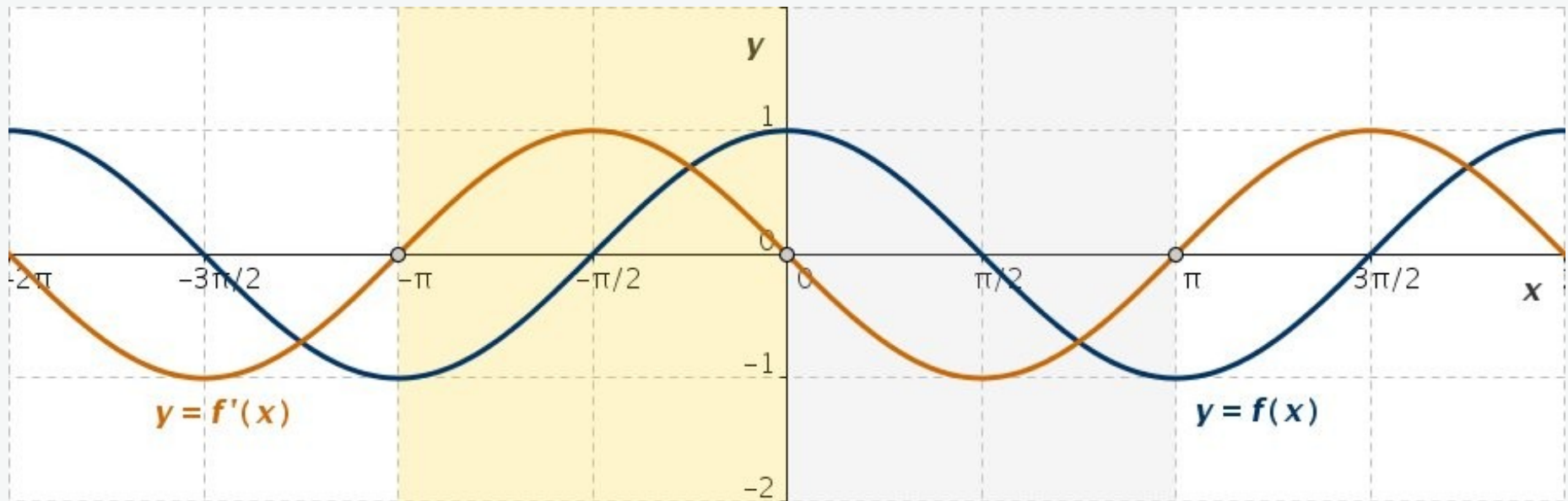


Abb. 1-4: Darstellung der Funktion  $f(x) = \cos x$  (blau) und ihrer Ableitungsfunktion  $f'(x) = -\sin x$  (rot)

## Ableitung der Tangensfunktion

$$f(x) = \tan x, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + \Delta x) - \tan x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cos x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cos x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\cos(x + \Delta x) \cos x} = \frac{1}{\cos x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

# Ableitung der Tangensfunktion

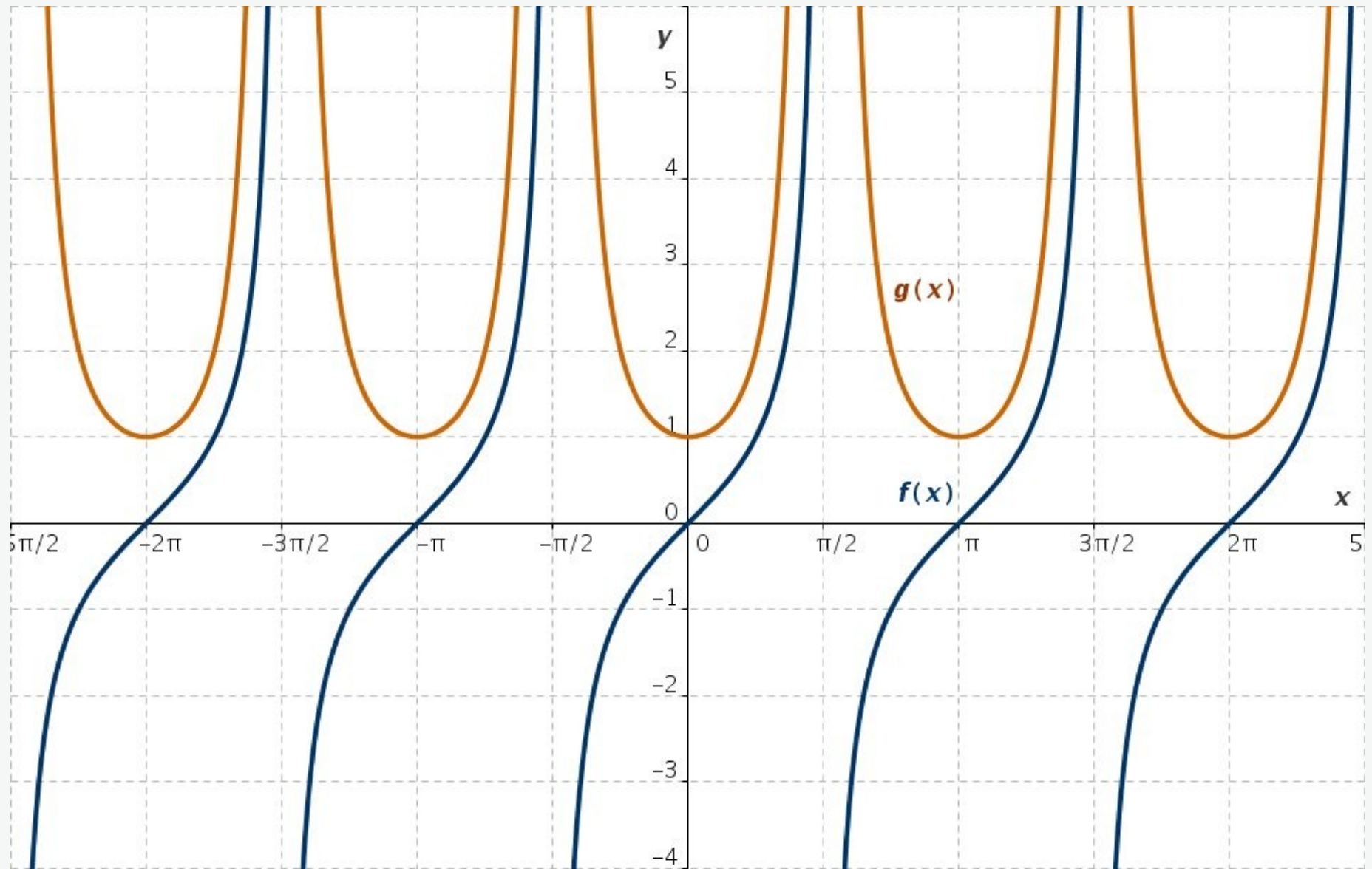


Abb. 1-5: Darstellung der Funktion  $f(x) = \tan x$  (blau) und ihrer Ableitungsfunktion  $f'(x) = 1/\cos^2 x$  (rot)

## Die Ableitung einer Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}, & f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ & & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \\ & & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ & & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ & & &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## Die Ableitung einer Wurzelfunktion

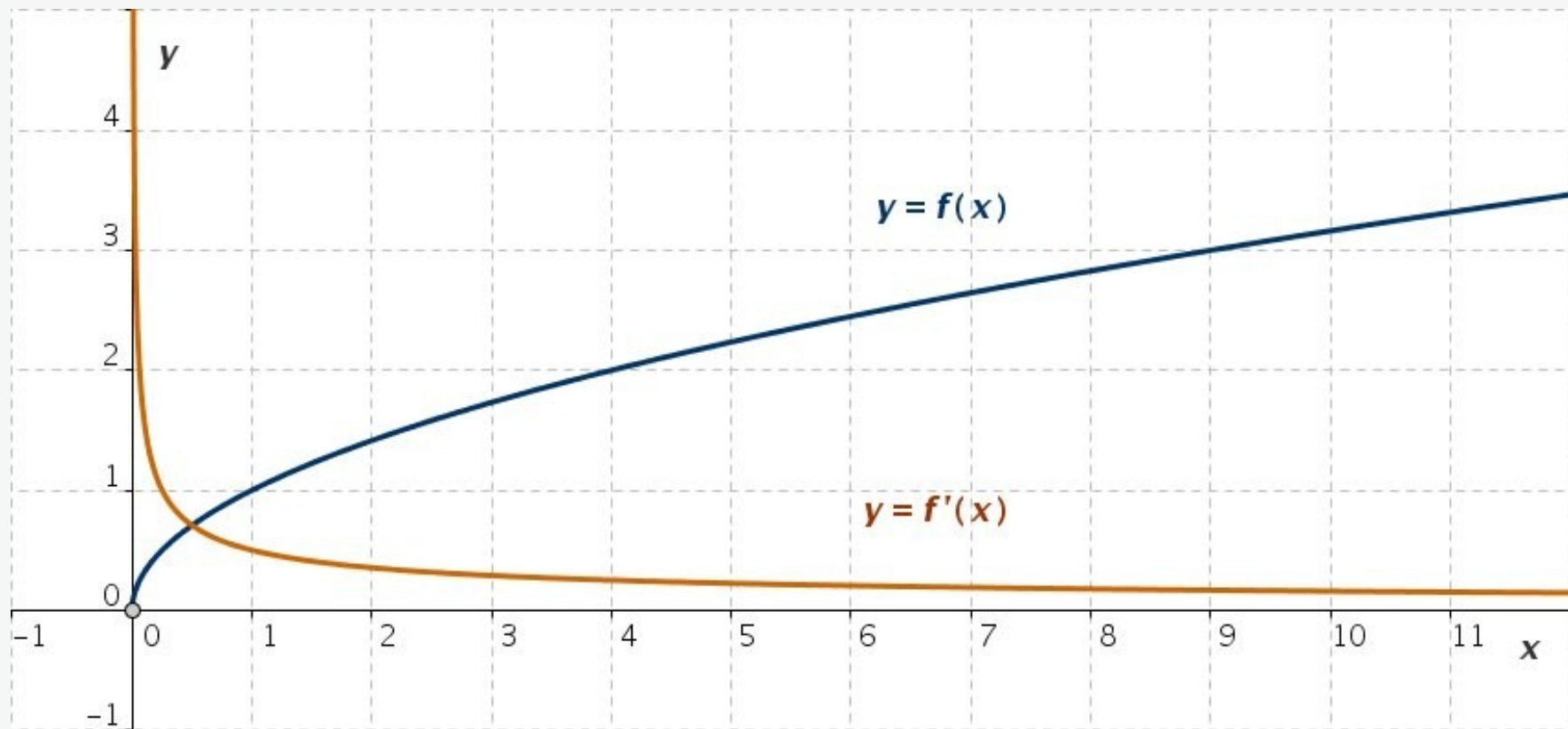


Abb. 1-7: Darstellung der Funktion  $y = f(x)$  (blau) und ihrer Ableitungsfunktion  $y = f'(x)$  (rot)

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## Die Ableitung einer Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\Delta x} - 1 = \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$