

*Lineare Gleichungen mit absoluten Beträgen*

## Lineare Gleichungen mit absoluten Beträgen

Gleichungen, bei denen von der Variablen direkt oder indirekt der absolute Betrag angegeben ist, sind weder der Gruppe der algebraischen Gleichungen noch der Gruppe der transzendenten Gleichungen zuzuordnen.

$$|x| = a \begin{cases} a > 0, & x_1 = a, & x_2 = -a \\ a = 0, & x = 0 \\ a < 0 & \text{keine Lösung} \end{cases}$$

Wir betrachten als lineare Gleichungen mit absoluten Beträgen die Gleichungen des Typs

$$|ax + b| + c = 0$$

Beim Lösen sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1 Fall:  $ax + b > 0$

2 Fall:  $ax + b < 0$

## Lineare Gleichungen mit absoluten Beträgen

1 Fall:  $ax + b > 0$

$$|ax + b| + c = 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b + c}{a}$$

2 Fall:  $ax + b < 0$

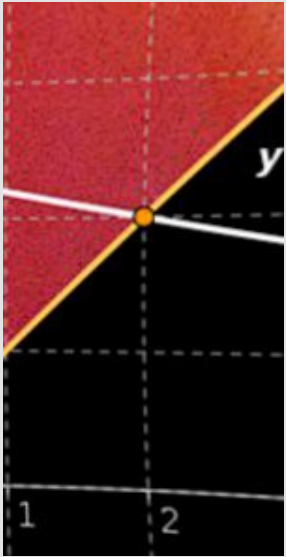
$$|ax + b| + c = 0 \quad \Rightarrow \quad -(ax + b) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{c - b}{a}$$

Es ist zu betonen, dass die Gleichung

$$|ax + b| + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |ax + b| = -c$$

nur dann eine Lösung hat, wenn die Konstante  $c$  kleiner als Null ist.

## Betragsfunktion: Aufgaben 1-7



Bestimmen Sie die Lösungen folgender Betragsgleichungen

Aufgabe 1:  $|2x + 3| = 4$

Aufgabe 2:  $|3x - 2| = -x + 6$

Aufgabe 3:  $|x + 1| = 2$

Aufgabe 4:  $|x + 1| = x$

Aufgabe 5:  $|x + 1| = -x$

Aufgabe 6:  $2|x - 1| = |x + 4|$

Aufgabe 7:  $|x - 1| = |x + 3|$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 1

Wir bestimmen die Lösung folgender linearen Betragsgleichung

$$|2x + 3| = 4$$

1. Fall:  $2x + 3 \geq 0, \quad x \geq -\frac{3}{2}$

$$|2x + 3| = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 \in \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$$

2. Fall:  $2x + 3 < 0, \quad x < -\frac{3}{2}$

$$|2x + 3| = 4 \quad \Rightarrow \quad -2x - 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad -2x = 7 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_2 \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

$$L_G = \left\{ -\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

# Lineare Betragsgleichungen: Lösung 1

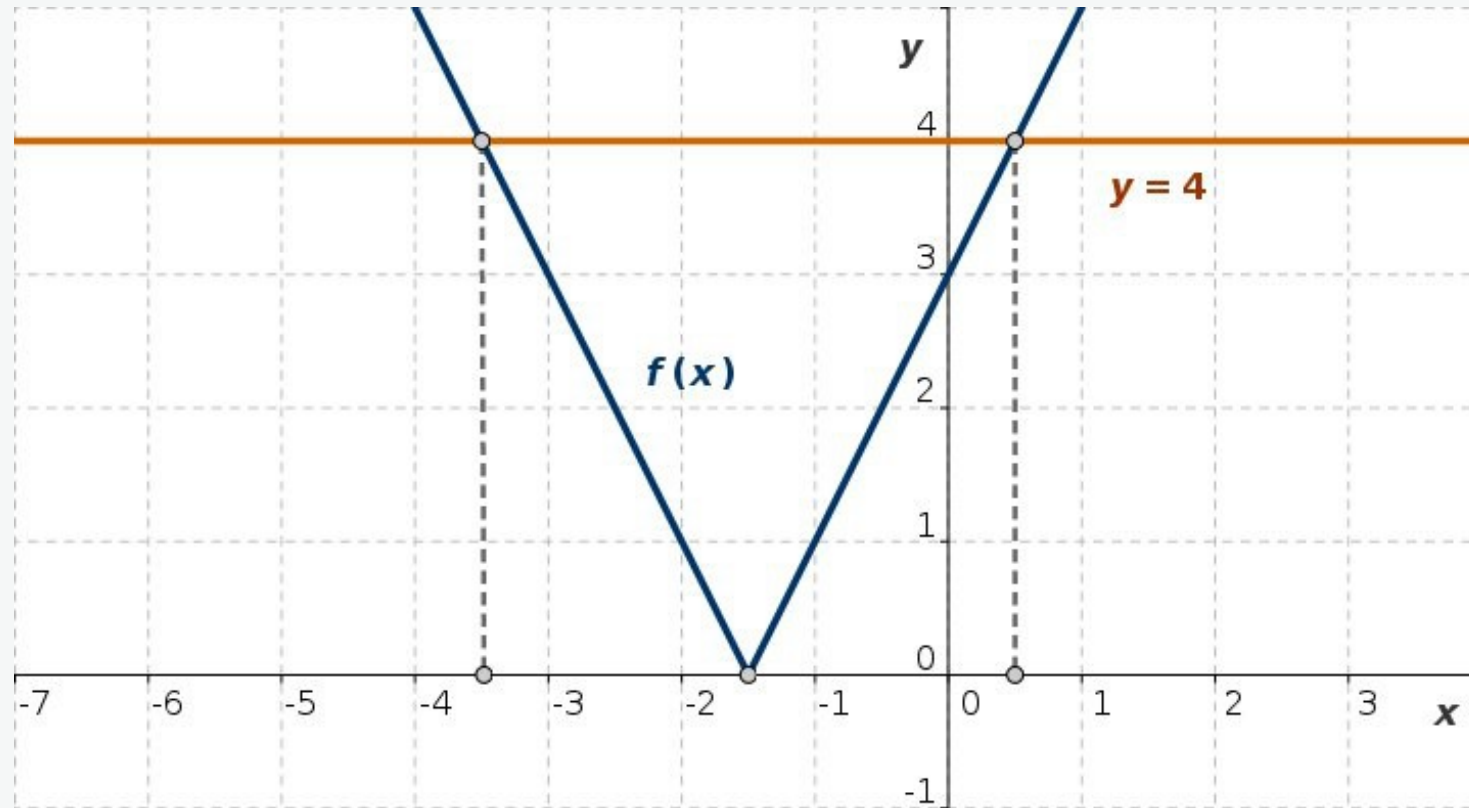


Abb. L1: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $|2x + 3| = 4$ ;  $f(x) = |2x + 3|$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 2

Wir bestimmen die Lösung folgender linearen Betragsgleichung

$$|3x - 2| = -x + 6$$

1. Fall:

$$3x - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{3}$$

$$|3x - 2| \rightarrow 3x - 2$$

$$3x - 2 = -x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_1 \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$

2. Fall:

$$3x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}$$

$$|3x - 2| \rightarrow -3x + 2$$

$$-3x + 2 = -x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \quad x_2 \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

$$L_G = \{-2, 2\}$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 2

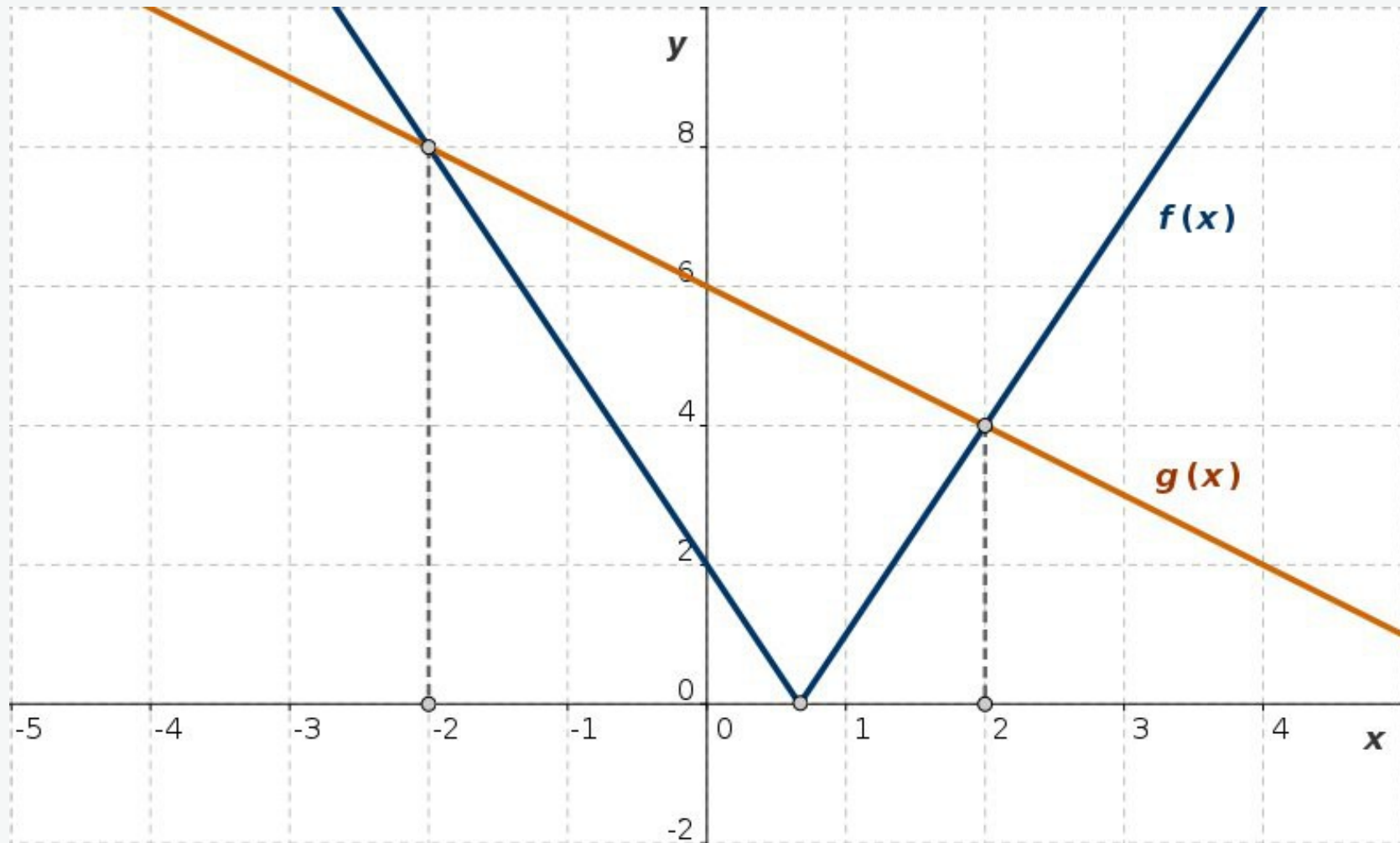


Abb. L2: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $|3x - 2| = 6 - x$

$$f(x) = |3x - 2|, \quad g(x) = -x + 6$$



$$|x + 1| = 2$$

1. Fall:  $x + 1 \geq 0$

$$|x + 1| = 2 \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

2. Fall:  $x + 1 < 0$

$$|x + 1| = 2 \Rightarrow -x - 1 = 2 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x_2 = -3$$

$$L_G = \{-3, 1\}$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 3

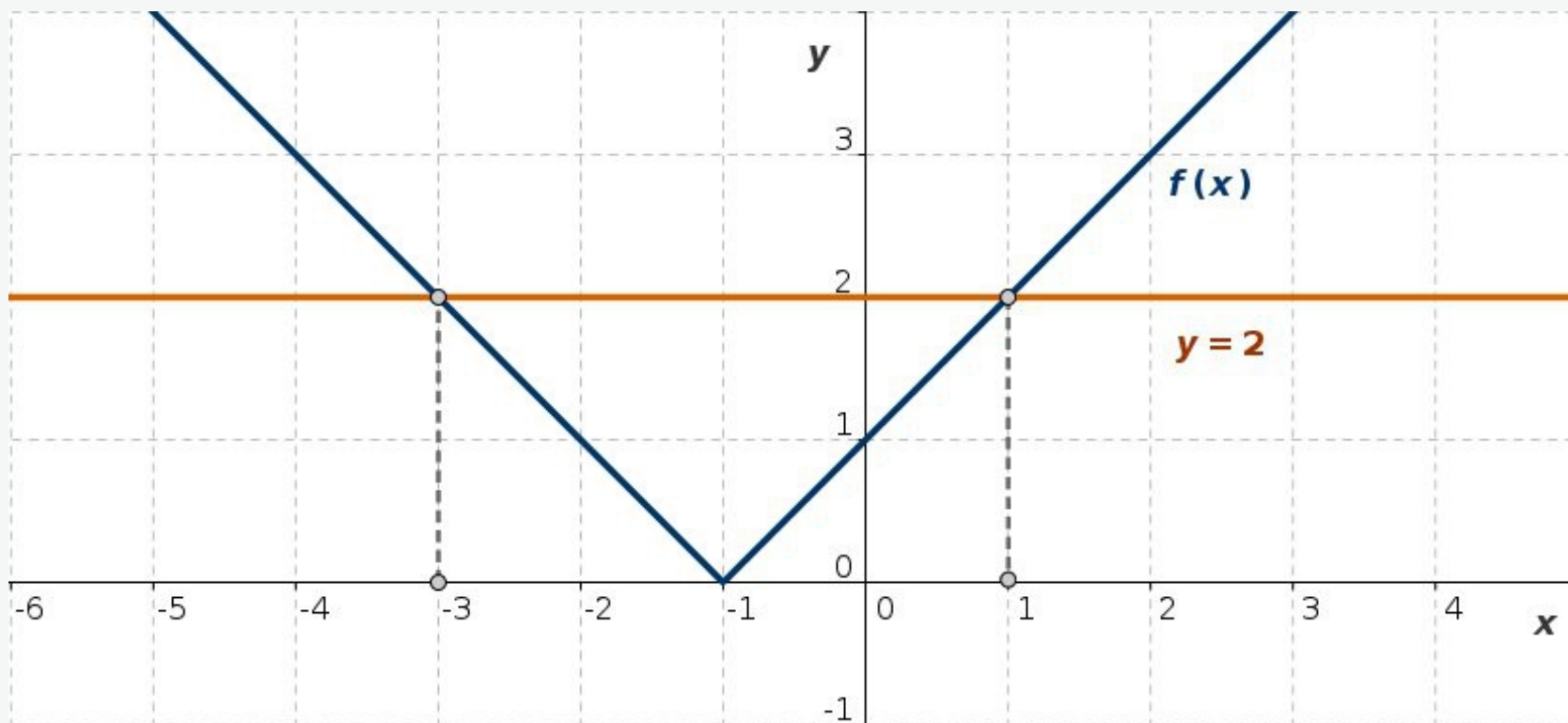


Abb. L3: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $|x + 1| = 2$

$$f(x) = |x + 1|$$

$$|x + 1| = x$$

1. Fall:

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$|x + 1| = x \Rightarrow x + 1 = x \Rightarrow 1 = 0$$

falsche Aussage

2. Fall:

$$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

$$-(x + 1) = x \Leftrightarrow 2x = -1, \quad x_2 = -0.5, \quad x_2 \notin (-\infty, -1)$$

$$L = \{ \emptyset \}$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 4

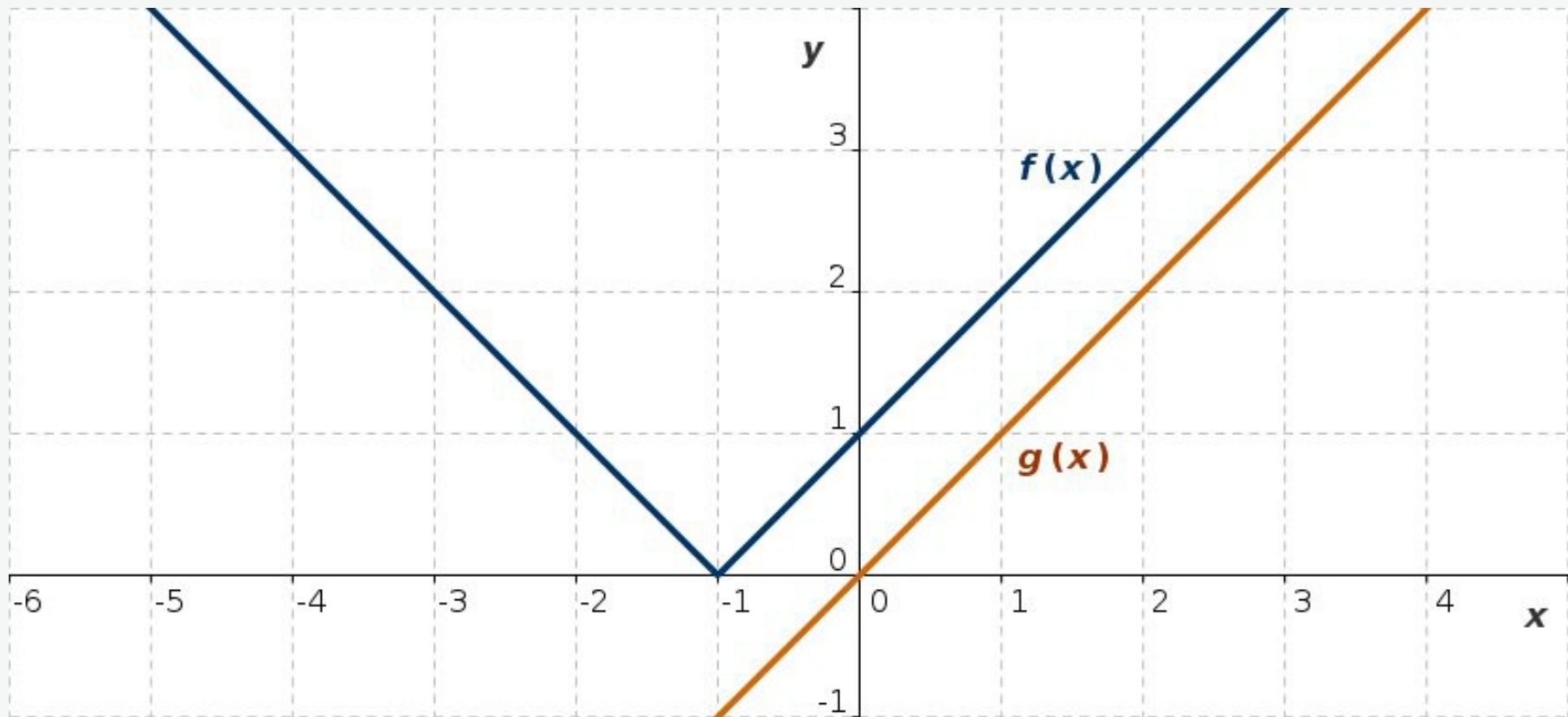


Abb. 14: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $|x + 1| = x$

$$f(x) = |x + 1|, \quad g(x) = x$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 5

$$|x + 1| = -x$$

1. Fall:

$$x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$$

$$|x + 1| = -x \quad \Rightarrow \quad x + 1 = -x \quad \Rightarrow \quad 1 = -2x, \quad x = -\frac{1}{2}$$

2. Fall:

$$x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$$

$$-(x + 1) = -x \quad \Leftrightarrow \quad -x - 1 = -x, \quad -1 = 0 \quad \text{falsche Aussage}$$

$$L = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 5

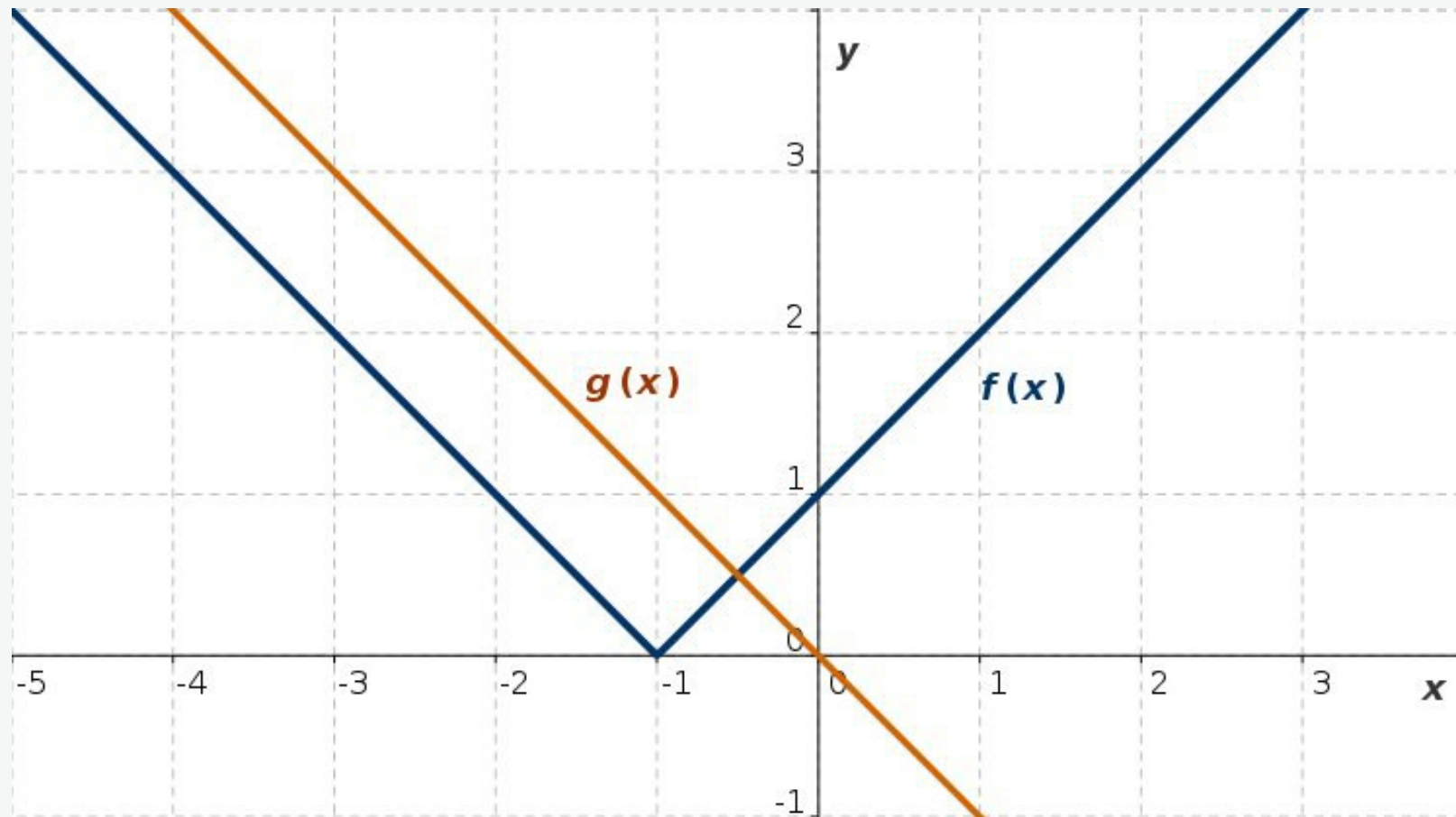


Abb. L5: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $|x + 1| = -x$

$$f(x) = |x + 1|, \quad g(x) = -x$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 6

$$2 |x - 1| = |x + 4|$$

Zum Lösen der Gleichung werden die in der Gleichung auftretende Beträge in betragfreie Ausdrücke umgeformt:

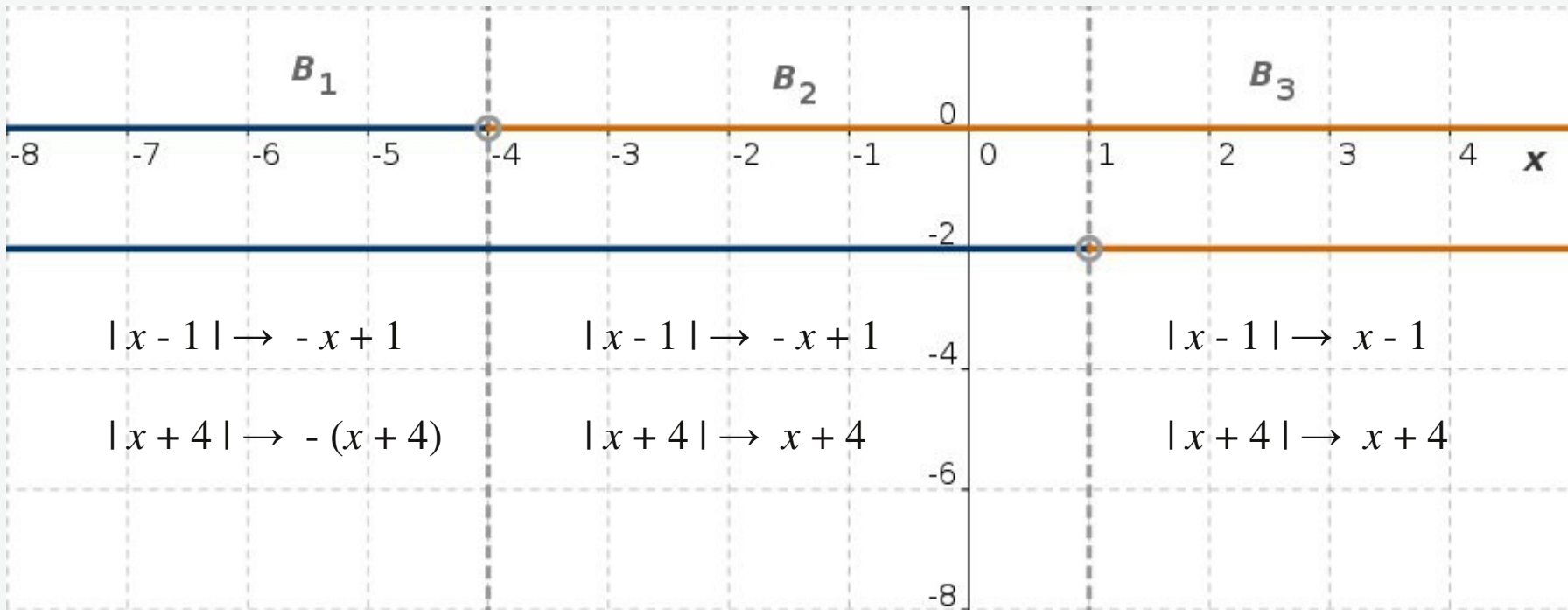
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

$$|x + 4| = \begin{cases} x + 4, & x \geq -4 \\ -(x + 4), & x < -4 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, dass der Definitionsbereich der Gleichung in drei Teilbereiche zu untergliedern ist:

$$1B : x < -4, \quad 2B : -4 \leq x < 1, \quad 3B : x \geq 1$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 6



Für diese Teilbereiche erhält man dann folgende Gleichungen:

$$1B. \quad x < -4: \quad -2(x - 1) = -(x + 4) \Rightarrow x_1 = 6$$

$$2B. \quad -4 \leq x < 1: \quad -2(x - 1) = x + 4 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$3B. \quad x \geq 1: \quad 2(x - 1) = x + 4 \Rightarrow x_3 = 6$$

$$L = \left\{ -\frac{2}{3}, 6 \right\}$$



## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 6

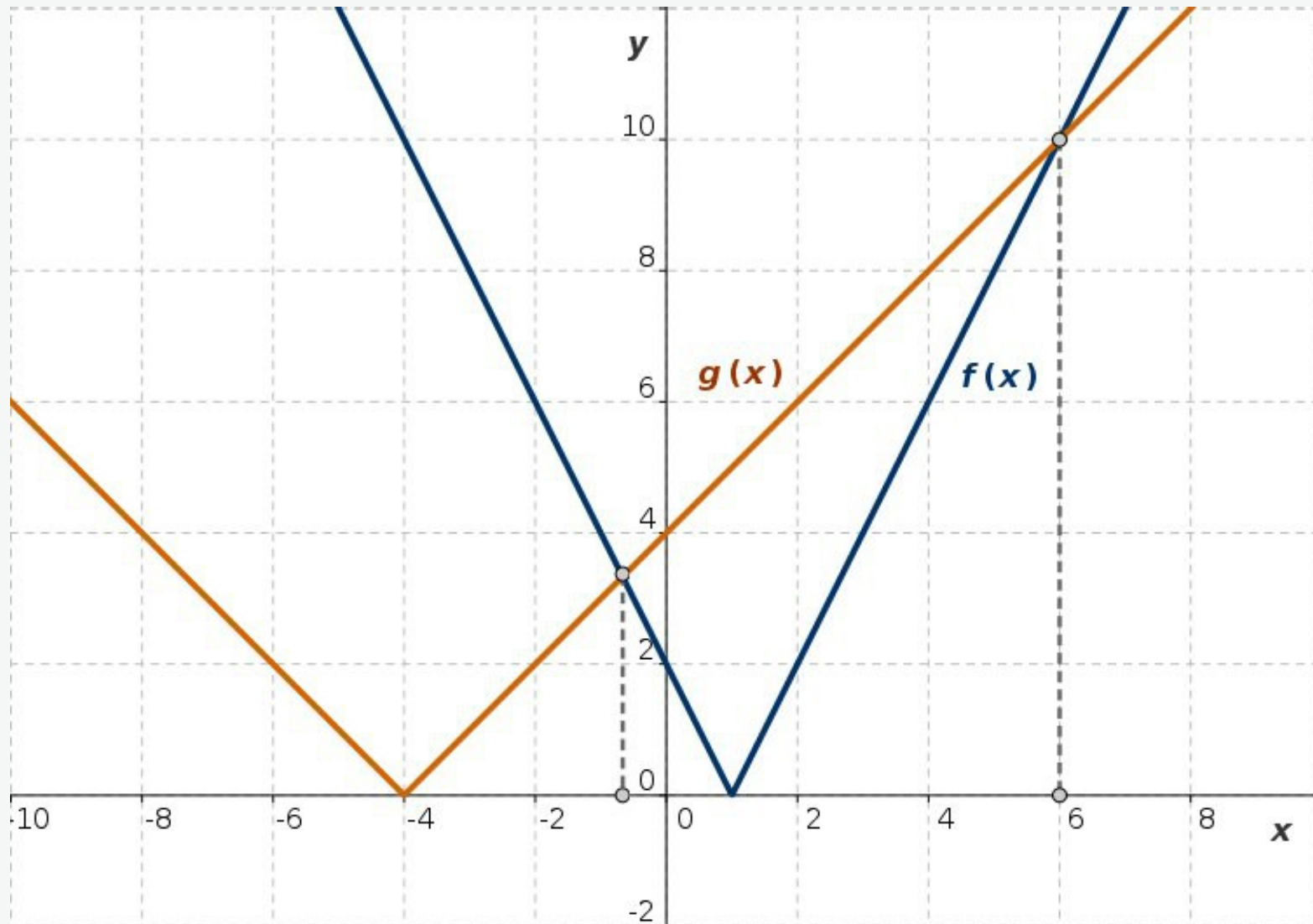


Abb. L6: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $2|x - 1| = |x + 4|$

$$f(x) = 2|x - 1|, \quad g(x) = |x + 4|$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 7

$$|x - 1| = |x + 3|$$

Zum Lösen der Gleichung werden die in der Gleichung auftretend Beträge in betragfreie Ausdrücke umgeformt:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3, & x \geq -3 \\ -(x + 3), & x < -3 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, dass der Definitionsbereich der Gleichung in drei Teilbereiche zu untergliedern ist:

$$1B : x < -3, \quad 2B : -3 \leq x < 1, \quad 3B : x \geq 1$$

$$1B. \quad x < -3: \quad -(x - 1) = -(x + 3) \Rightarrow 1 = -3 \quad L_1 = \{ \emptyset \}$$

$$2B. \quad -3 \leq x < 1: \quad -(x - 1) = x + 3 \Rightarrow x_1 = -1 \quad L_2 = \{ -1 \}$$

$$3B. \quad x \geq 1: \quad x - 1 = x + 3 \Rightarrow -1 = 3 \quad L_3 = \{ \emptyset \}$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{ -1 \}$$

## Lineare Betragsgleichungen: Lösung 7

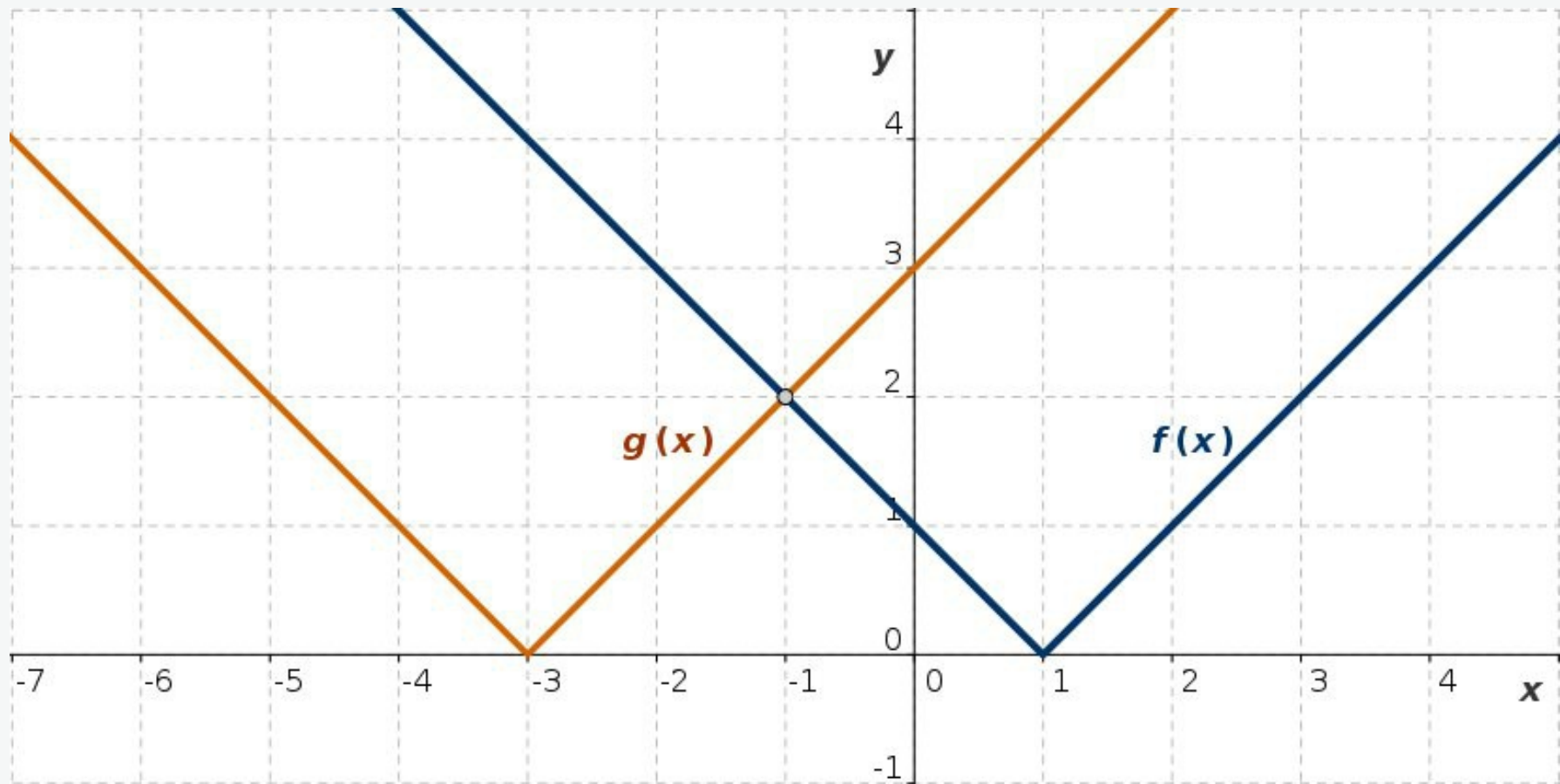


Abb. L7: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung  $|x - 1| = |x + 3|$

$$f(x) = |x - 1|, \quad g(x) = |x + 3|$$