

<http://www.flickr.com/photos/sigfrid/3428162159/>

Ableitung von Potenzfunktionen

Ableitung der Funktion $y = 1/x^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2}, & f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ & & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \\ & & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{x^2 (x + \Delta x)^2} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^2 (x + \Delta x)^2} = -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Die Ableitung ist positive für $x < 0$ und negative für $x > 0$.

Ableitung der Funktion $y = 1/x^2$

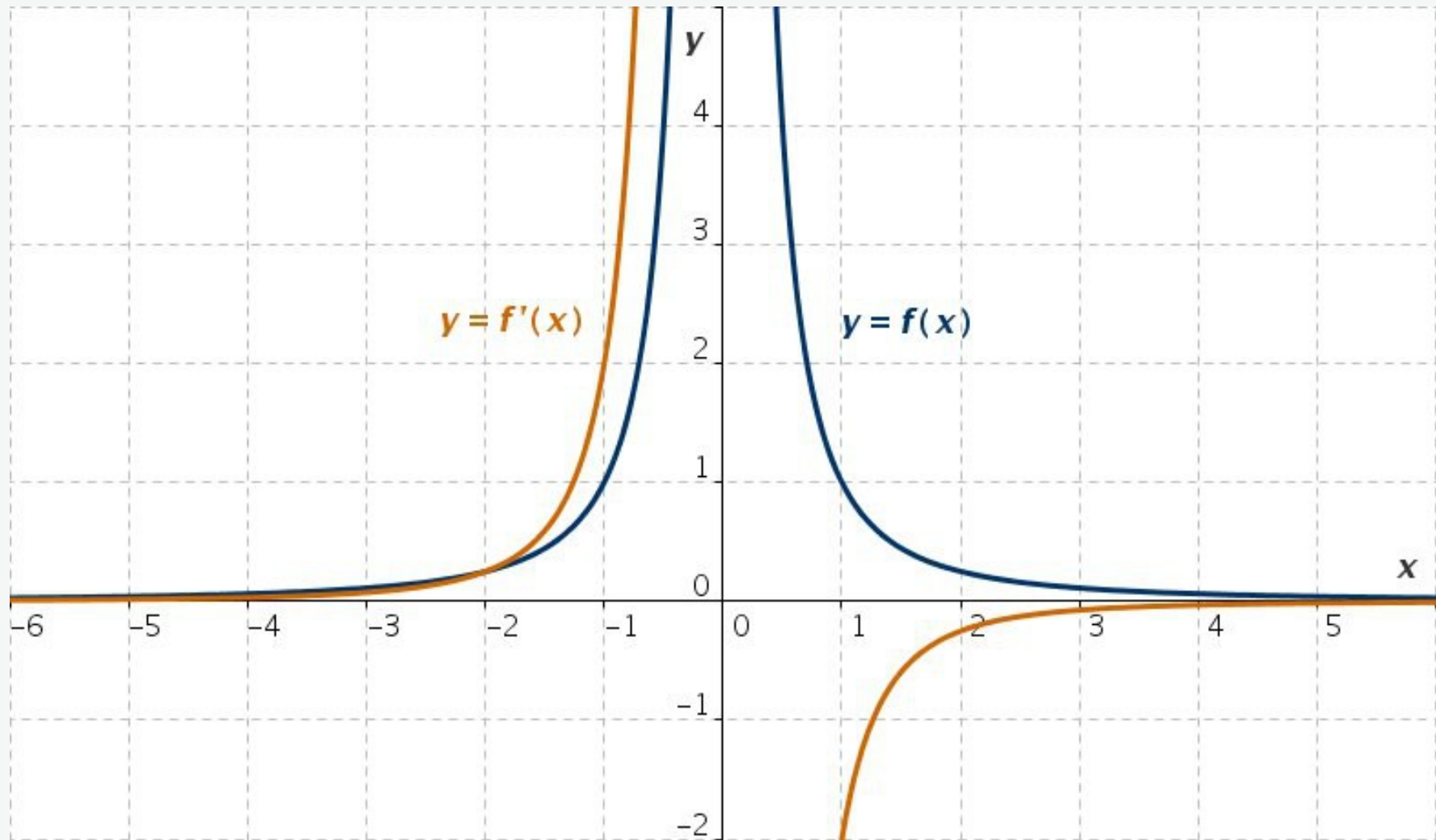


Abb. 1-6: Darstellung der Funktion $f(x) = 1/x^2$ (blau) und ihrer Ableitungsfunktion $f'(x) = -2/x^3$ (rot)

Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion

$$\begin{aligned} f(x) = x^n, \quad f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + n x^{n-1} \Delta x + C x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$

Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion

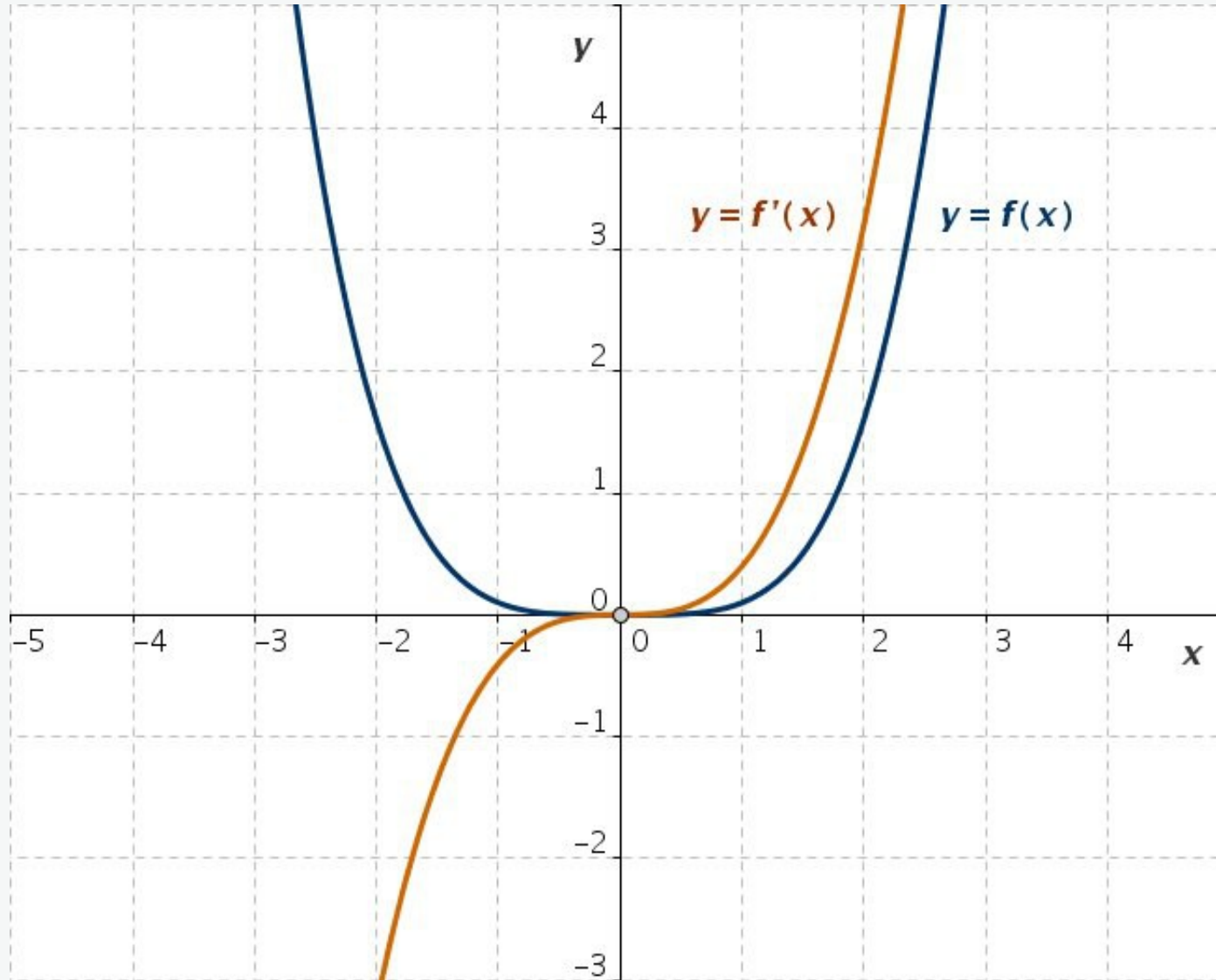


Abb. 1-8a: Darstellung der Funktion $y = f(x)$ (blau) und ihrer Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ (rot)

$$f(x) = \frac{x^4}{10}, \quad f'(x) = \frac{2}{5} x^3$$

Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion

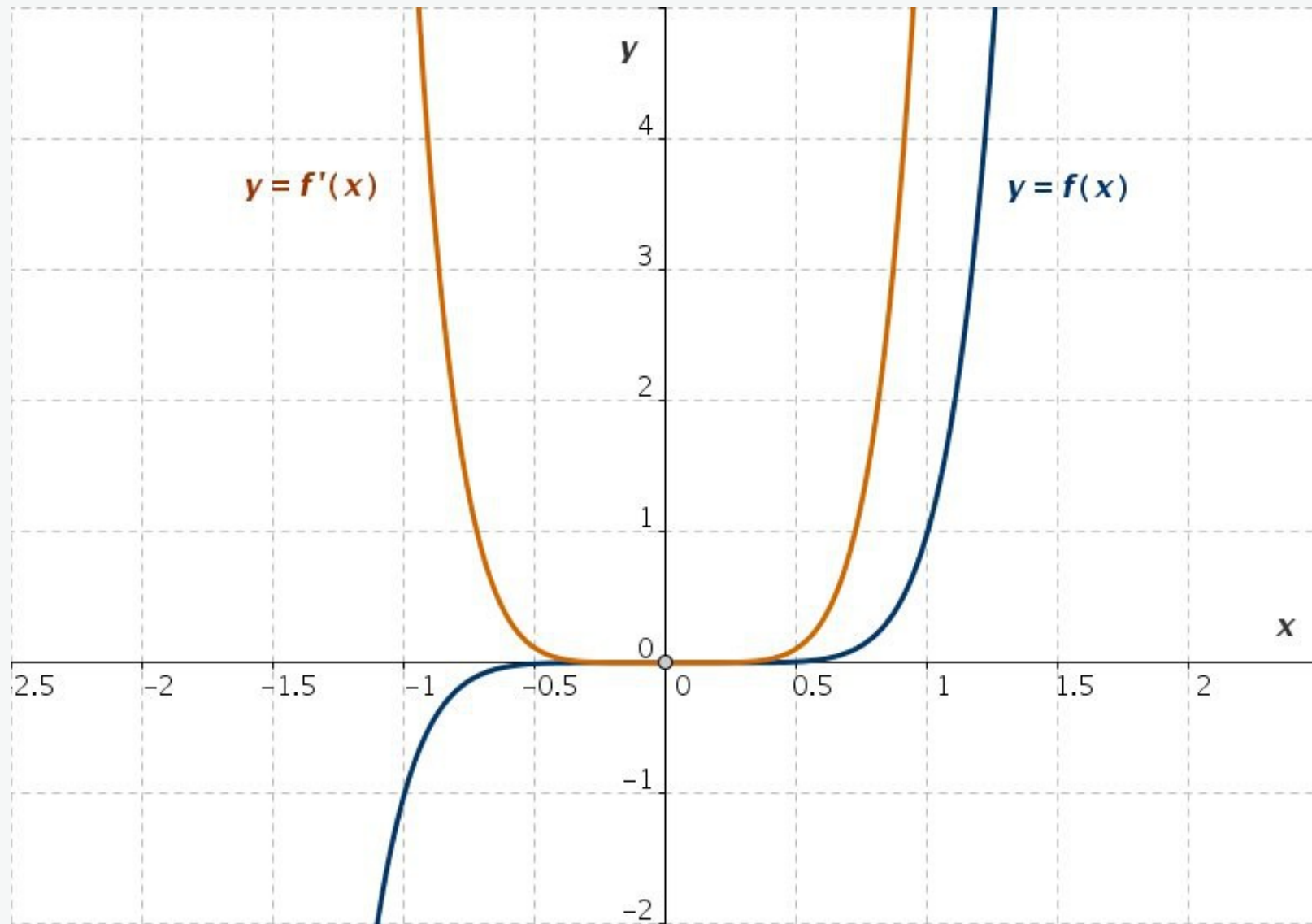


Abb. 1-8b: Darstellung der Funktion $y = f(x)$ (blau) und ihrer Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ (rot)

$$f(x) = x^7, \quad f'(x) = 7x^6$$

Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion

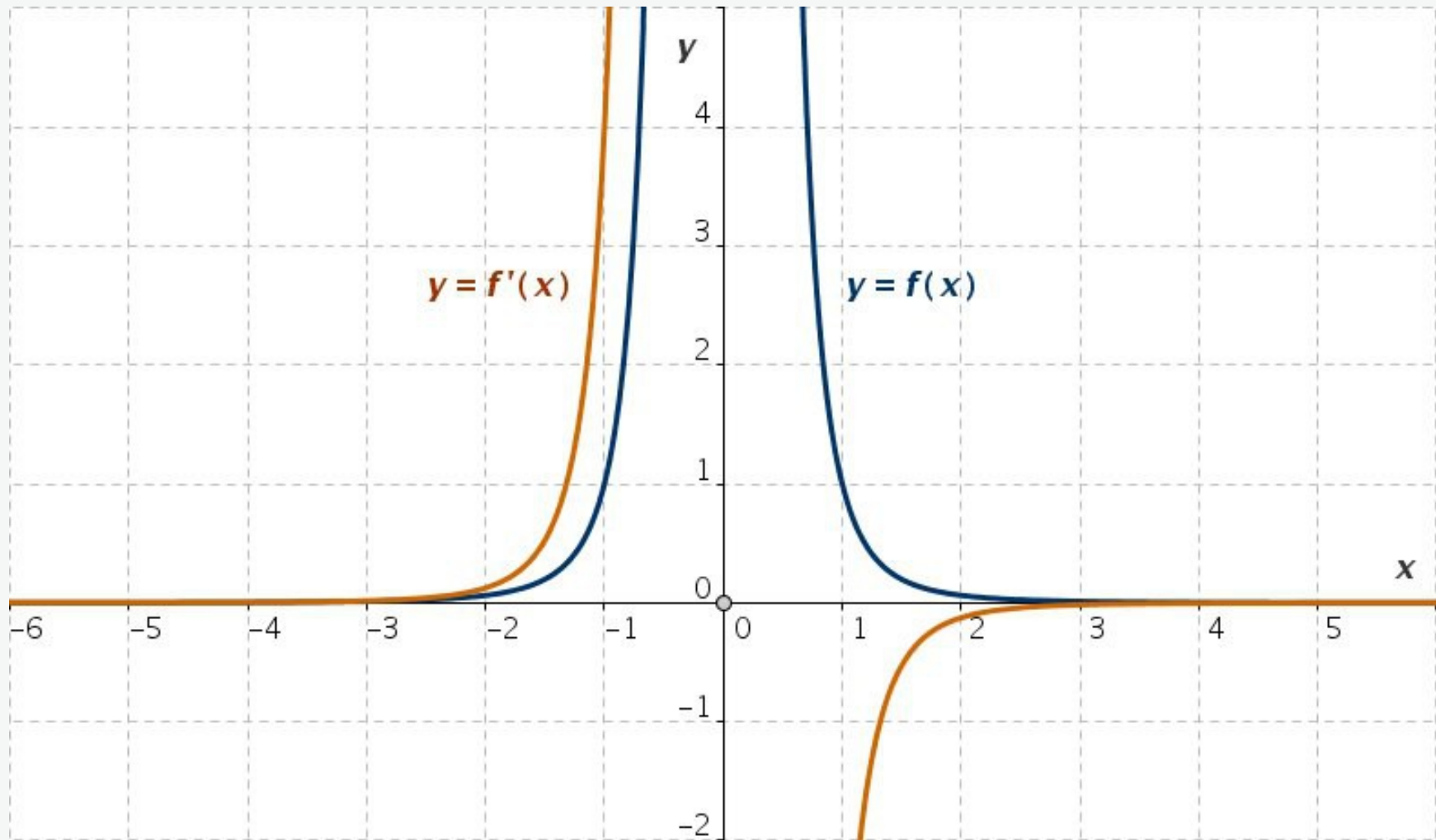


Abb. 1-8c: Darstellung der Funktion $y = f(x)$ (blau) und ihrer Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ (rot)

$$f(x) = \frac{1}{x^4}, \quad f'(x) = -\frac{4}{x^5}$$

$$C' = 0 \quad (C = \text{const}), \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0), \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cot(x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Erste Ableitung der elementaren Funktion

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\operatorname{coth} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$