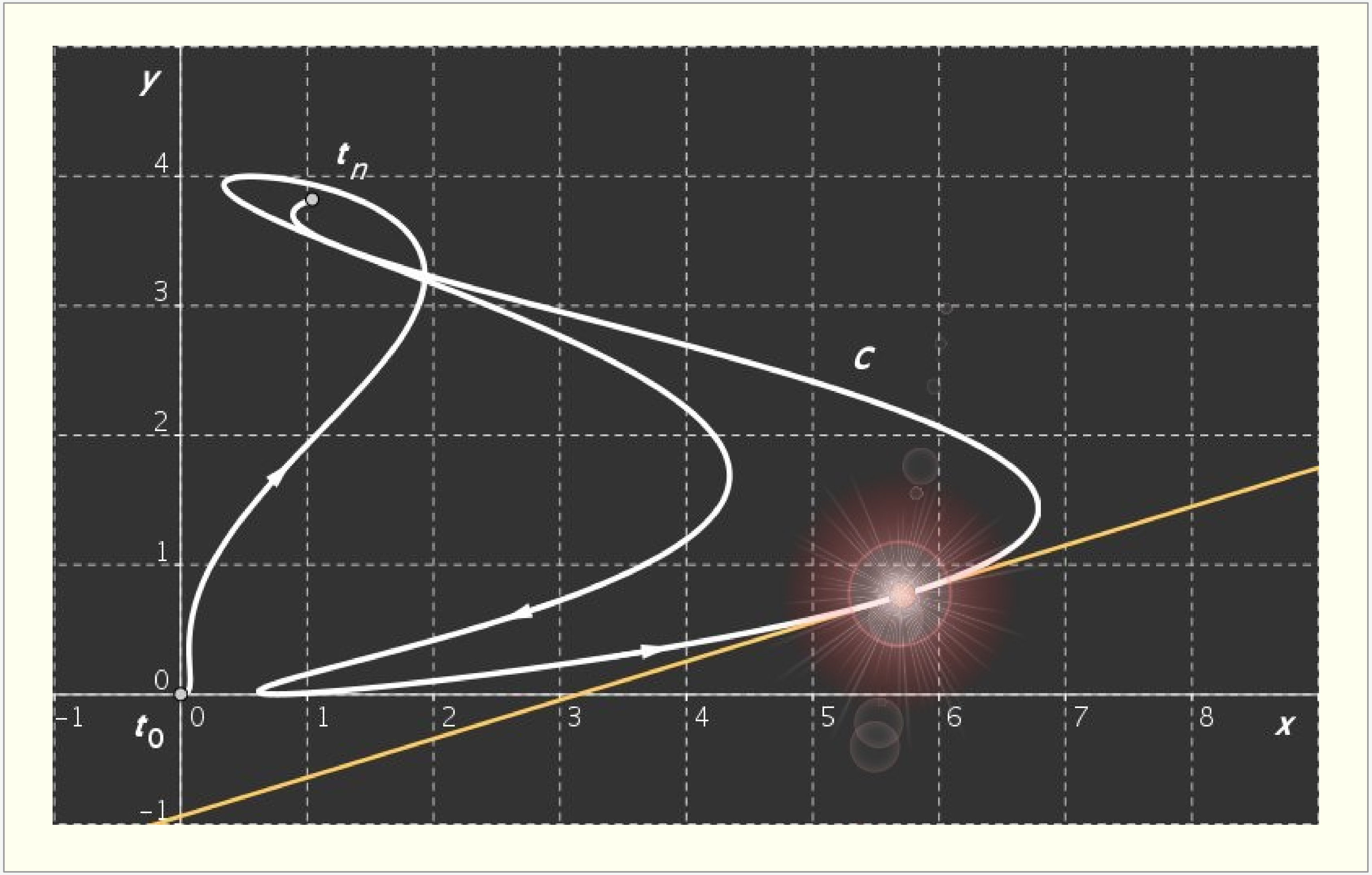
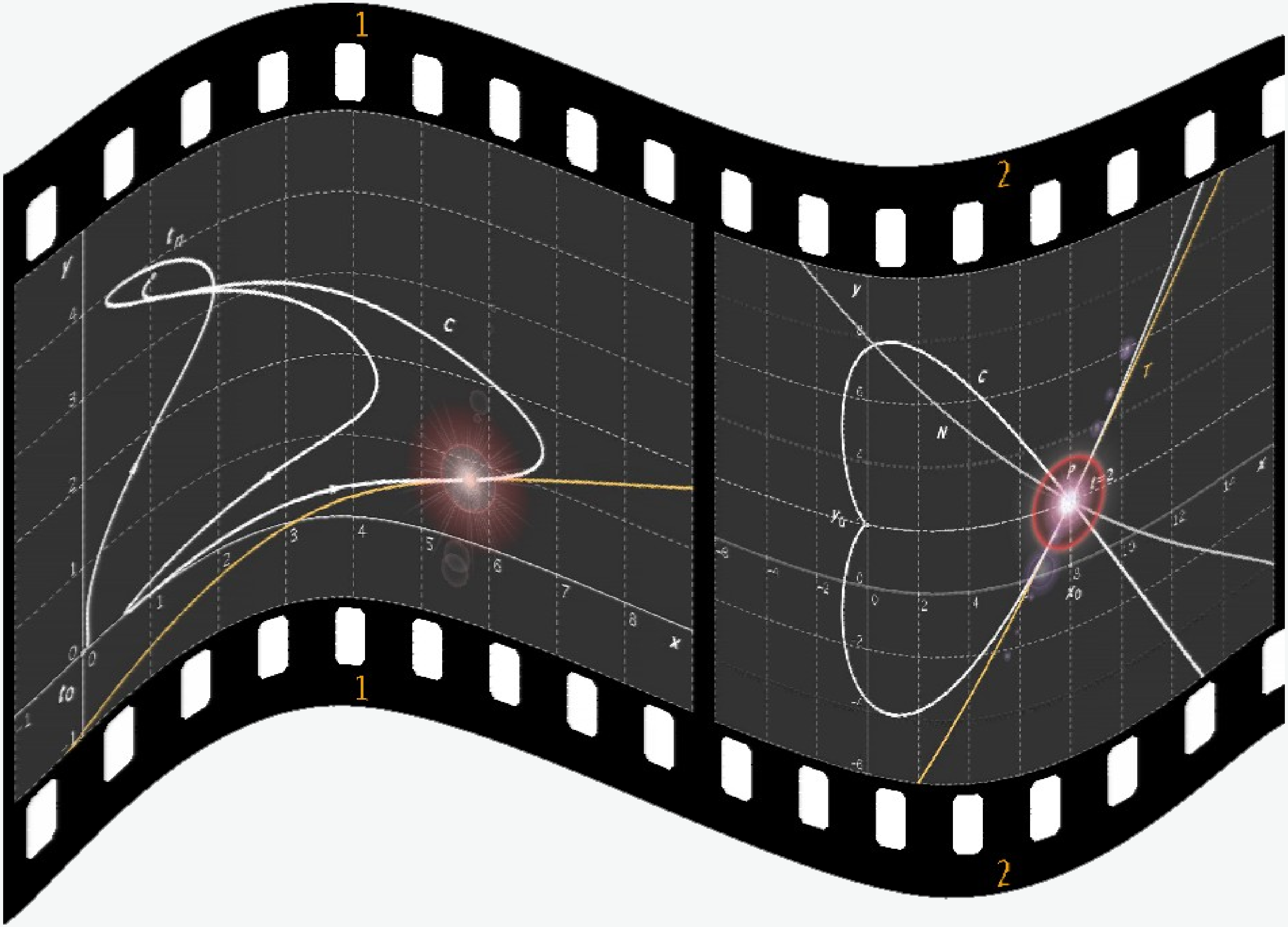


Ableitung einer in Parameterform dargestellten Funktion


1
2

Eine Funktion sei in einer Parameterform gegeben:

$$x = f\,(t)\,, \qquad y = g\,(t)\,, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_n\,.$$

Die erste Ableitung dieser Funktion wird auf folgende Weise bestimmt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\,, \qquad y_t = \frac{dy}{dt}\,, \qquad x_t = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}$$

Die Ableitung $\dfrac{dy}{dx}$ ist also eine Funktion des Parameters t.

Die zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{x_t}$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt P:

$$x_0 = x(t_0), \qquad y_0 = y(t_0), \qquad P = (x_0, \; y_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0), \qquad m = \frac{y_t(t_0)}{x_t(t_0)}$$

$$x_t(t_0)(y - y_0) = y_t(t_0)(x - x_0)$$

Die Gleichung der Normale im Punkt P:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0), \qquad y_t(t_0)(x - x_0) = -x_t(t_0)(y - y_0)$$

Bestimmen Sie die erste Ableitung *dy/dx* der in Parameterform gegebenen Funktionen

$$a)\ x(t) = t^2, \qquad y(t) = 3t^2 - 8t,$$

$$b)\ x(t) = 4\sin(2t) + 2, \qquad y(t) = \cos(4t),$$

$$c)\ x(t) = t + \sqrt{t}, \qquad y(t) = t - \sqrt{t}$$

$$d)\ x(t) = (2t - 3)^3 + t^2, \qquad y(t) = t^4 + t^2 - 2t$$

a) $x(t) = t^2, \quad x_t = 2t, \qquad y(t) = 3t^2 - 8t, \quad y_t = 6t - 8$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{6t - 8}{2t} = 3 - \frac{4}{t}$$

b) $x(t) = 4\sin(2t) + 2, \qquad x_t = 8\cos(2t)$

$y(t) = \cos(4t), \qquad y_t = -4\sin(4t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{-4\sin(4t)}{8\cos(2t)} = -\frac{8\sin(2t)\cos(2t)}{8\cos(2t)} = -\sin(2t)$$

c) $x(t) = t + \sqrt{t}, \quad x_t = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{t}}, \qquad y(t) = t - \sqrt{t}, \quad y_t = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{2\sqrt{t} - 1}{2\sqrt{t} + 1}$$

d) $x(t) = (2t - 3)^3 + t^2, \qquad y(t) = t^4 + t^2 - 2t$

$x_t = 6(2t - 3)^2 + 2t, \qquad y_t = 4t^3 + 2t - 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{4t^3 + 2t - 2}{6(2t - 3)^2 + 2t} = \frac{2t^3 + t - 1}{3(2t - 3)^2 + t}$$

Aufgabe 2a:

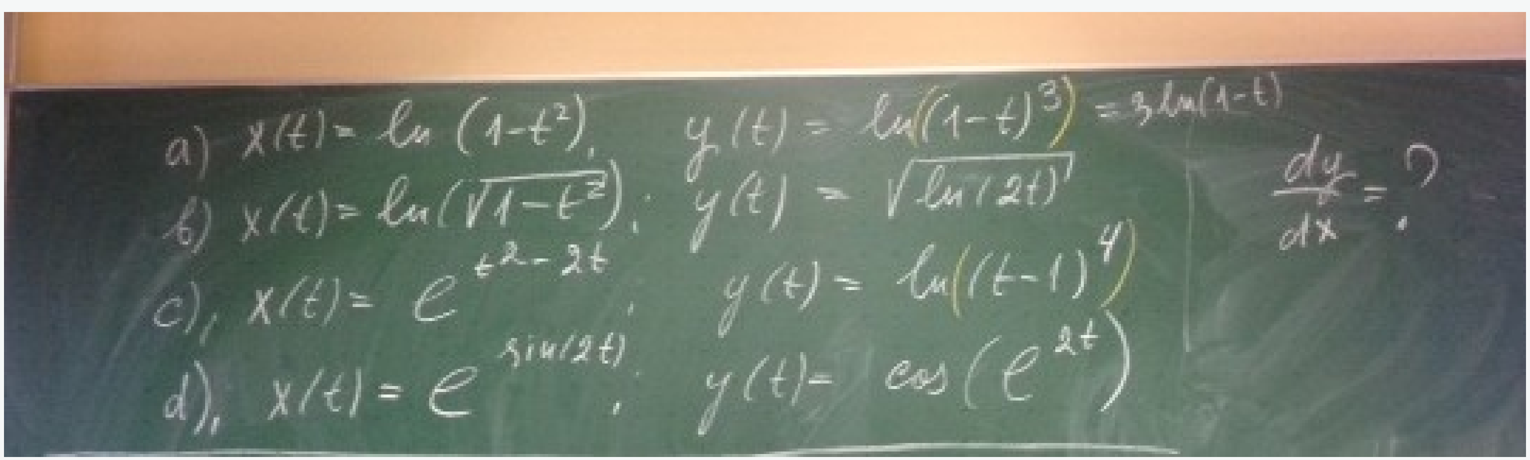
Bestimmen Sie die ersten Ableitungen *dy/dx* einer in Parameterform gegebenen Funktion an den drei gegebenen Stellen

$$a)\; x(t) = \cos t\,, \quad y(t) = \cos(2t)\,, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{3}\,, \quad t_3 = \frac{2\pi}{3}$$

$$b)\; x(t) = \frac{t}{1+t^2}\,, \quad y(t) = \frac{1-t}{1+t^2}\,, \quad t_1 = -2, \quad t_2 = \frac{1}{2}\,, \quad t_3 = 2$$

Aufgabe 2b:

Bestimmen Sie die erste Ableitung *dy/dx* der in Parameterform gegebenen Funktionen:



a) $x_t = \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \qquad y_t = \frac{d}{dt} \cos(2t) = -2 \sin(2t),$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sin(2t)}{-\sin t} = 2 \frac{\sin(2t)}{\sin t} = 4 \frac{\sin t \cos t}{\sin t} = 4 \cos t,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_1=0} = 4 \cos 0 = 4, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_2=\pi/3} = 4 \cos(\pi/3) = 2,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_3=2\pi/3} = 4 \cos(2\pi/3) = -2.$$

b) $x(t) = \frac{t}{1+t^2}, \qquad x_t = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

$$y(t) = \frac{1-t}{1+t^2}, \qquad y_t = \frac{t^2 - 2t - 1}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 2t - 1}{1-t^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-2} = -\frac{7}{3}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1/2} = -\frac{7}{3}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=2} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normale für die in Parameterform gegebenen Funktionen an der Stelle t

a) $x(t) = t^2, \quad y(t) = 2 - t, \quad t = -1$

b) $x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \quad t = \dfrac{\pi}{6}$

c) $x(t) = t^4 - 2t^2, \quad y(t) = t^5 - 4t^3 + 2, \quad t = 2$

d) $x(t) = 2\cos^3 t, \quad y(t) = 2\sin^3 t, \quad t = -\dfrac{\pi}{4}$

$$a)\ x(t) = t^2, \qquad y(t) = 2 - t, \qquad t = -1$$

$$y_T = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}, \qquad y_N = -2x + 5$$

$$b)\ x(t) = 2\cos t, \qquad y(t) = 2\sin t, \qquad t = \frac{\pi}{6}$$

$$y_T = -\sqrt{3}\,x + 4, \qquad y_N = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$x(t) = t^4 - 2t^2, \qquad y(t) = t^5 - 4t^3 + 2, \qquad t = 2$$

$$x_0 = x(t=2) = 8, \qquad y_0 = y(t=2) = 2, \qquad P = (x_0,\ y_0) = (8,\ 2)$$

$$x_t = 4t^3 - 4t, \qquad y_t = 5t^4 - 12t^2$$

$$m = \frac{y_t}{x_t} = \frac{5t^4 - 12t^2}{4t(t^2-1)} = \frac{5t^4 - 12t^2}{4t(t^2-1)} = \frac{5t^3 - 12t}{4(t^2-1)}$$

$$m\big|_{t=2} = \left(\frac{y_t}{x_t}\right)_{t=2} = \left(\frac{5t^3 - 12t}{4(t^2-1)}\right)_{t=2} = \frac{4}{3}$$

$$y_T - y_0 = m(x - x_0), \qquad y_T - 2 = \frac{4}{3}(x - 8), \qquad y_T = \frac{4}{3}x - \frac{26}{3}$$

$$y_N - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0), \qquad y_N - 2 = -\frac{3}{4}(x - 8), \qquad y_N = -\frac{3}{4}x + 8$$

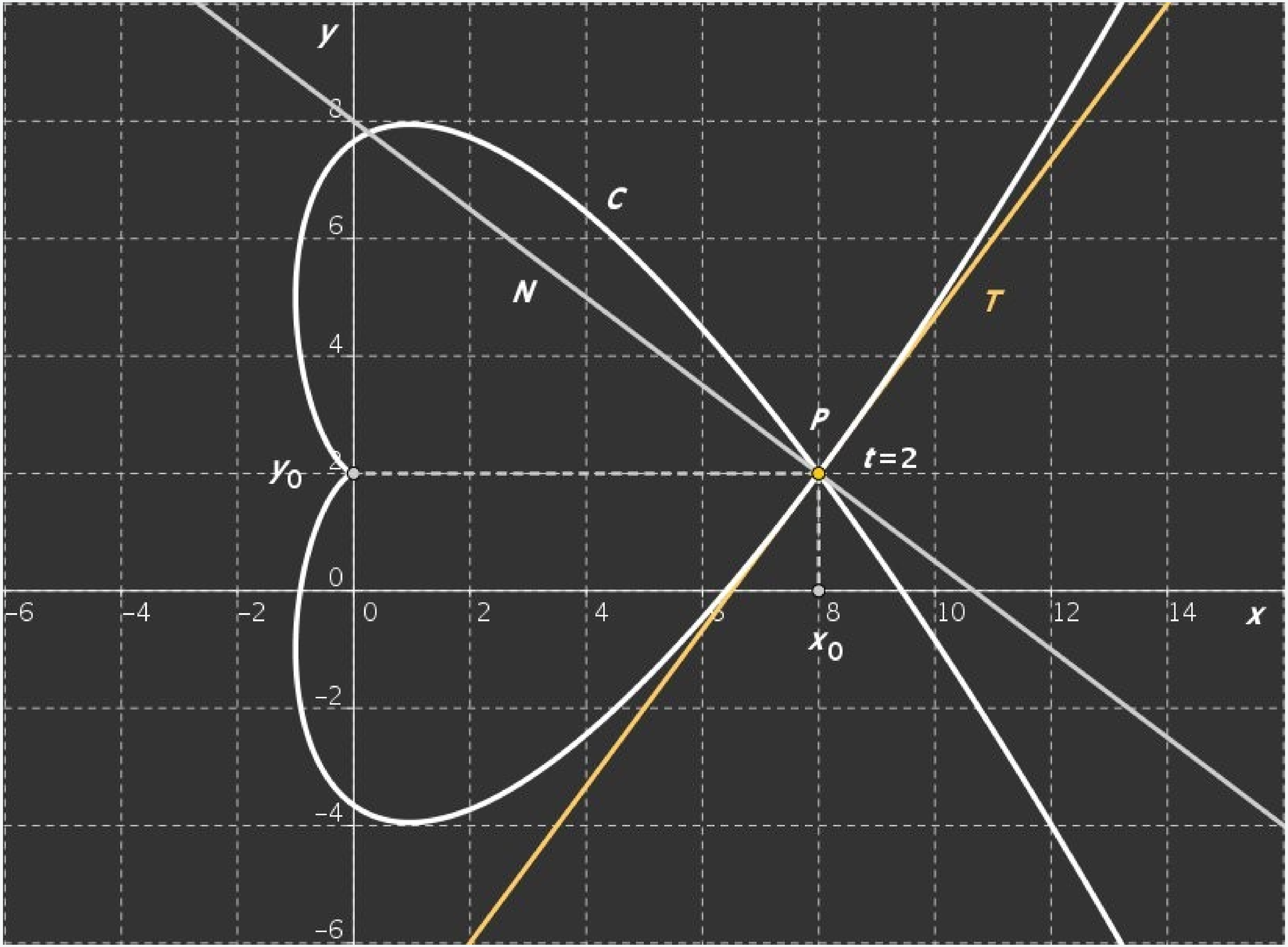


Abb. L3c: Ebene Kurve C der Aufgabe. Der Punkt P entspricht dem Parameterwert t = 2, T und N sind Tangente und Normale der Kurve in P

$$x(t) = 2\cos^3 t\,, \qquad y(t) = 2\sin^3 t\,, \qquad t = -\frac{\pi}{4}$$

$$x_0 = x\left(t = -\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_0 = x\left(t = -\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x_t = -6\cos^2 t\cdot\sin t\,, \qquad y_t = 6\sin^2 t\cdot\cos t$$

$$m = \frac{y_t}{x_t} = -\frac{\sin t}{\cos t}\,, \qquad m\,\big|_{t=-\pi/4} = 1$$

$$y_T = x - \sqrt{2}\,, \qquad y_N = -x$$

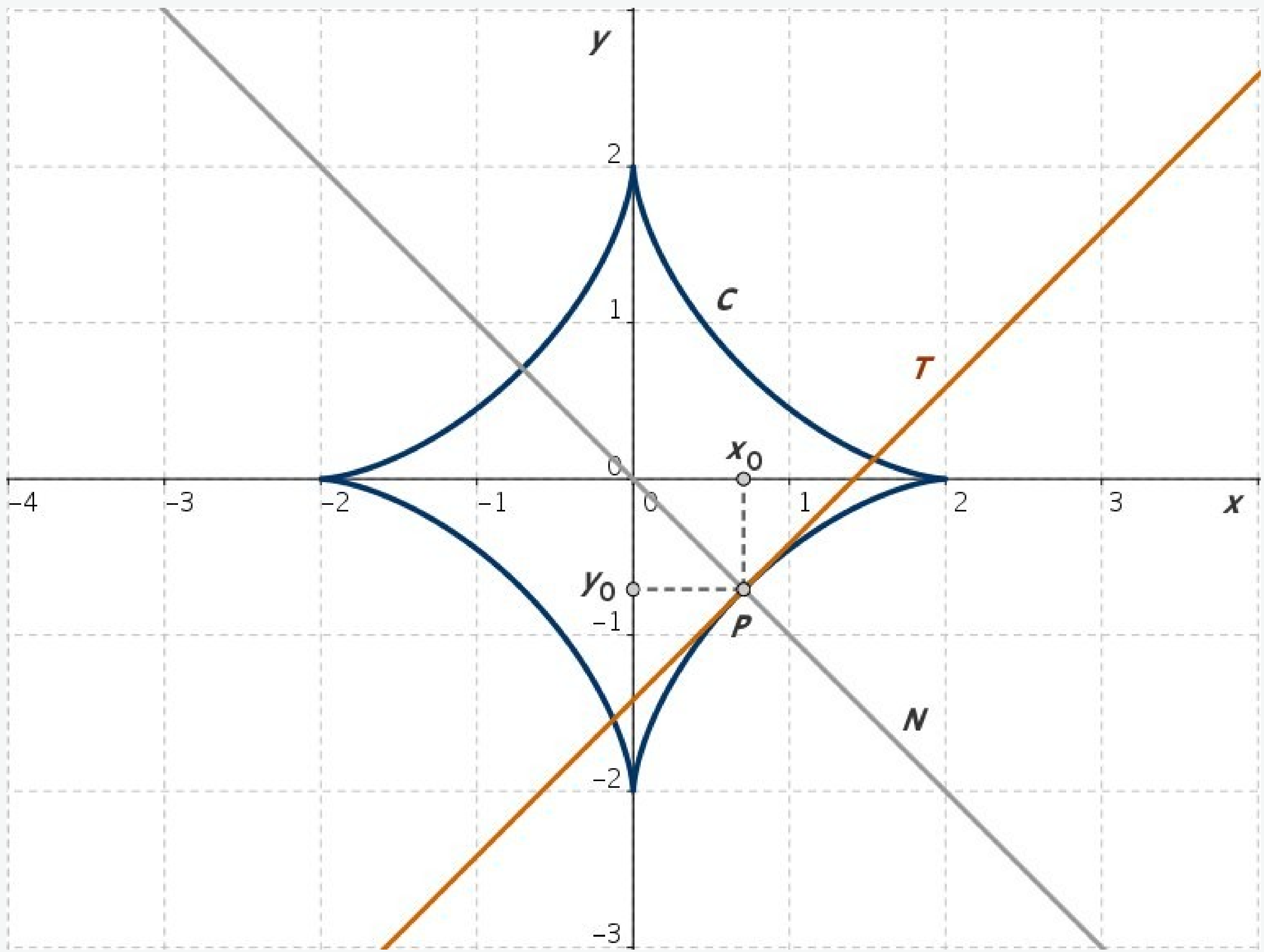


Abb. L3d: Ebene Kurve C der Aufgabe. Der Punkt P entspricht dem Parameterwert t = -π/4. T und N sind Tangente und Normale der Kurve in P

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen für die in Parameterform gegebenen Funktion im Punkt P. Geben Sie, wenn möglich, eine analytische Gleichung der Funktion $y = f(x)$ oder $x = g(y)$ an. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Normalen mit der Kurve.

$a)$ $x(t) = t - 2, \quad y(t) = t^2 - 4t + 2, \quad P = (1, -1)$

$b)$ $x(t) = t - 4, \quad y(t) = t^2 - 10t + 24, \quad P = (0, 0)$

$$x(t) = t - 2, \qquad y(t) = t^2 - 4t + 2, \qquad P = (x_0, \ y_0) = (1, -1)$$

$$1 = t - 2, \qquad t = 3$$

$$x_t = 1, \qquad y_t = 2t - 4, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = 2t - 4$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=3} = 2$$

$$y_T - y_0 = m(x - x_0), \qquad y_T - (-1) = 2(x - 1), \qquad y_T = 2x - 3$$

$$y_N - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0), \qquad y_N - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 1), \qquad y_N = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y_N = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{t-2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-t}{2}, \qquad y_N = y(t), \qquad \frac{1-t}{2} = t^2 - 4t + 2$$

$$t^2 - \frac{7}{2}t + \frac{3}{2} = 0, \qquad t_1 = 3, \qquad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{1}{2}, \qquad Q = (x(t), \ y(t))\big|_{t=1/2} = \left(-\frac{3}{2}, \ \frac{1}{4}\right)$$

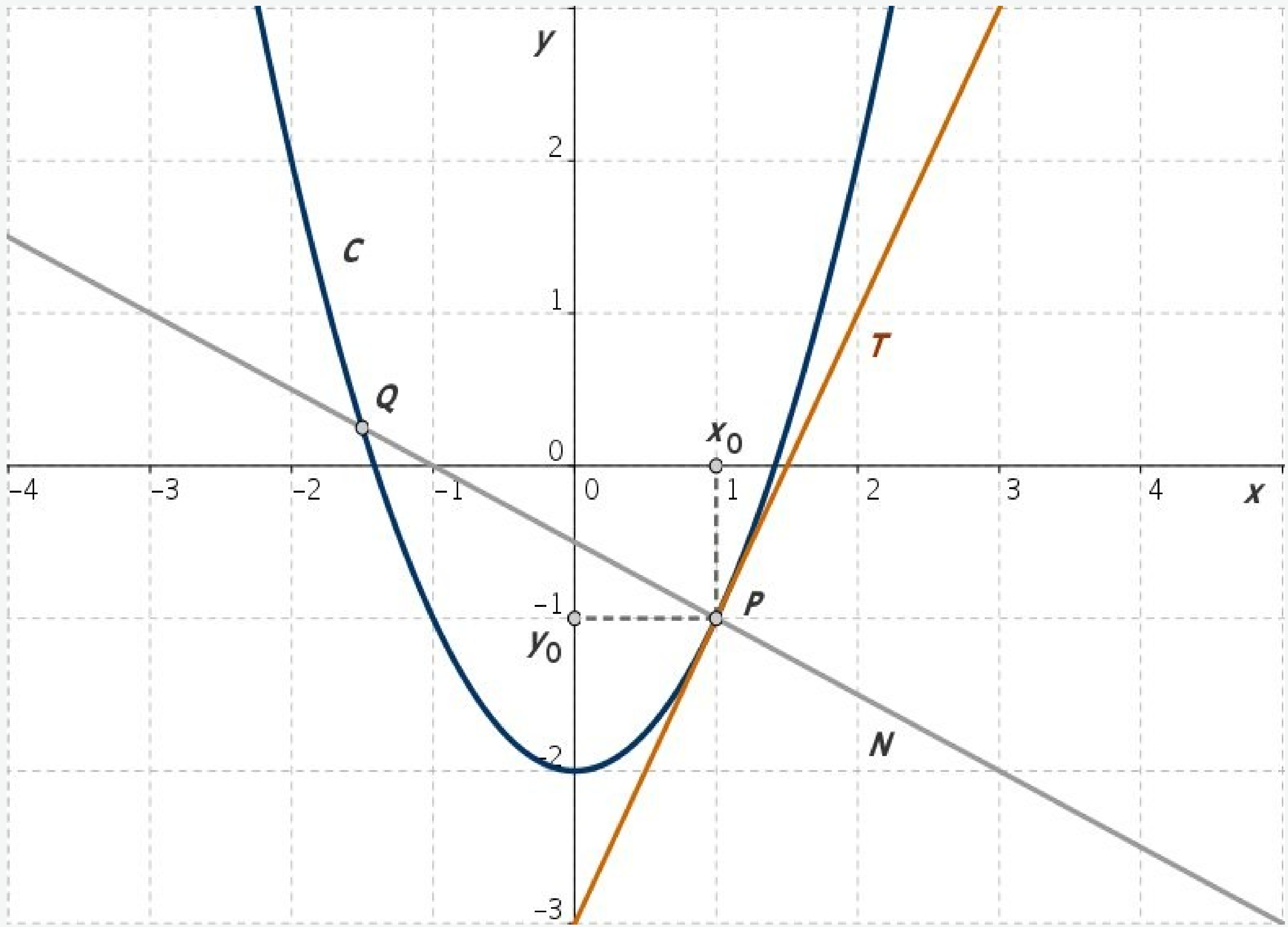


Abb. L4a: Die ebene Kurve C entspricht der Parabel $y = x^2 - 2$. Der Punkt P entspricht dem Parameterwert $t = 3$. T und N sind Tangente und Normale der Parabel in P.

Tangente und Normale: Lösung 4b

$$x(t) = t - 4, \qquad y(t) = t^2 - 10t + 24, \qquad P = (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$0 = t - 4, \qquad t = 4$$

$$x_t = 1, \qquad y_t = 2t - 10, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = 2t - 10$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=4} = -2$$

$$y_T - y_0 = m(x - x_0), \qquad y_T - 0 = -2(x - 0), \qquad y_T = -2x$$

$$y_N - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0), \qquad y_N - 0 = \frac{1}{2}(x - 0), \qquad y_N = \frac{x}{2}$$

$$y_N = \frac{x}{2} = \frac{t-4}{2}, \qquad y_N = y(t), \qquad \frac{t-4}{2} = t^2 - 10t + 24$$

$$t^2 - \frac{21}{2}t + 26 = 0, \qquad t_1 = 4, \qquad t_2 = \frac{13}{2}$$

$$t_2 = \frac{13}{2}, \qquad Q = (x(t), y(t))\big|_{t=13/2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

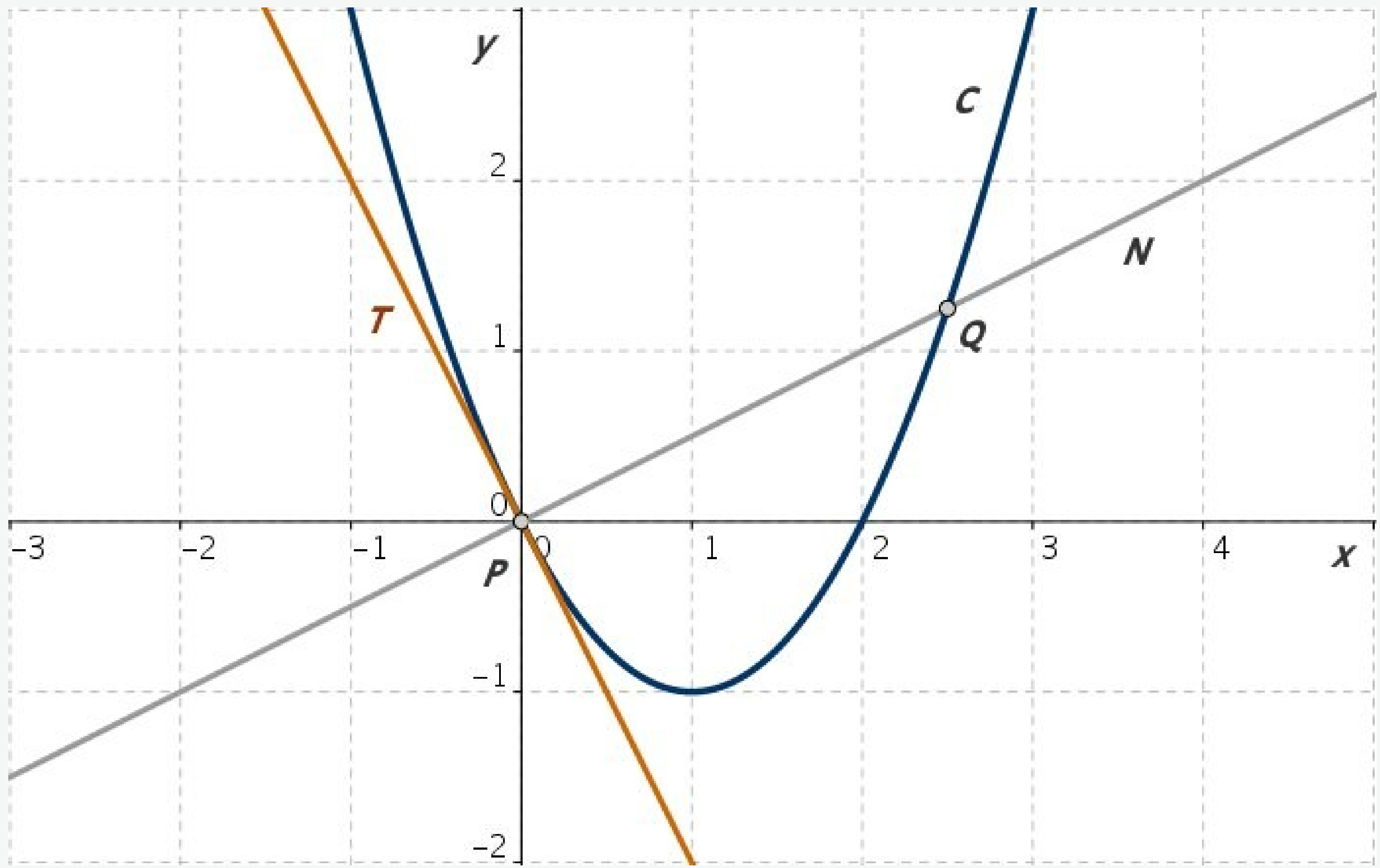


Abb. L4b: Die ebene Kurve C entspricht der Parabel $y = x\,(x - 2)$. Der Punkt P entspricht dem Parameterwert $t = 4$. T und N sind Tangente und Normale der Parabel in P.