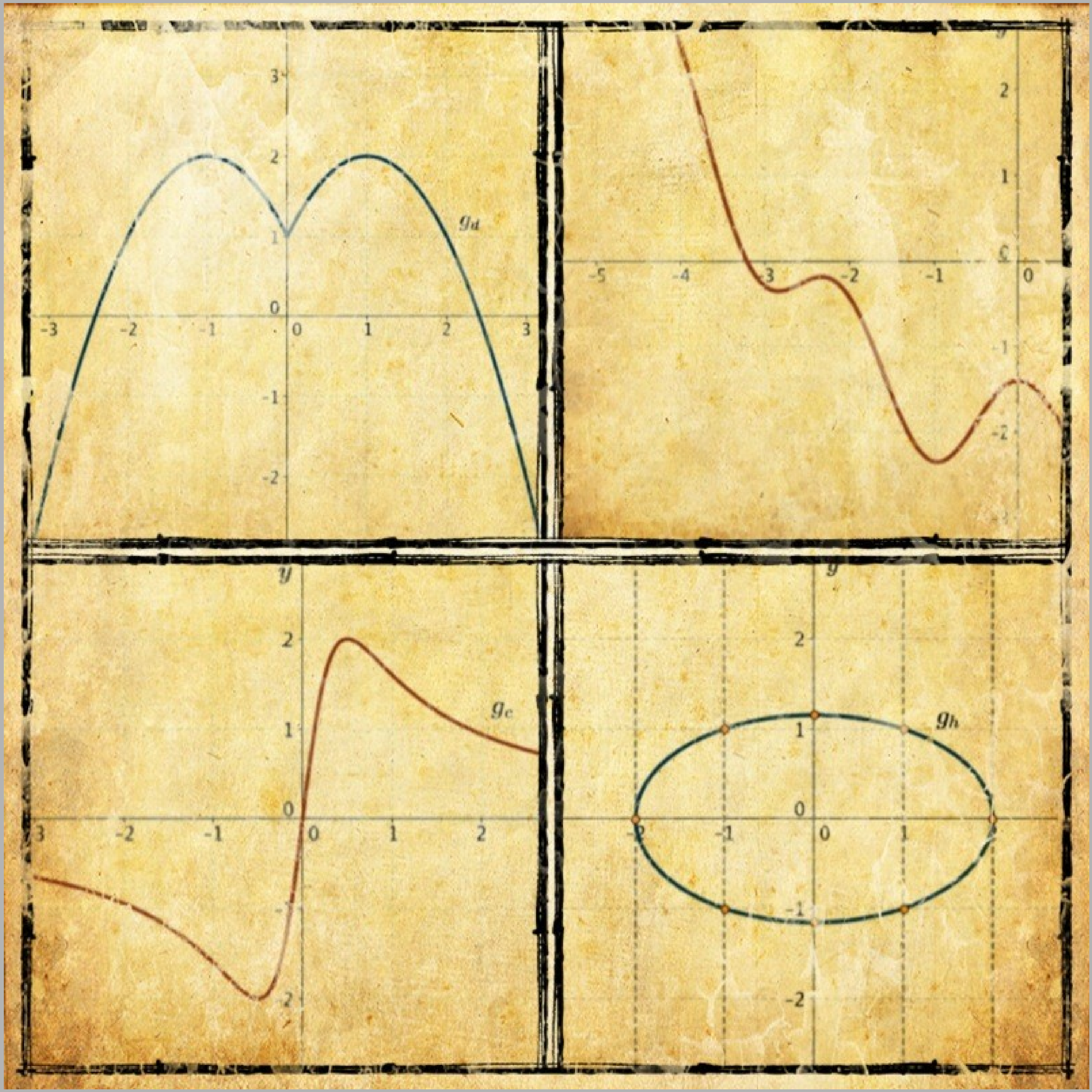
Symmetrien, gerade und ungerade Funktionen

Wir Menschen fühlen uns von Symmetrien angezogen.



g_d
g_c
g_h

- Definition
  - einer Funktion,
  - einer Relation,
  - des Definitionsbereiches einer Funktion.

- Senkrechtentest.

- Drei Symmetrietypen:
  - Symmetrie in Bezug auf die y-Achse,
  - Symmetrie in Bezug auf die x-Achse,
  - Symmetrie zum Koordinatenursprung.
- Symmetrien wie sie bei Funktionen und wie sie bei Relationen auftreten
- Wie sich Symmetrien relativ zur y-Achse oder zum Koordinatenursprung in der Funktionsgleichung ausdrücken
- Algebraische und graphische Prüfungen auf Achsensymmetrie oder auf Symmetrie zum Ursprung
- Symmetrieregeln für Polynome und für rationale, trigonometrische und zusammengesetzte Funktionen
- Darstellung von Funktionen als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion.

Aufgabe 1:

In Abbildung 1-1 sind die Graphen folgender Gleichungen dargestellt:

$$a)\quad y = x^2, \qquad b)\quad y = \frac{x^3}{8}, \qquad c)\quad x = y^2$$

Entscheide, ob für die 3 Graphen Symmetrien vorliegen und wenn ja, von welcher Art.

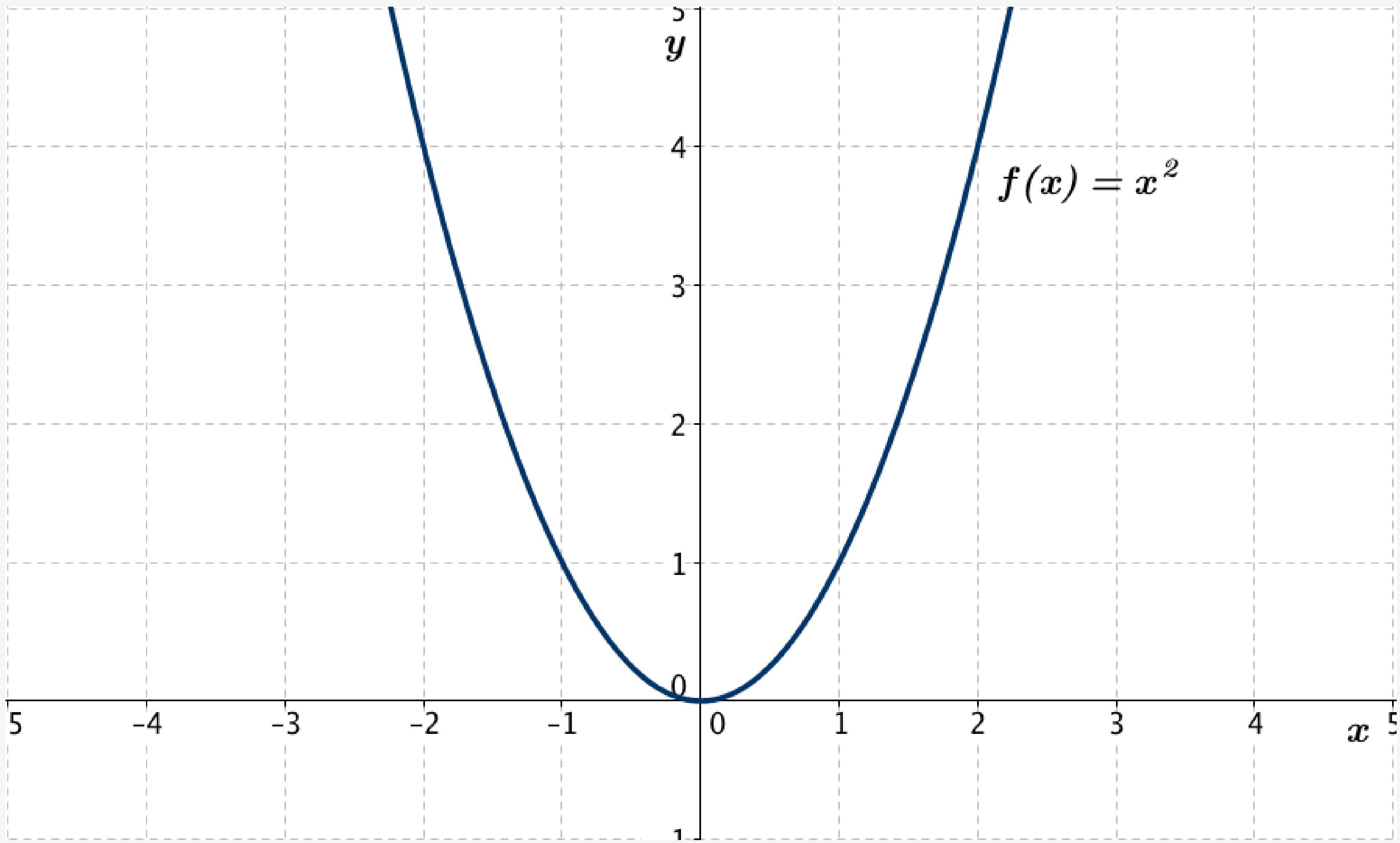


Abb. 1-1a: Graph der Funktion $f(x) = x^2$

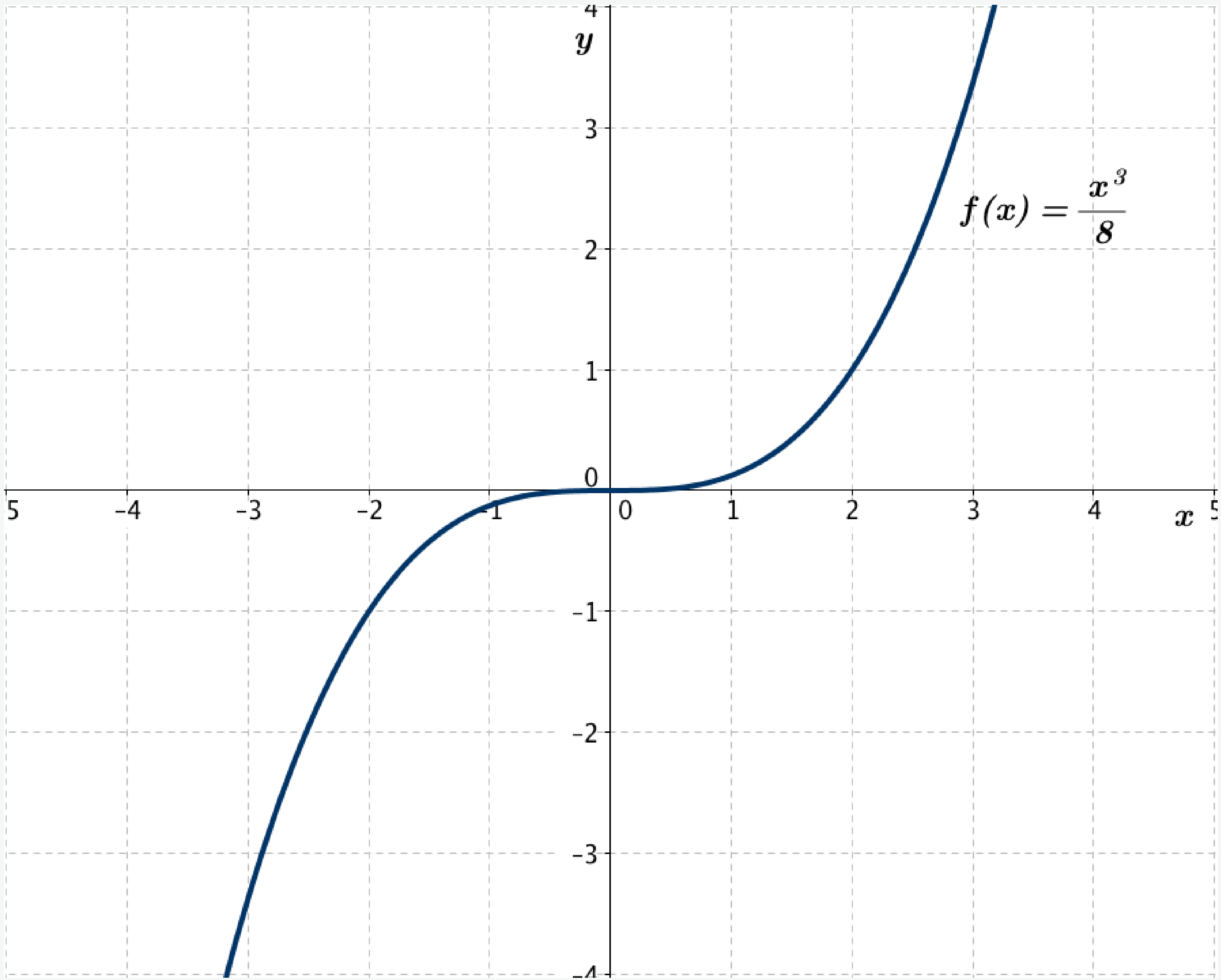


Abb. 1-1b: Graph der Funktion $f(x) = x^3/8$

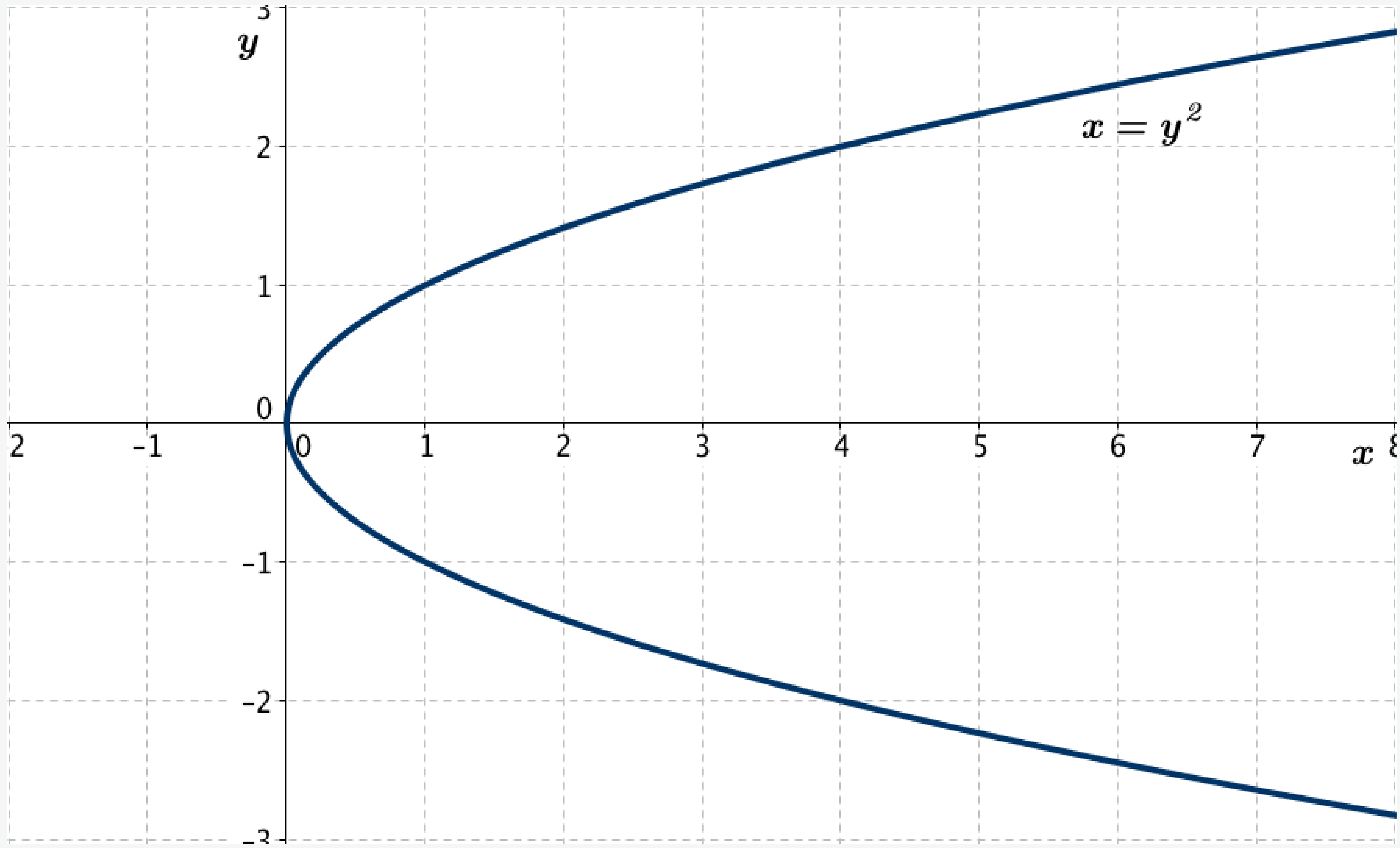


Abb. 1-1c: Graphische Darstellung der Gleichung $x = y^2$

$a)\ \ y = x^2$

Die Funktionskurve in Abb. 1-1*a* ist symmetrisch bezüglich der *y*-Achse, d.h. es gibt auf der Kurve zu jedem Punkt *(x, y)* = (*x, f (x)*) einen Punkt *(-x, y) = (-x, f (x))* :

$$\left(x,\ f(x)\right) \overset{y}{\overbrace{\rightarrow}} \left(-x,\ f(-x)\right) = \left(-x,\ f(x)\right)$$

$$(1,\ 1) \overset{y}{\overbrace{\rightarrow}} (-1,\ 1)$$

$$(2,\ 4) \overset{y}{\overbrace{\rightarrow}} (-2,\ 4)$$

Algebraische Beschreibung der Symmetrie in Bezug auf die *y*-Achse:

Im Definitionsbereich der Funktion gibt es zu jedem Wert *x* einen Wert -*x* mit :

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

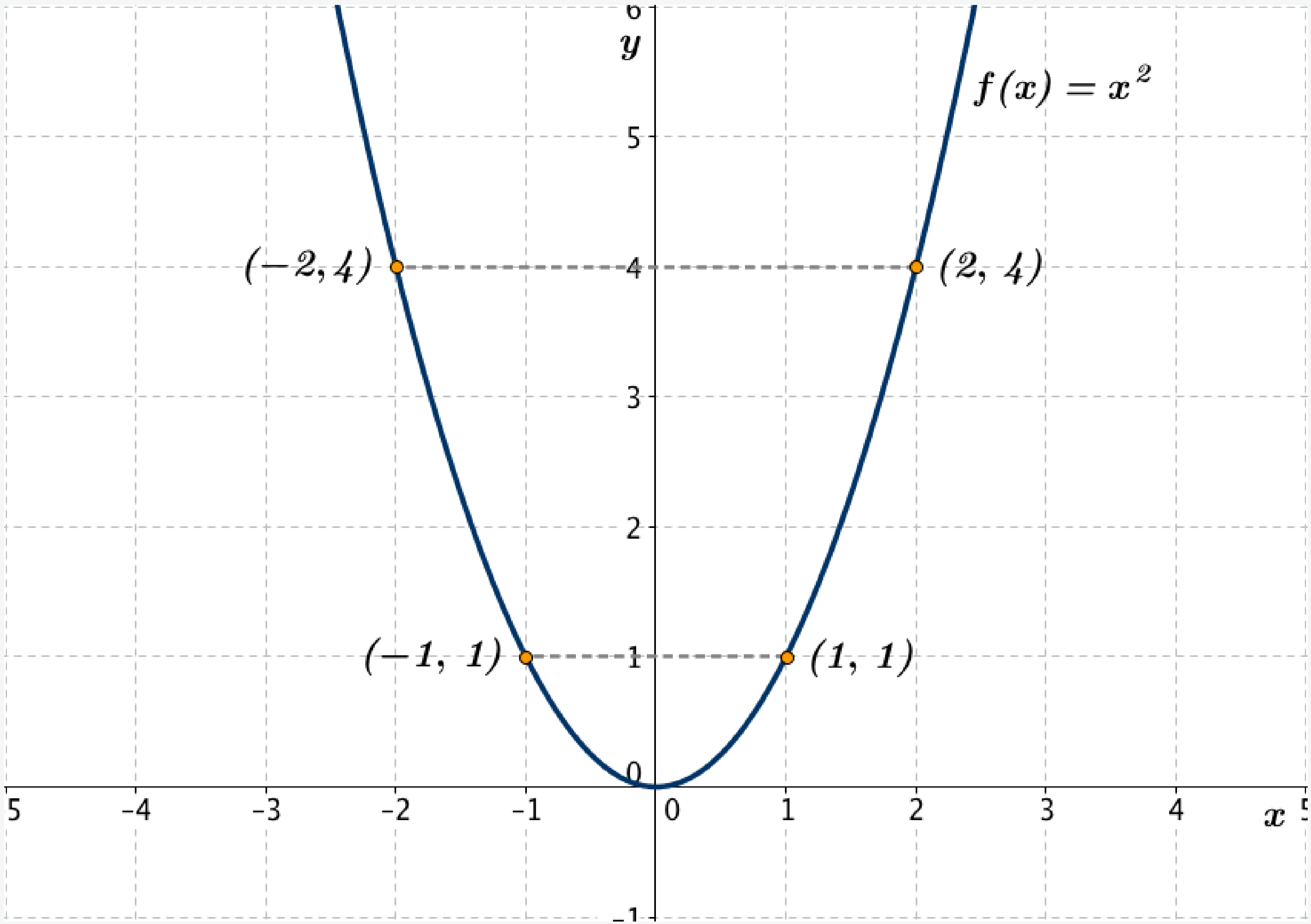


Abb. 1-2a: Die Funktion f (x) = x² ist symmetrisch relativ zur y-Achse

$b)\quad y = \dfrac{x^3}{8}$

Die Funktionskurve in Abb. 1-1*b* ist symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenursprung, d.h. es gibt auf der Kurve zu jedem Punkt *(x, y)* = (*x*, *f (x)*) einen Punkt *(-x, -y)* = *(-x, -f (x))* :

$$(x,\ f(x)) \overset{O}{\to} (-x,\ f(x)) = (-x,\ -f(x))$$

$$(2,\ 1) \overset{O}{\to} (-2,\ -1)$$

$$(3,\ 3.38) \overset{O}{\to} (-3,\ -3.38)$$

Algebraische Beschreibung der Symmetrie relativ zum Koordinatenursprung:

Im Definitionsbereich der Funktion gibt es zu jedem Wert *x* einen Wert -*x* mit :

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

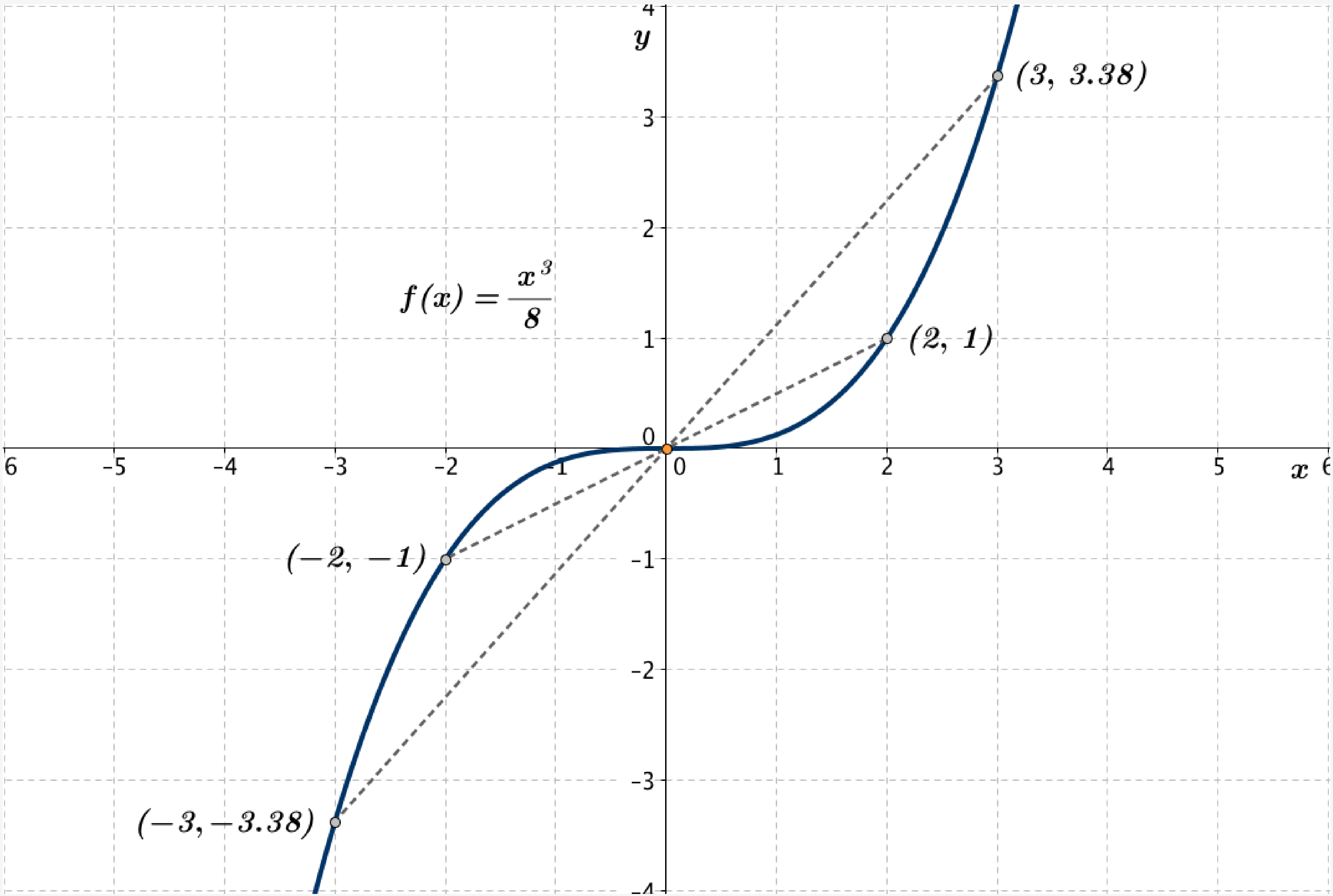


Abb. 1-2b: Die Funktion $f(x) = x^3/8$ ist symmetrisch in Bezug auf den Punkt O (0, 0)

$c)\quad x = y^2$

Die Kurve in Abb. 1-1*c* ist symmetrisch relativ zur *x*-Achse, d.h. es gibt auf der Kurve zu jedem Punkt *(x, y)* = (*x*, *f (x)*) einen Punkt *(x, -y) = (x, -f (x))* :

$$(x\,,\ f\,(x)) \overset{x}{\overbrace{\rightarrow}} (x\,, -f\,(x))$$

$$(1,\ 1) \overset{x}{\overbrace{\rightarrow}} (1, -1)$$

$$(4,\ 2) \overset{x}{\overbrace{\rightarrow}} (4, -2)$$

$x = y^2$ ist keine Funktion, sondern eine Relation. Die Symmetry relativ zur *x*-Achse bedeutet, dass ein *x*-Wert mehreren *y*-Werten entsprechen kann.

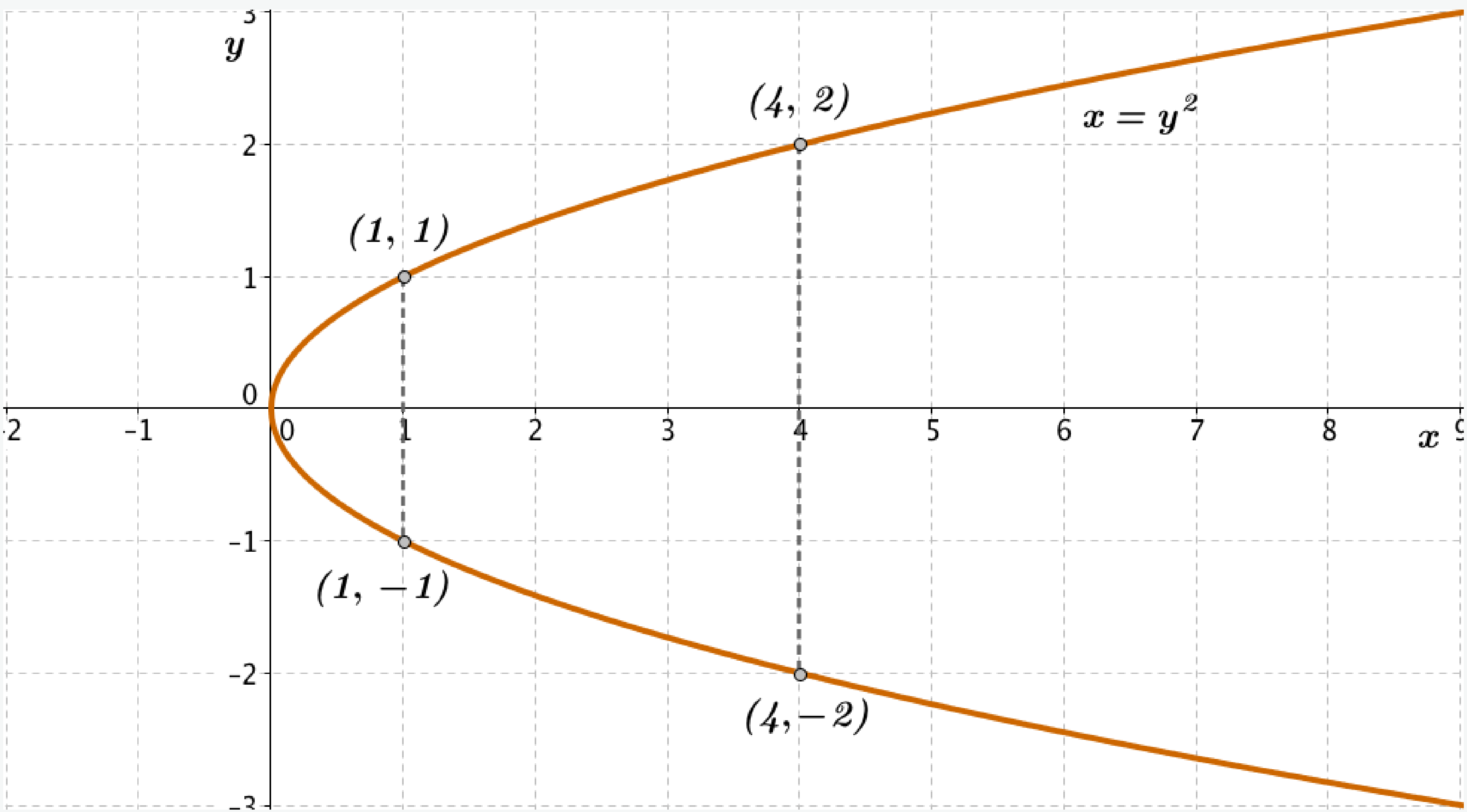


Abb. 1-2c: Die Relation $x = y^2$ ist symmetrisch relativ zur x-Achse

Definition:

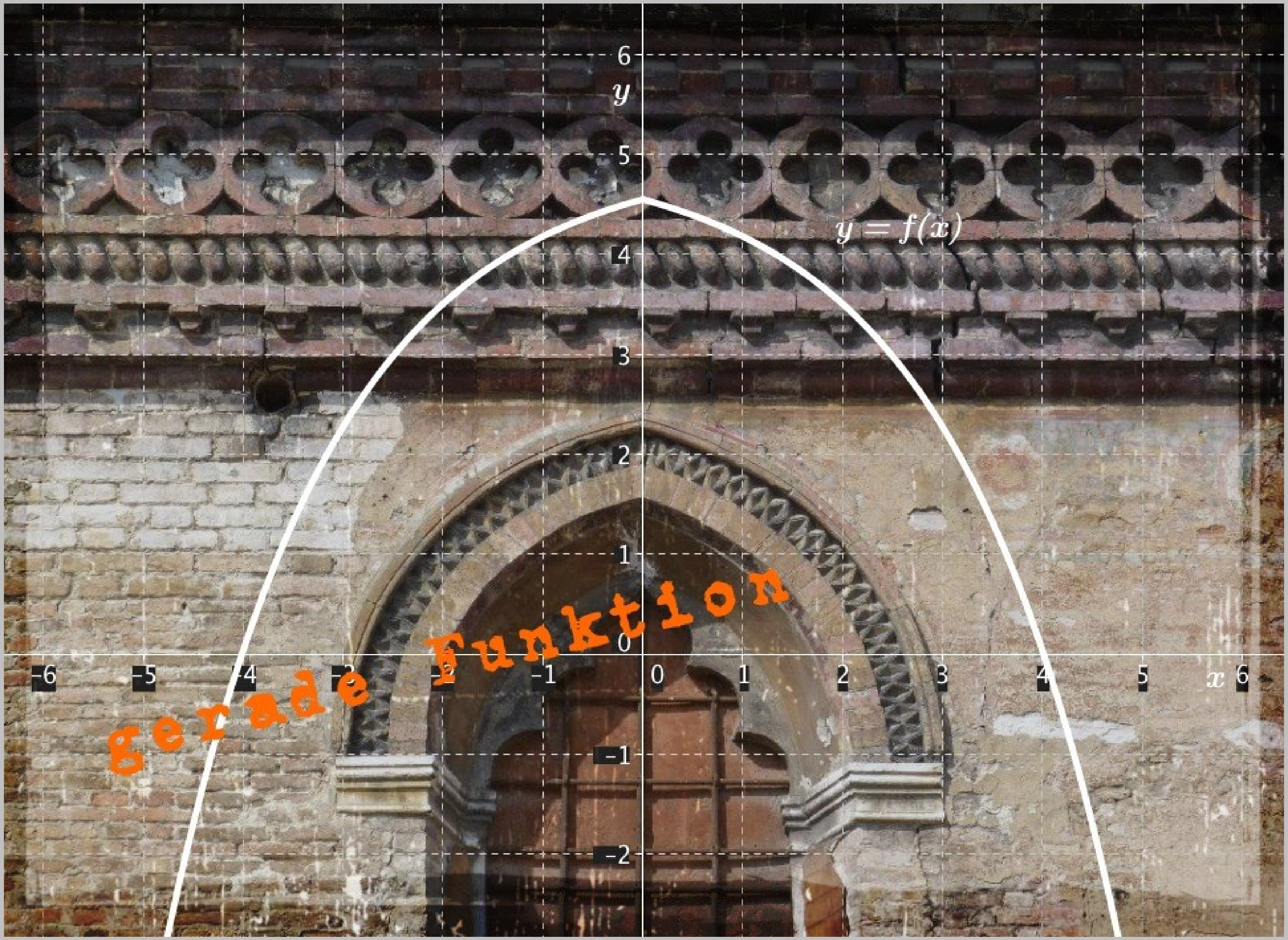
Eine Funktion $y = f(x)$ ist gerade, wenn es im Definitionsbereich zu jedem x ein $-x$ gibt mit:

$$f(-x) = f(x)$$

Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch in Bezug auf die y-Achse.

Das bedeutet:

- Die Funktionskurve ändert sich nicht bei Spiegelung an der y-Achse.
- Wenn ein Funktionsgraph einen Punkt $(x, f(x))$ enthält, dann enthält er auch den Punkt $(-x, f(x))$. Der Definitionsbereich einer geraden Funktion ist also symmetrisch zum Ursprung.


gerade Funktion
y = f(x)
y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6

Definition:

Eine Funktion $y = f(x)$ ist ungerade, wenn es im Definitionsbereich zu jedem x ein $-x$ gibt mit:

$$f(-x) = -f(x)$$

Der Graph einer ungeraden Funktion ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Das bedeutet:

- Die Funktionskurve wird durch eine Drehung um 180° um den Koordinatenursprung nicht verändert. Bei dieser Drehung geht die rechte Seite einer Kurve in die linke über und die linke in die rechte.
- Wenn ein Funktionsgraph einen Punkt $(x, f(x))$ enthält, dann enthält er auch den Punkt $(-x, -f(x))$. Der Definitionsbereich einer ungeraden Funktion ist also symmetrisch zum Ursprung.

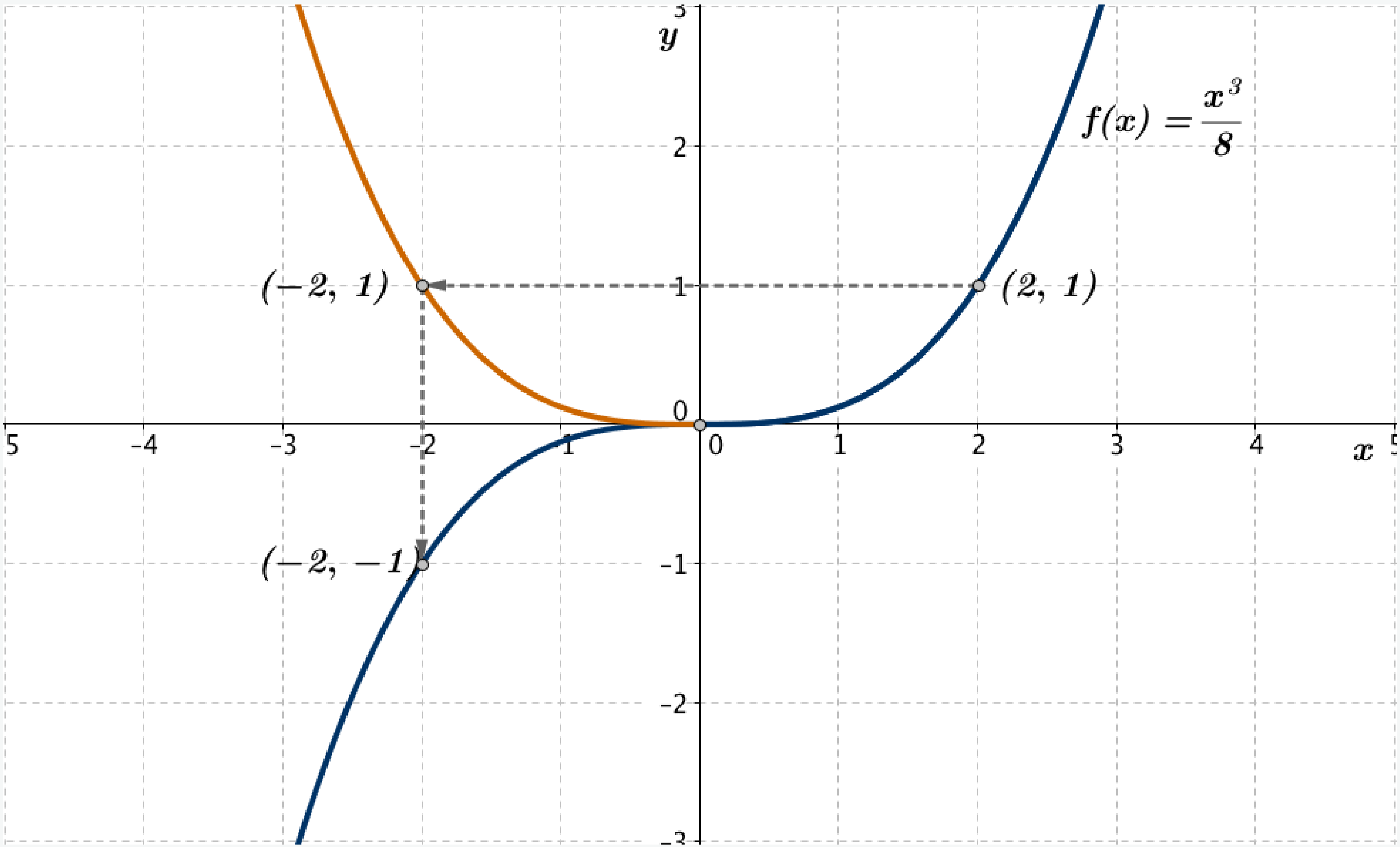
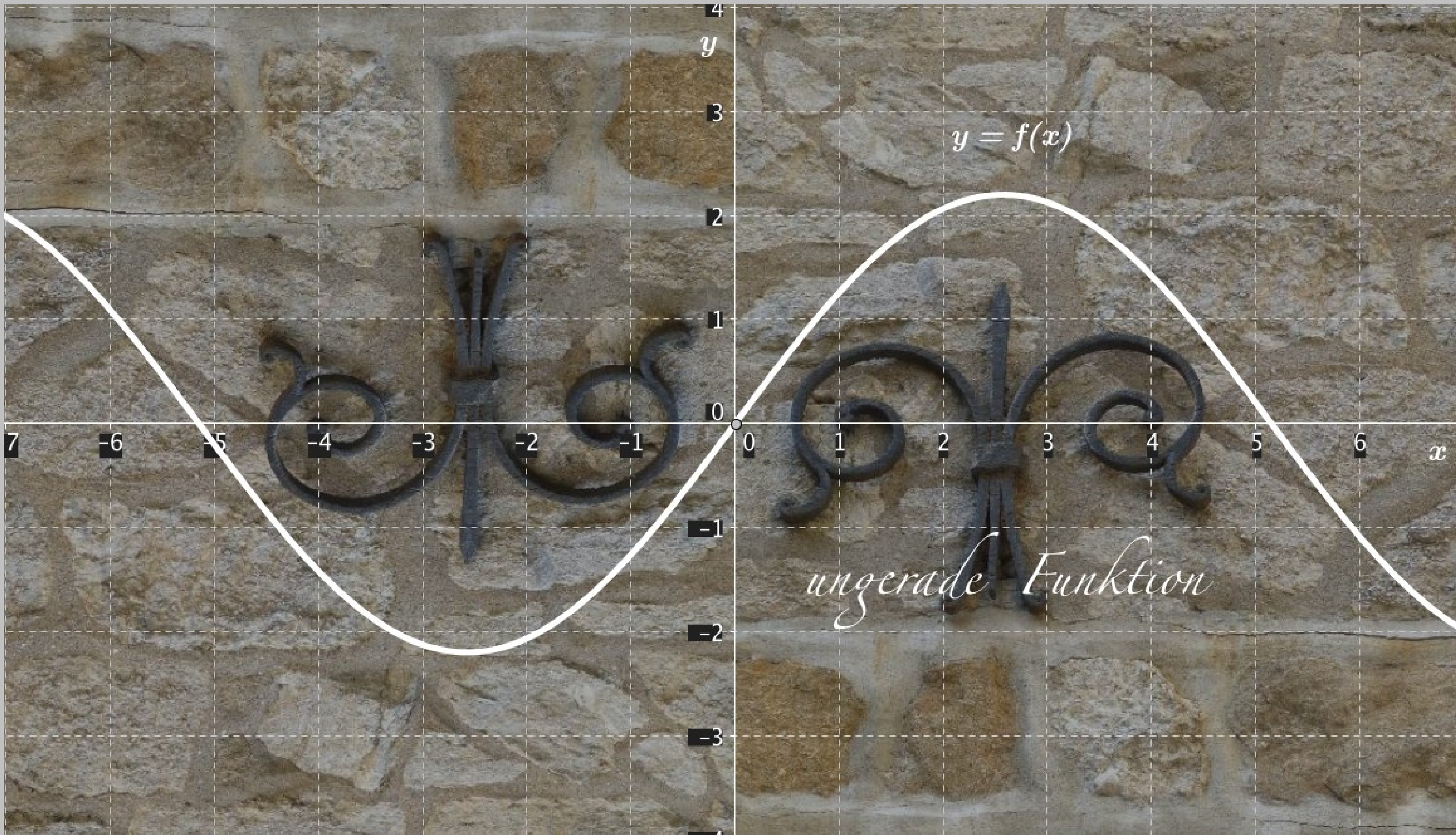


Abb. 1-3c: Darstellung des Graphen der ungeraden Funktion $y = x^3/8$ als zwei aufeinander folgende Spiegelungen.

Die linke Seite der Darstellung einer ungeraden Funktion kann man durch Spiegelung der rechten Seite an der y-Achse und eine folgende Spiegelung an der x-Achse erhalten (siehe Abb. 1-3c).



y
$y = f(x)$
x
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
ungerade Funktion

In Abbildungen $2i$ (i steht für die Buchstaben a bis l) werden Graphen dargestellt. Prüfen Sie jeweils

1) Symmetrien bezüglich der Achsen oder des Koordinatenursprungs,
2) ob der Graph eine Funktion beschreibt,
3) ob die Funktion gerade oder ungerade ist oder ob er keine Symmetrie besitzt,
4) ob der Graph eine Relation beschreibt.

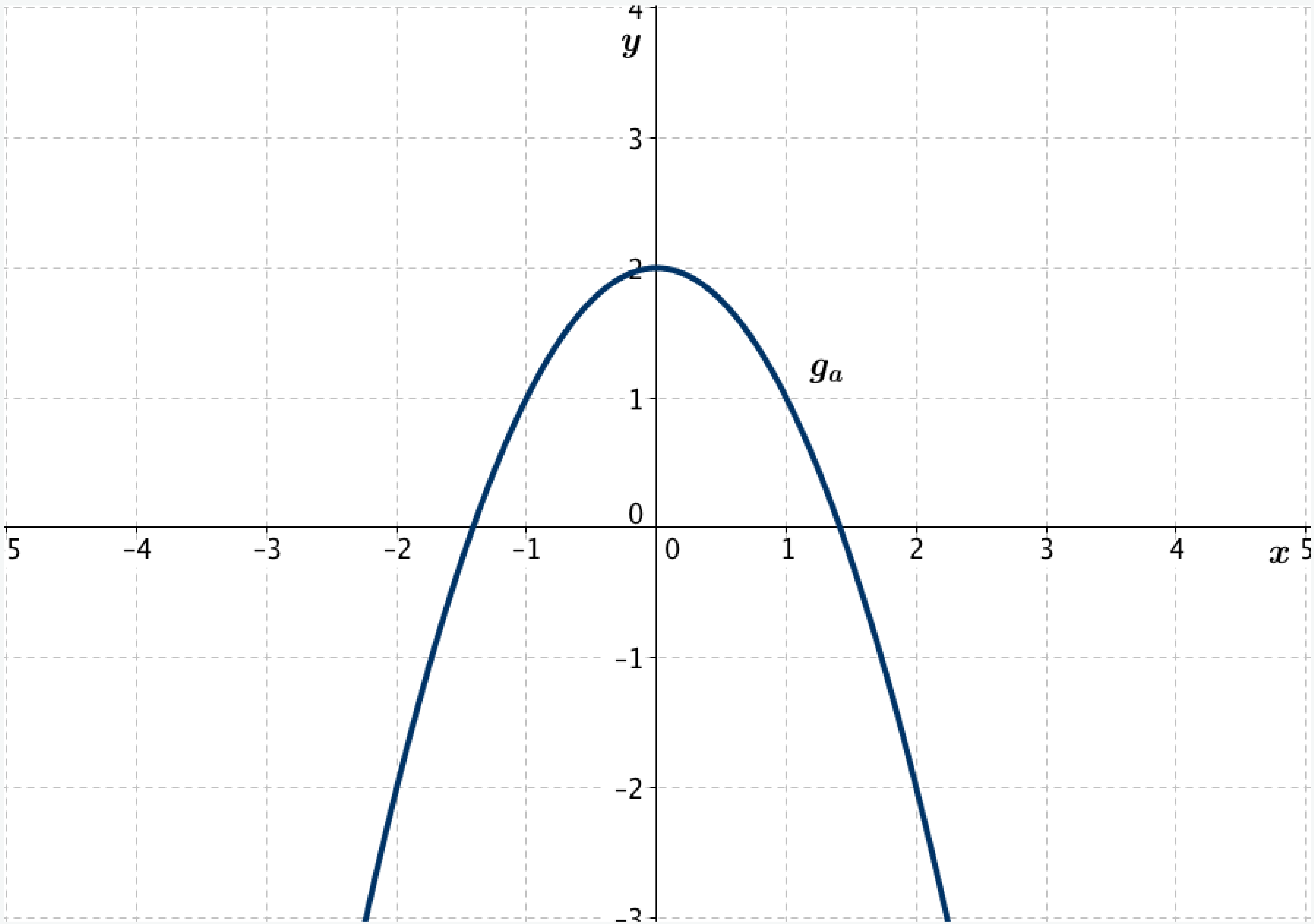


Abb. 2a: Graph a)

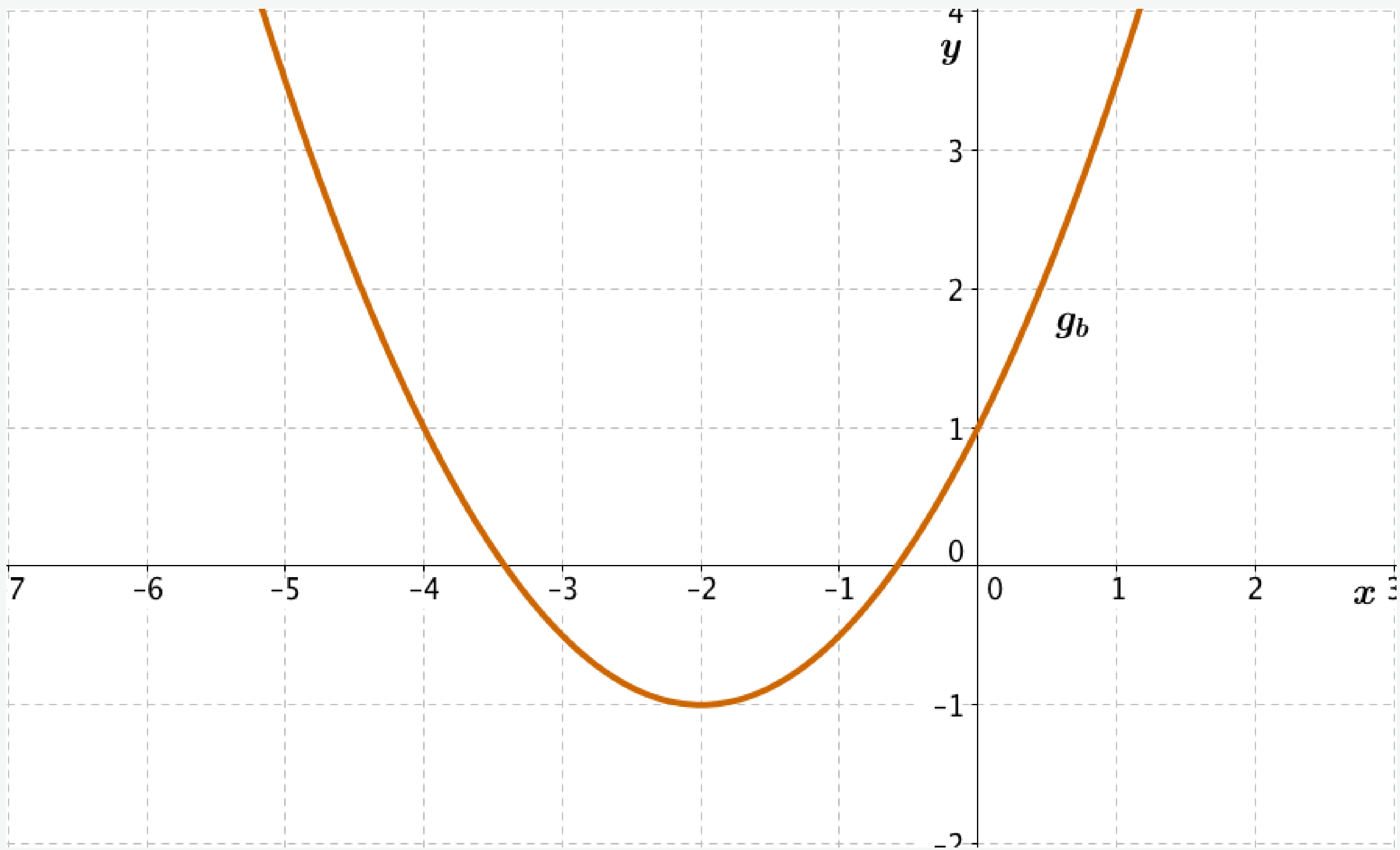


Abb. 2b: Graph b)

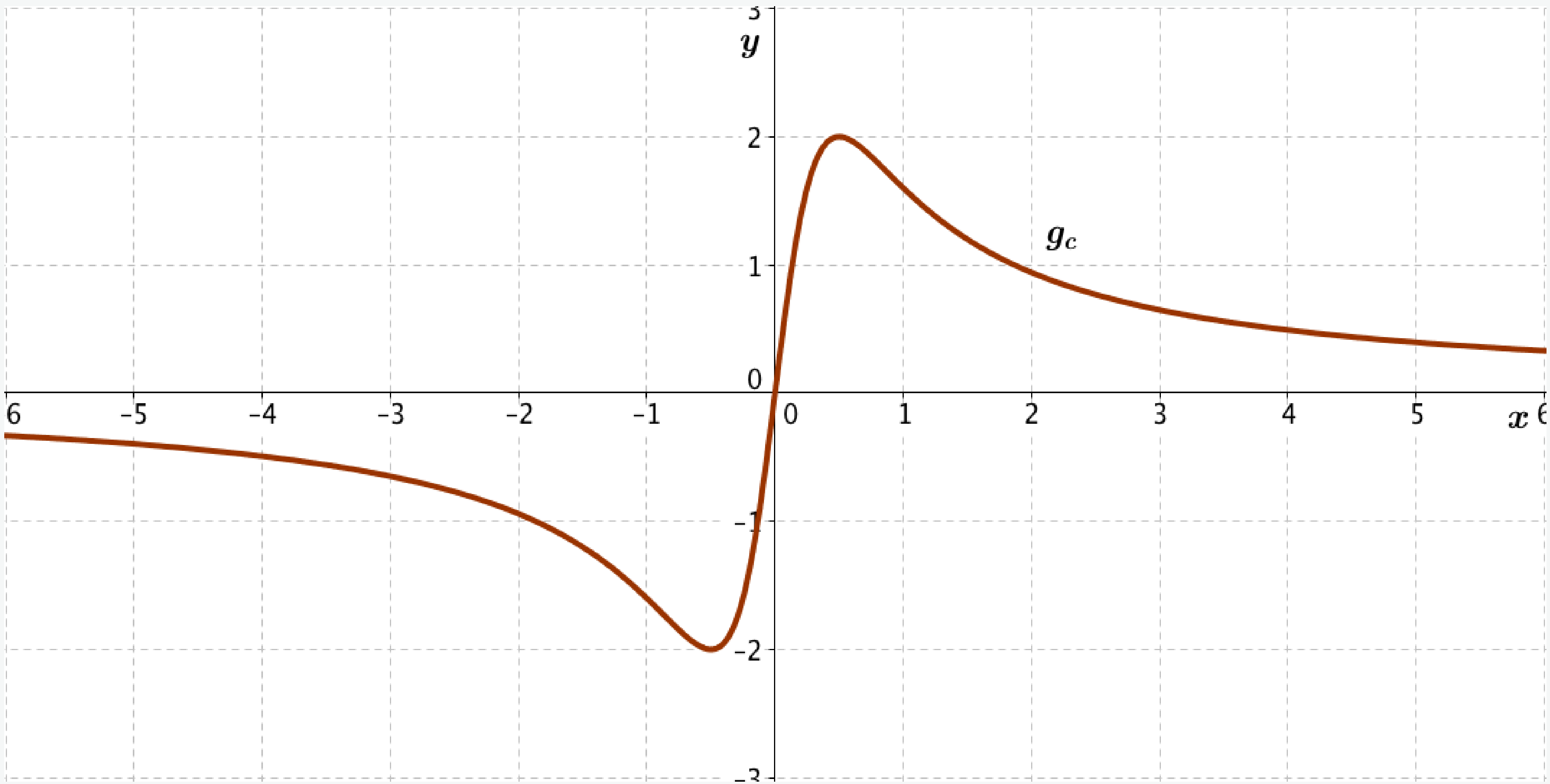


Abb. 2c: Graph c)

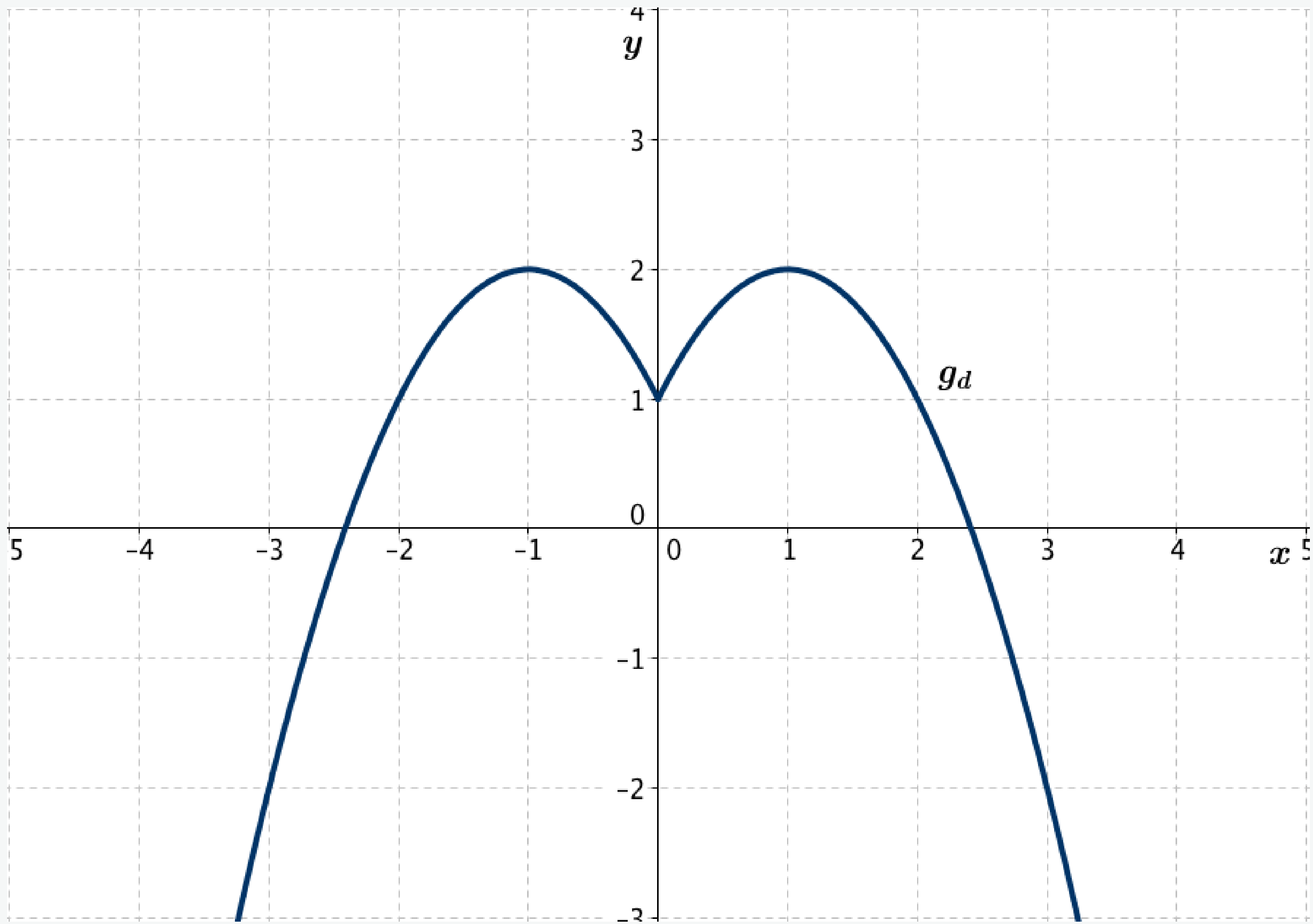


Abb. 2d: Graph d)

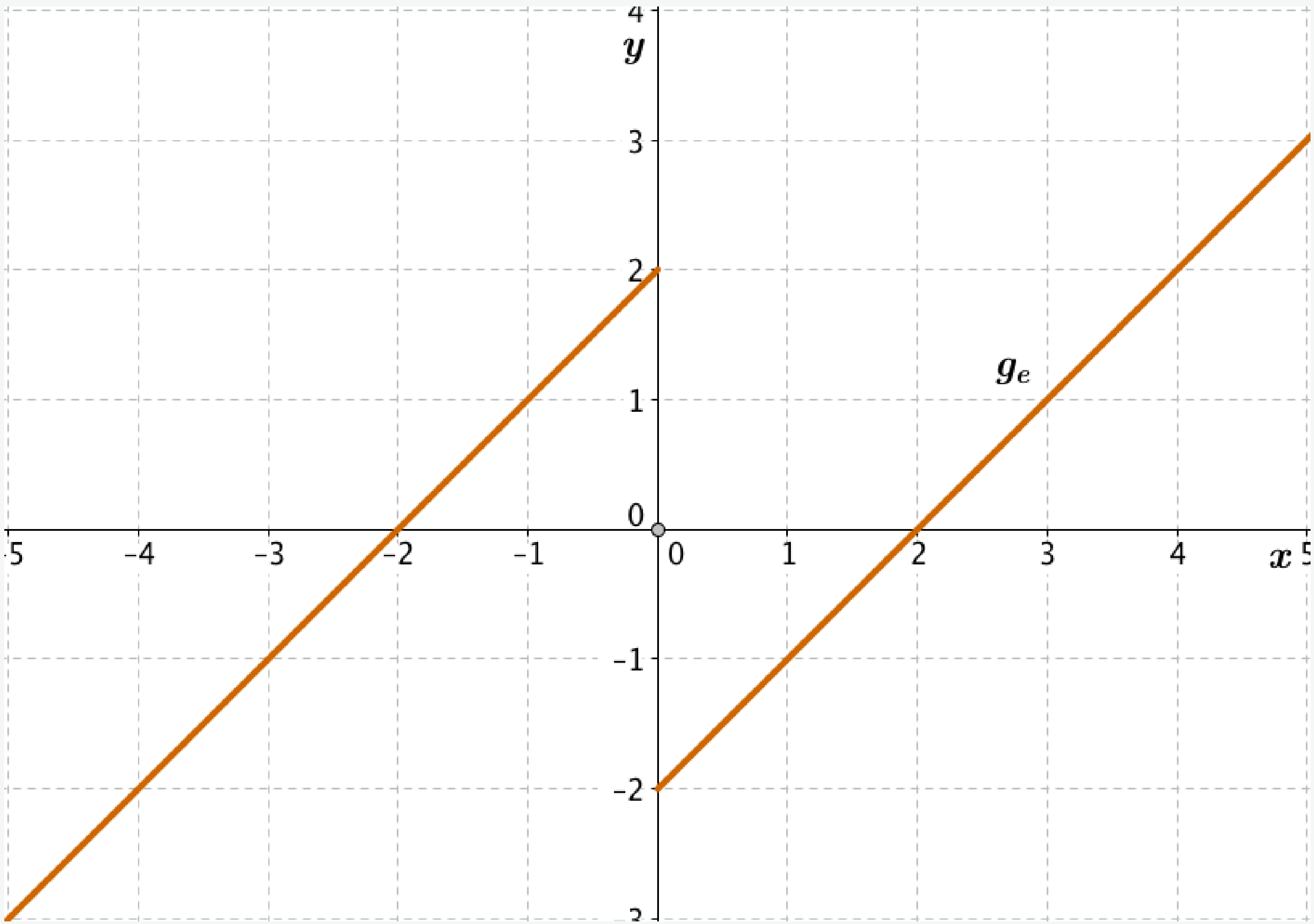


Abb. 2e: Graph e)

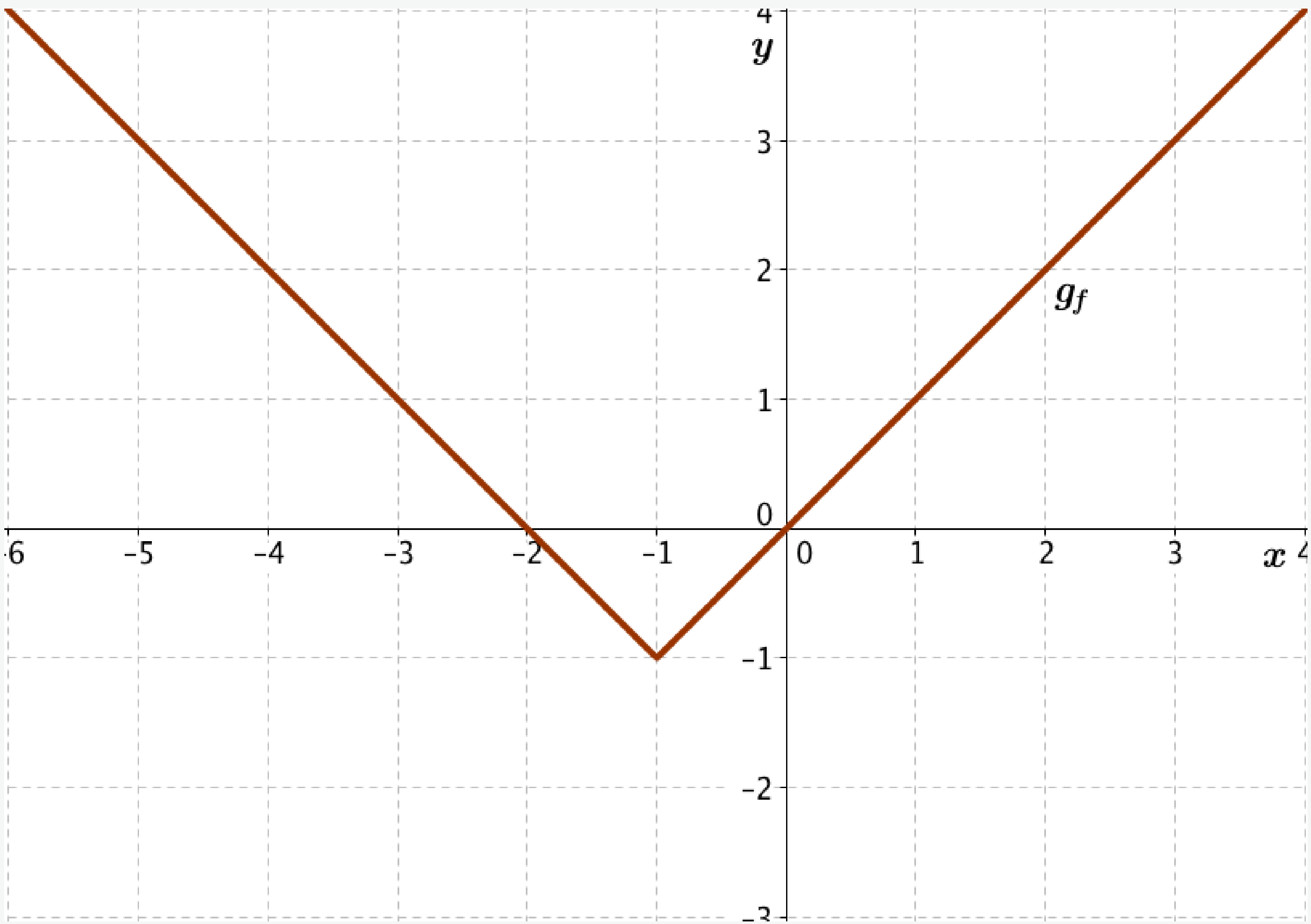


Abb. 2f: Graph f)

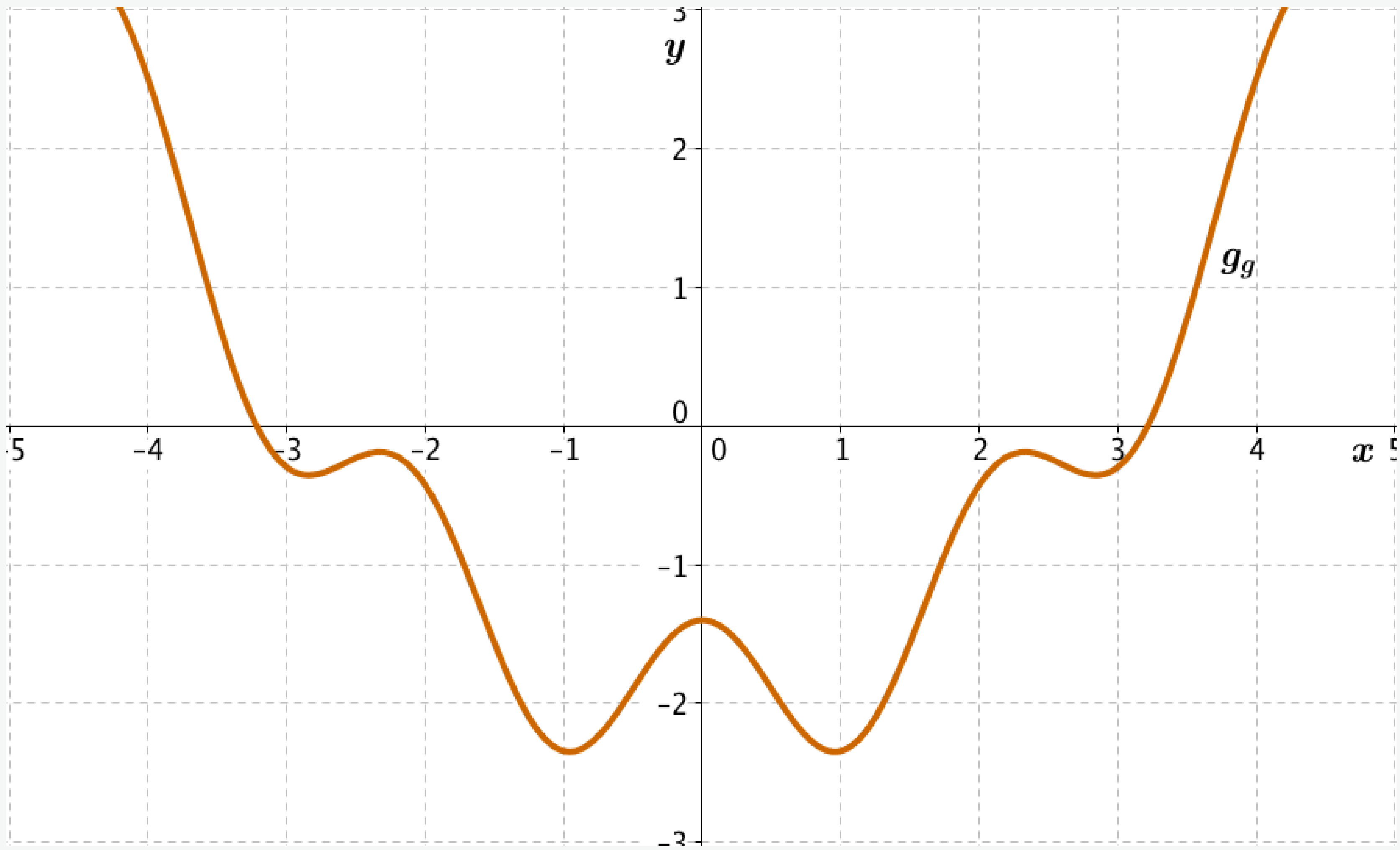


Abb. 2g: Graph g)

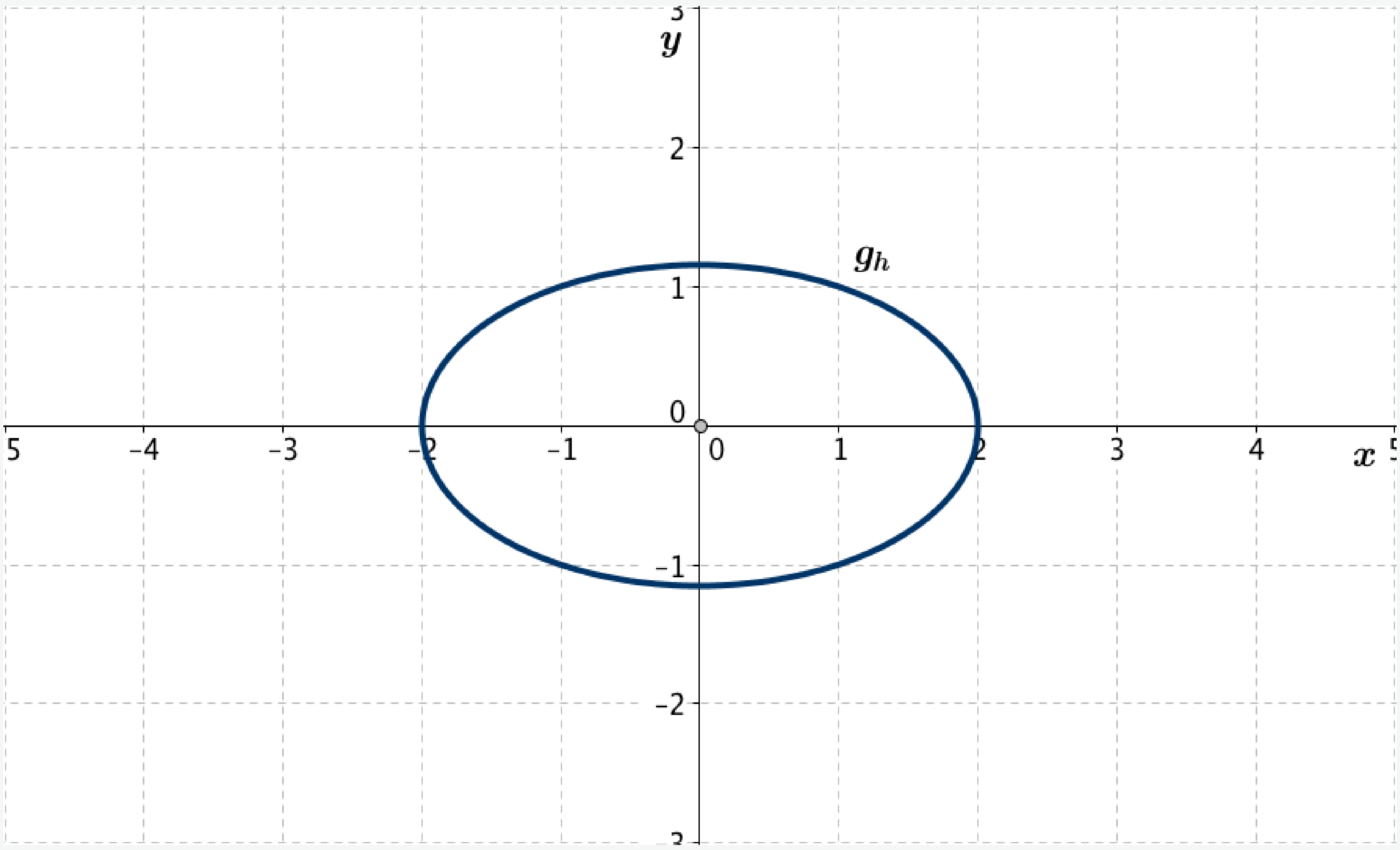


Abb. 2h: Graph h)

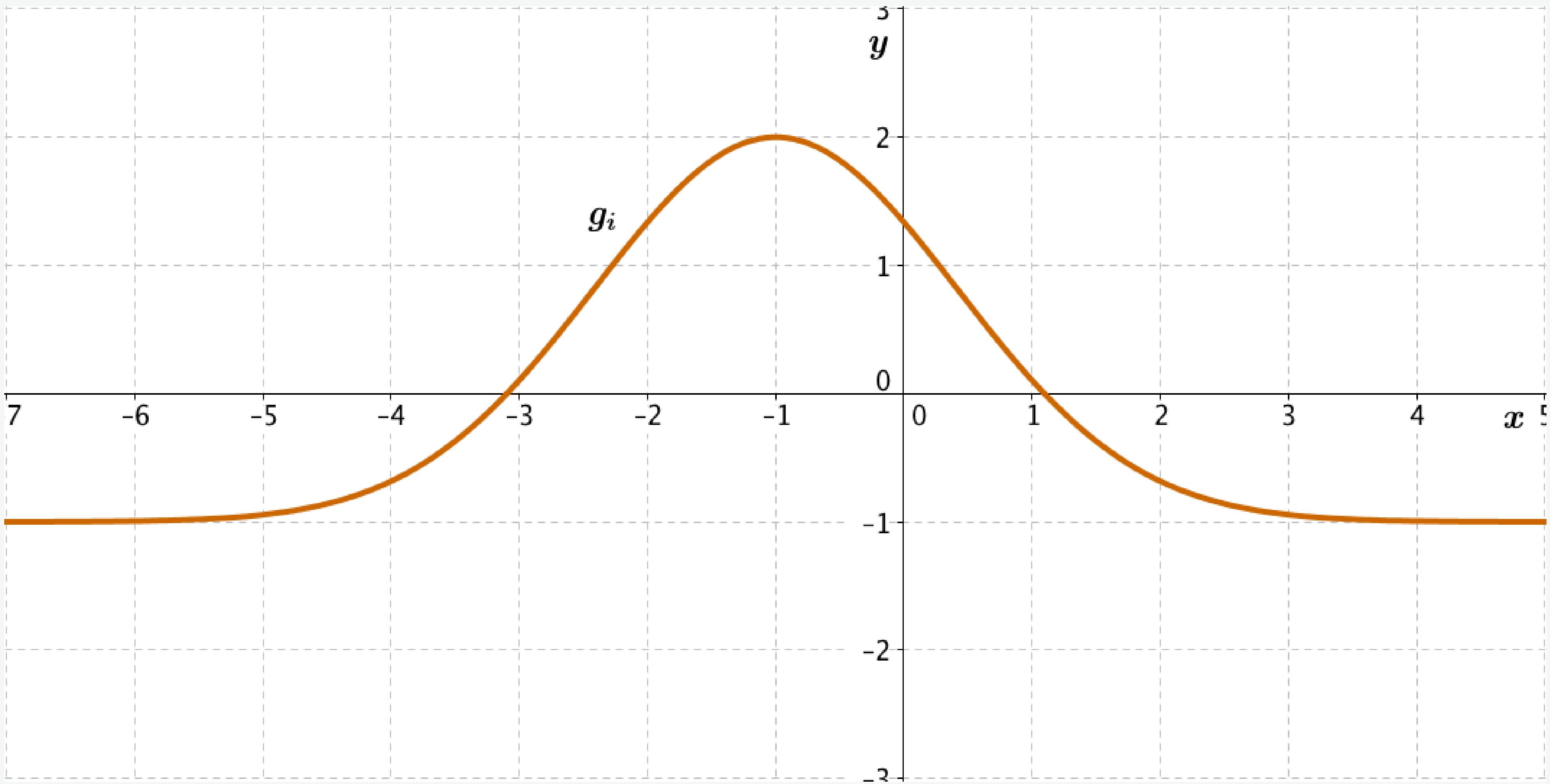


Abb. 2i: Graph i)

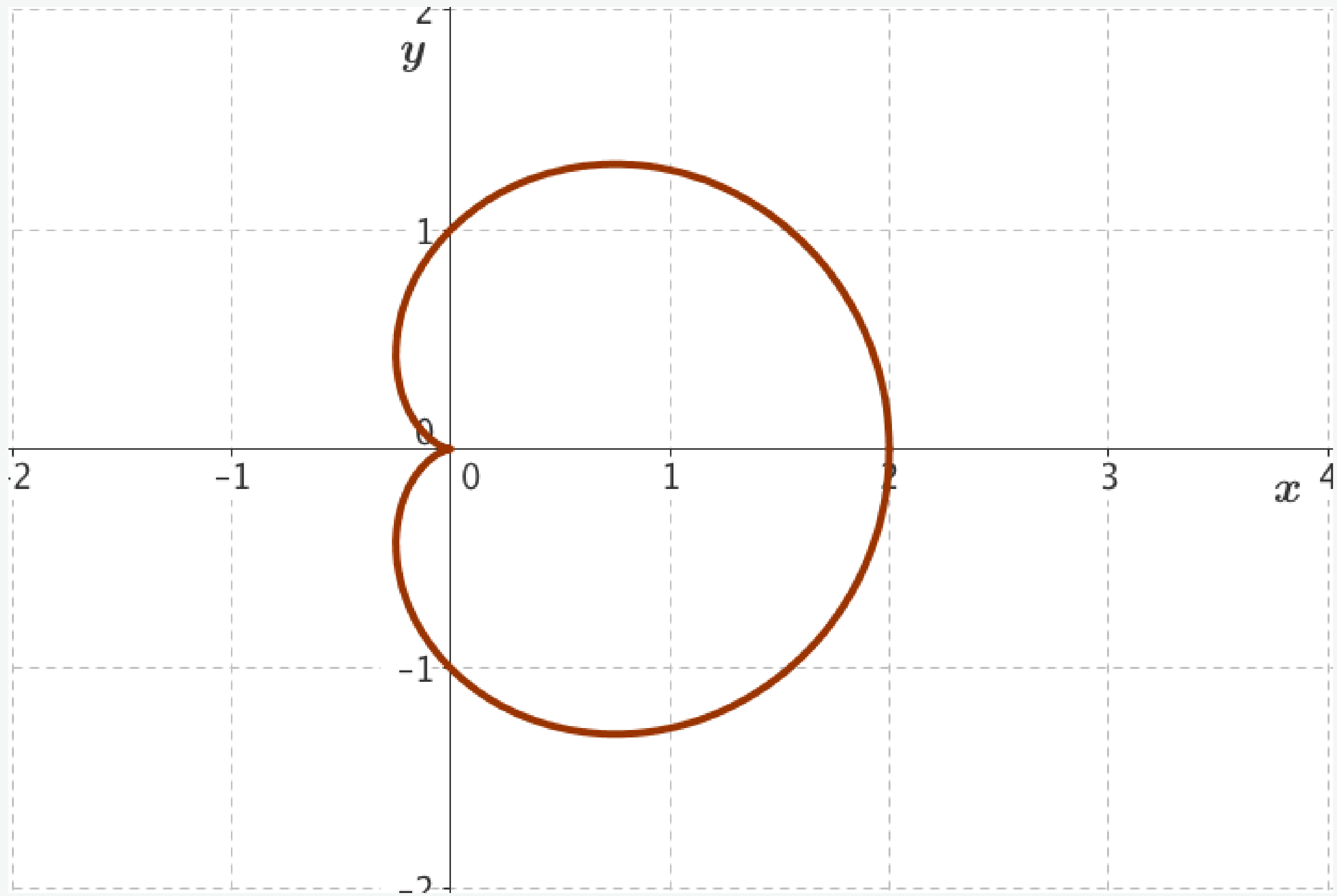


Abb. 2j: Graph j)

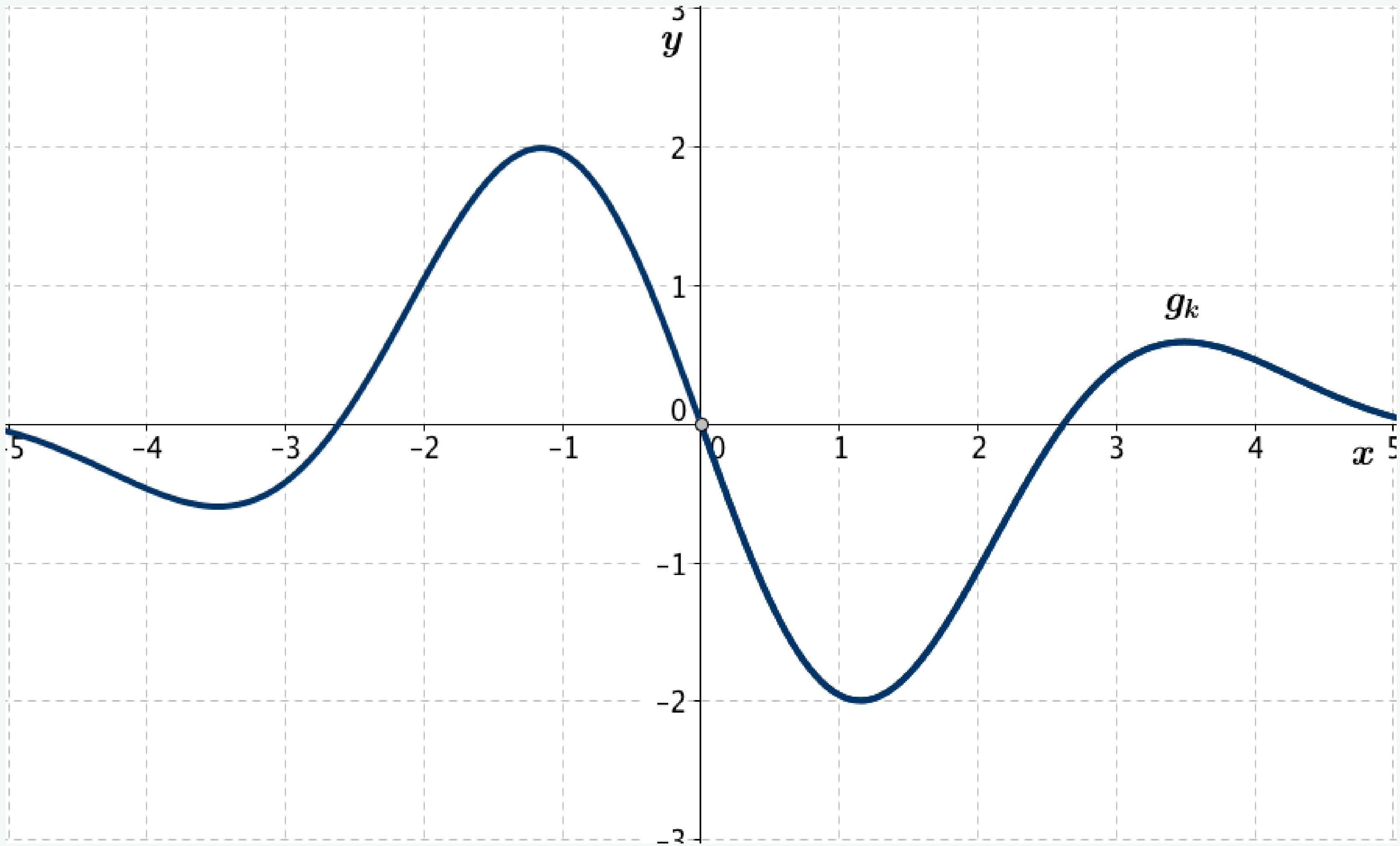


Abb. 2k: Graph k)

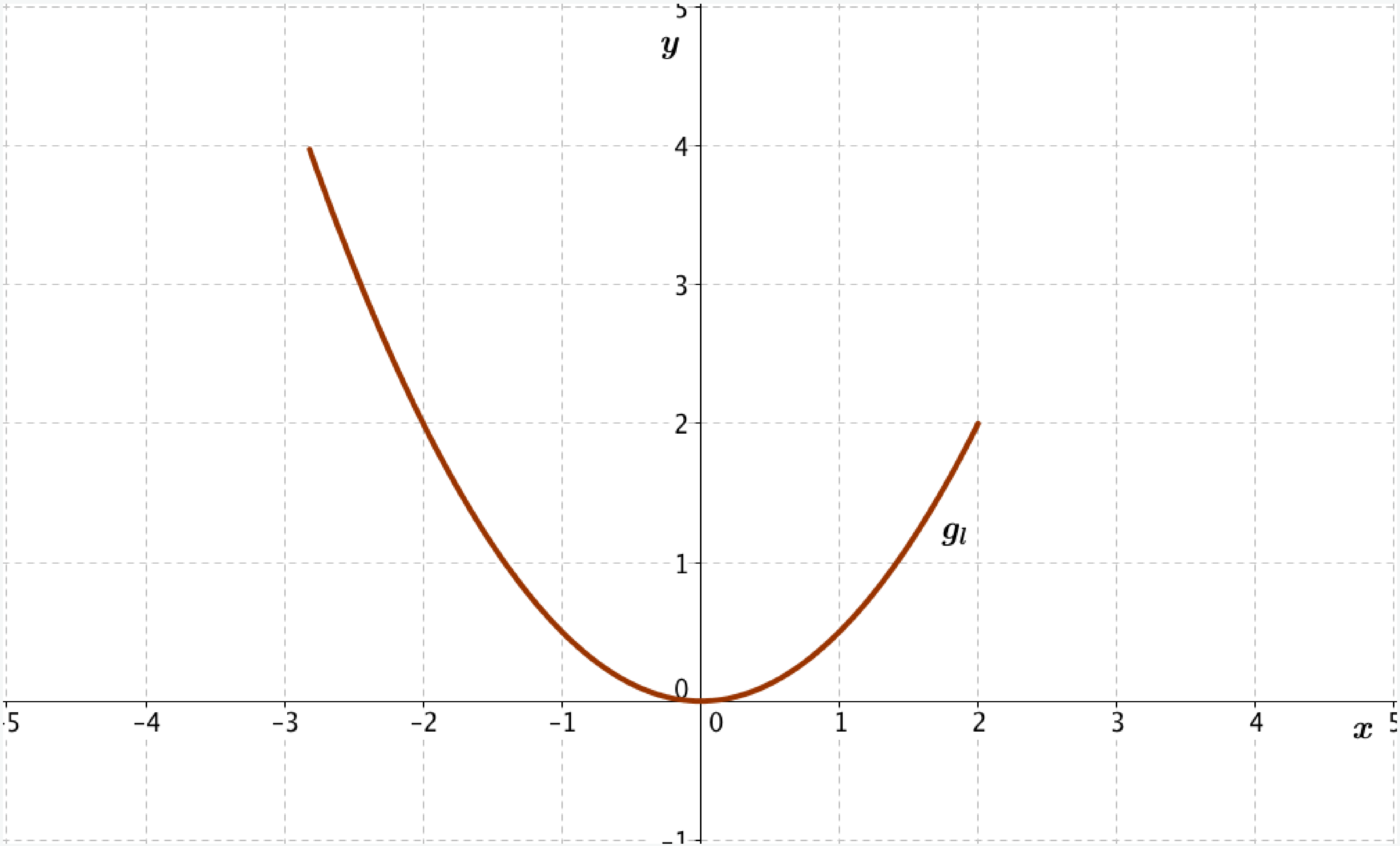


Abb. 2l: Graph l)

- Die Graphen *h*) und *j*) sind symmetrisch bezüglich der *x*-Achse.
- Die Graphen *a*), *d*), *g*) und *h*) sind symmetrisch bezüglich der *y*-Achse.
- Die Graphen *c*), *e*), *h*) und *k*) sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprung.
- Die Graphen *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*) *g*), *i*), *k*) und *l*) beschreiben Funktionen.

  Das kann man mit Hilfe eines Senkrechtentests nachweisen (siehe Abb. 3-2 und 3-5 für die Graphen *f*) und *h*), wobei *h*) keine Funktion beschreibt).
- Die Funktionen *a*), *d*) und *g*) sind gerade (siehe Abb. 3-3).
- Die Funktionen *c*), *e*) und *k*) sind ungerade (siehe Abb. 3-4).
- Die Graphen *h*) und *j*) stellen Relationen dar.

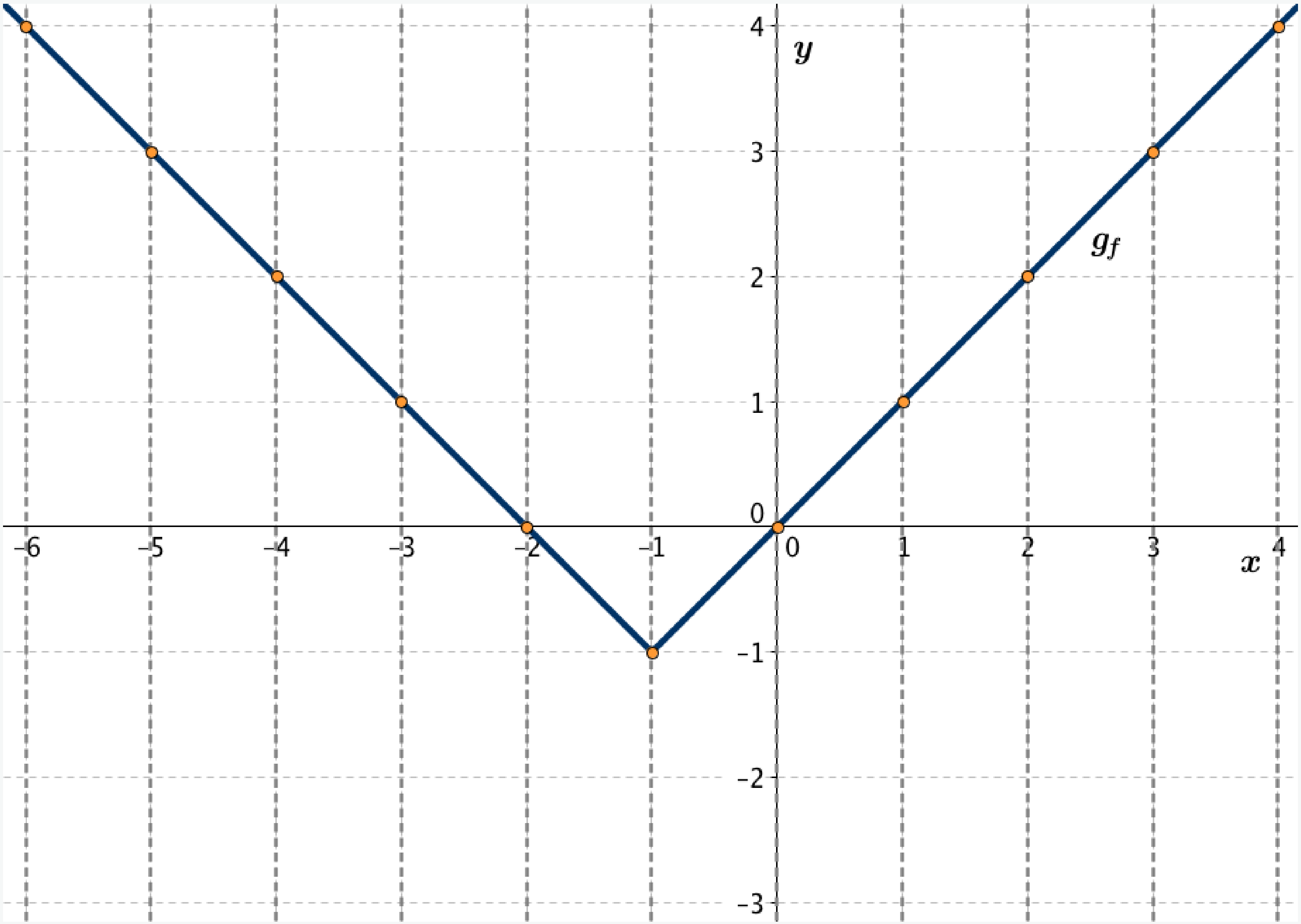


Abb. 3-2: Senkrechtentest als visuelle Prüfung, ob ein Graph eine Funktion oder eine Relation beschreibt

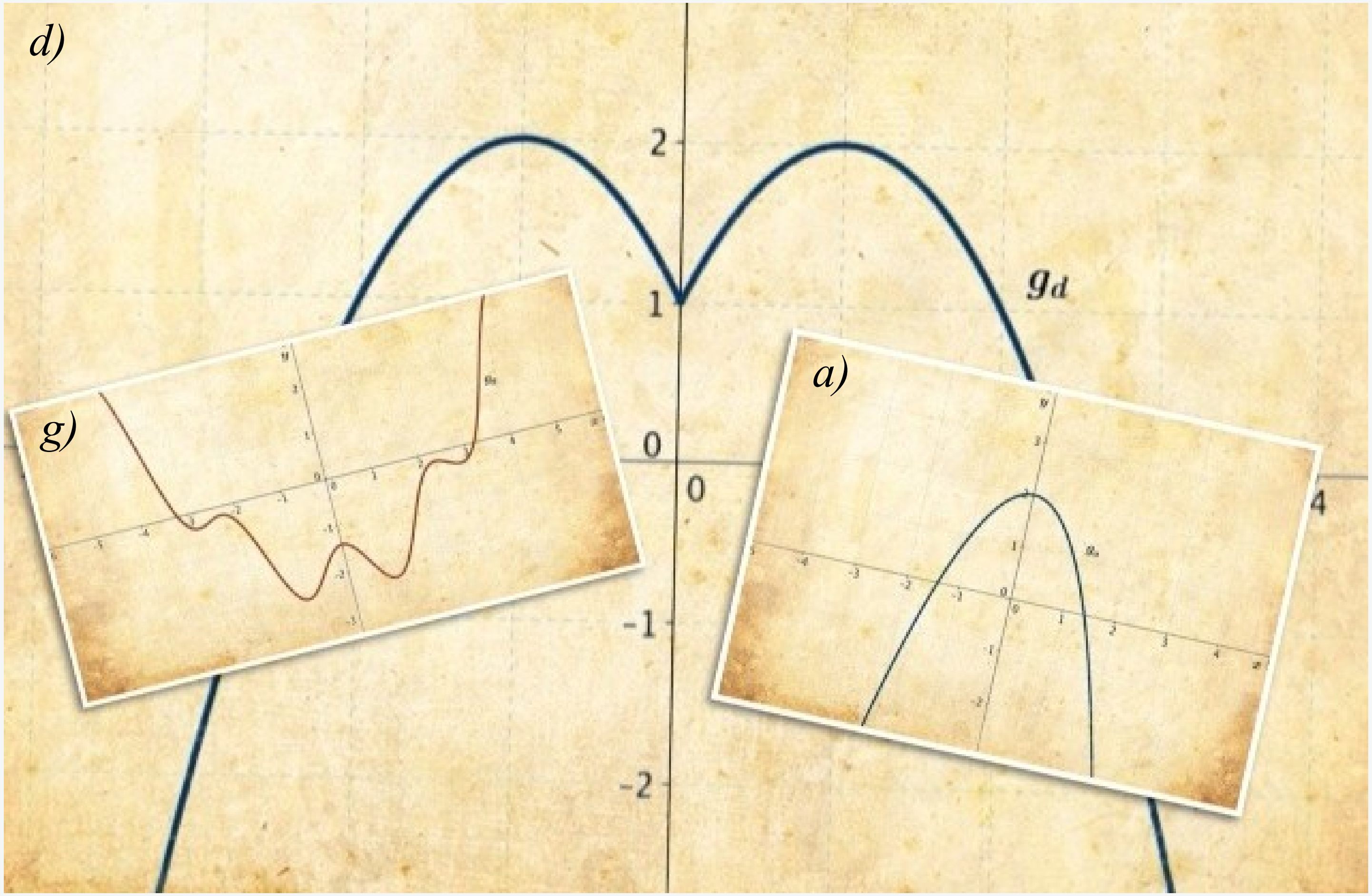


Abb. 3-3: Die gerade Funktionen a), d) und g)

Die Graphen *a*), *d*) und *g*) beschreiben Funktionen, sie sind symmetrisch bezüglich der *y*-Achse und gerade.

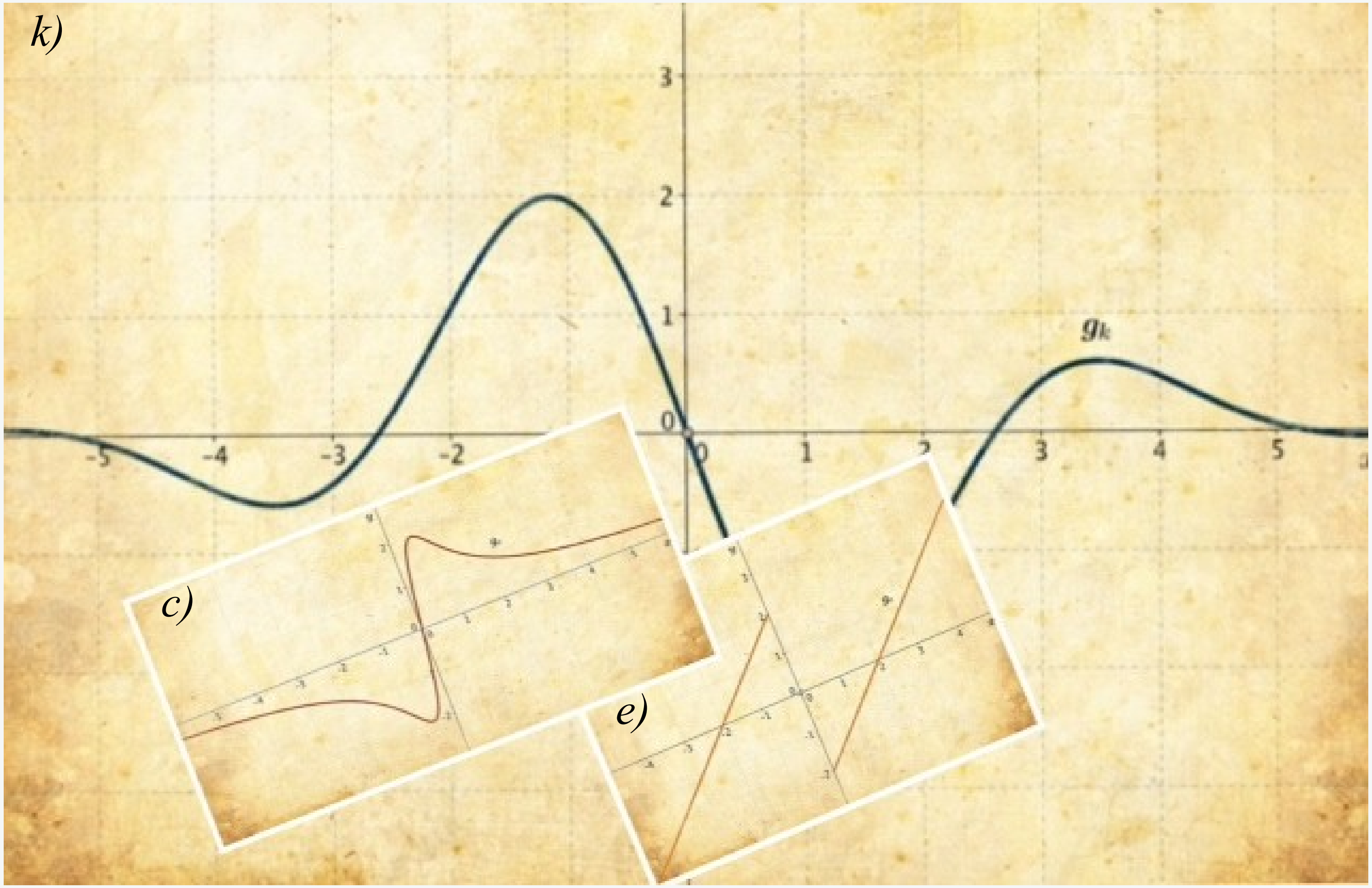


Abb. 3-4: Die ungerade Funktionen c), e) und k)

Die Graphen c), e) und k) beschreiben Funktionen, sie sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs und ungerade.

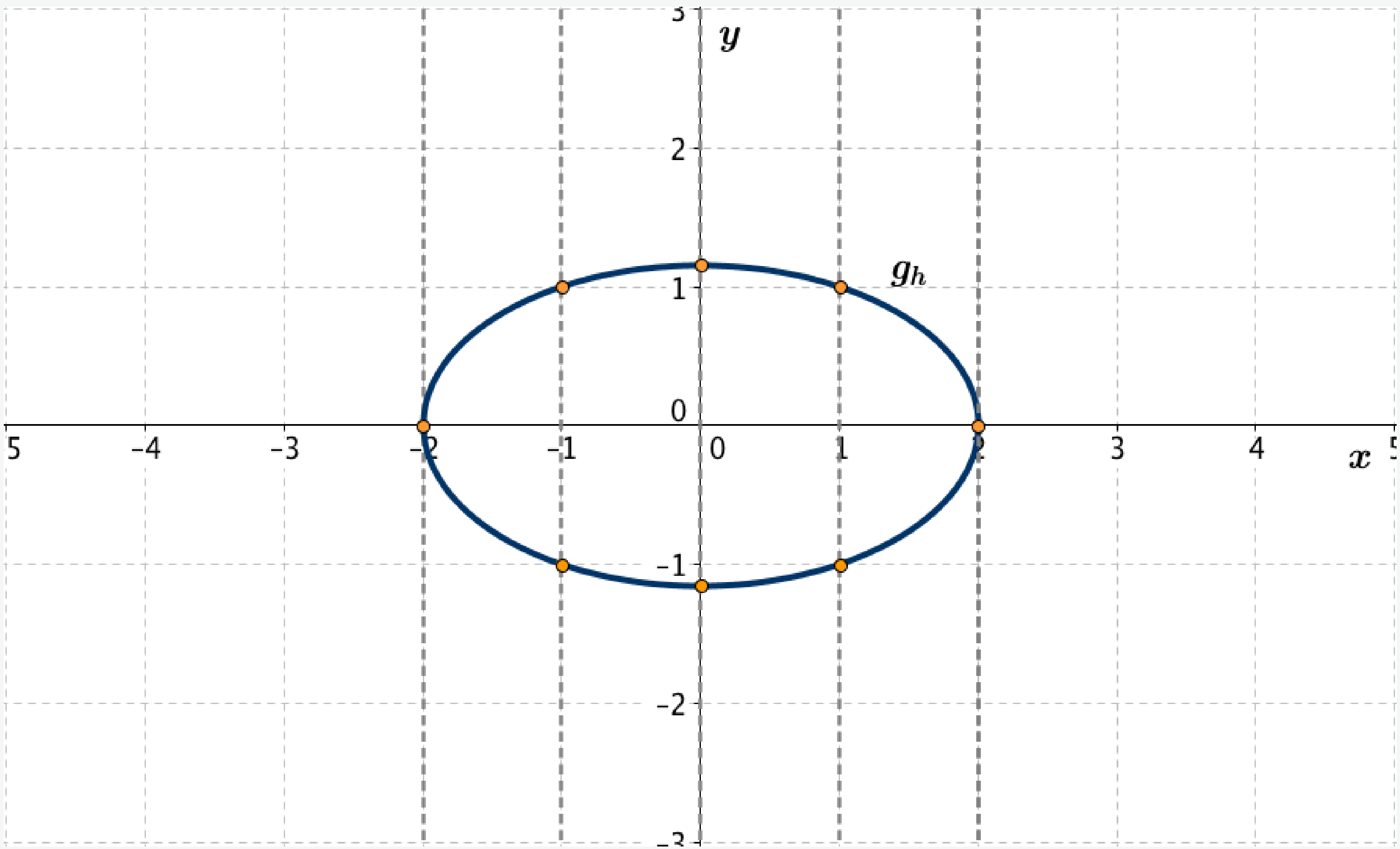
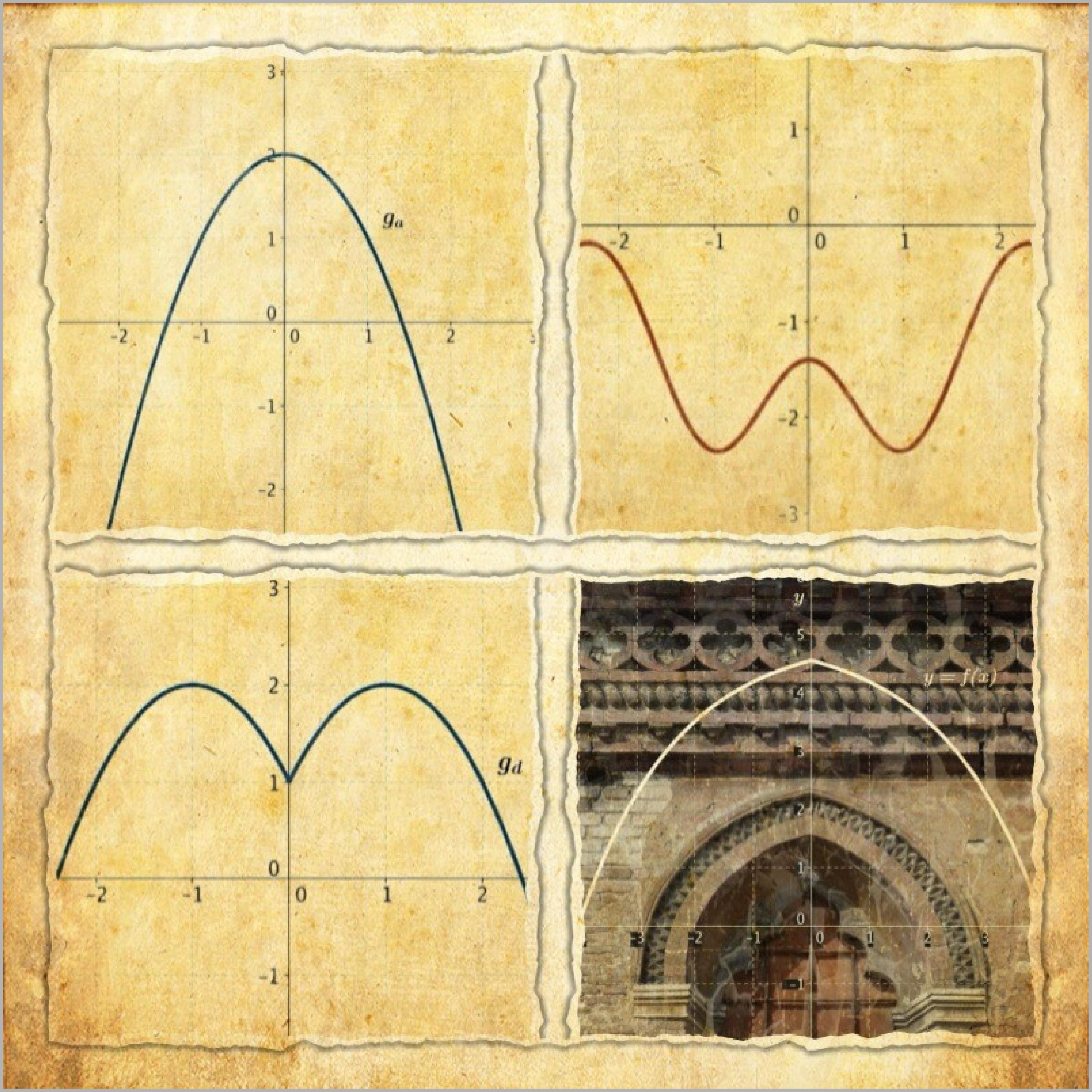
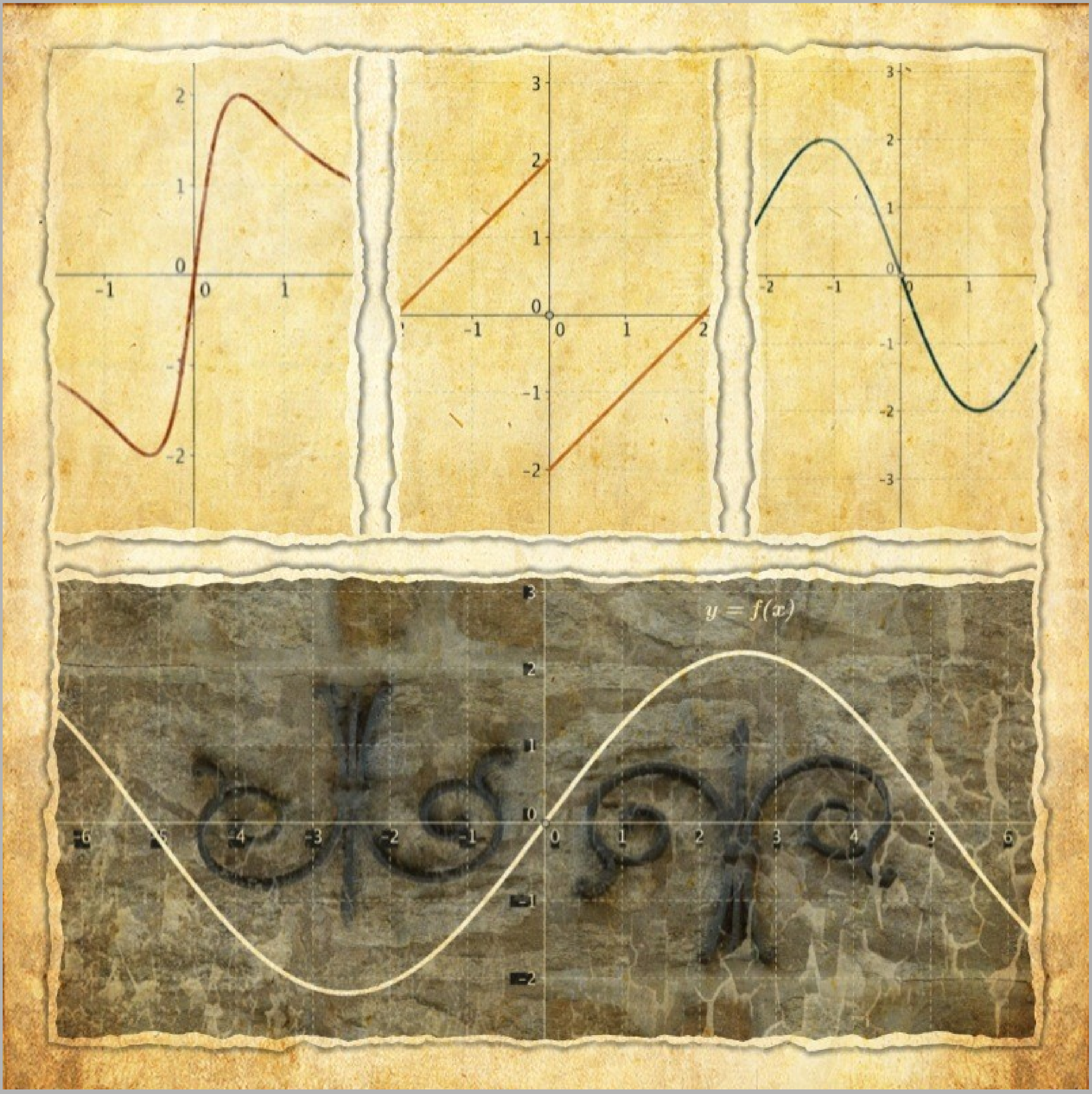


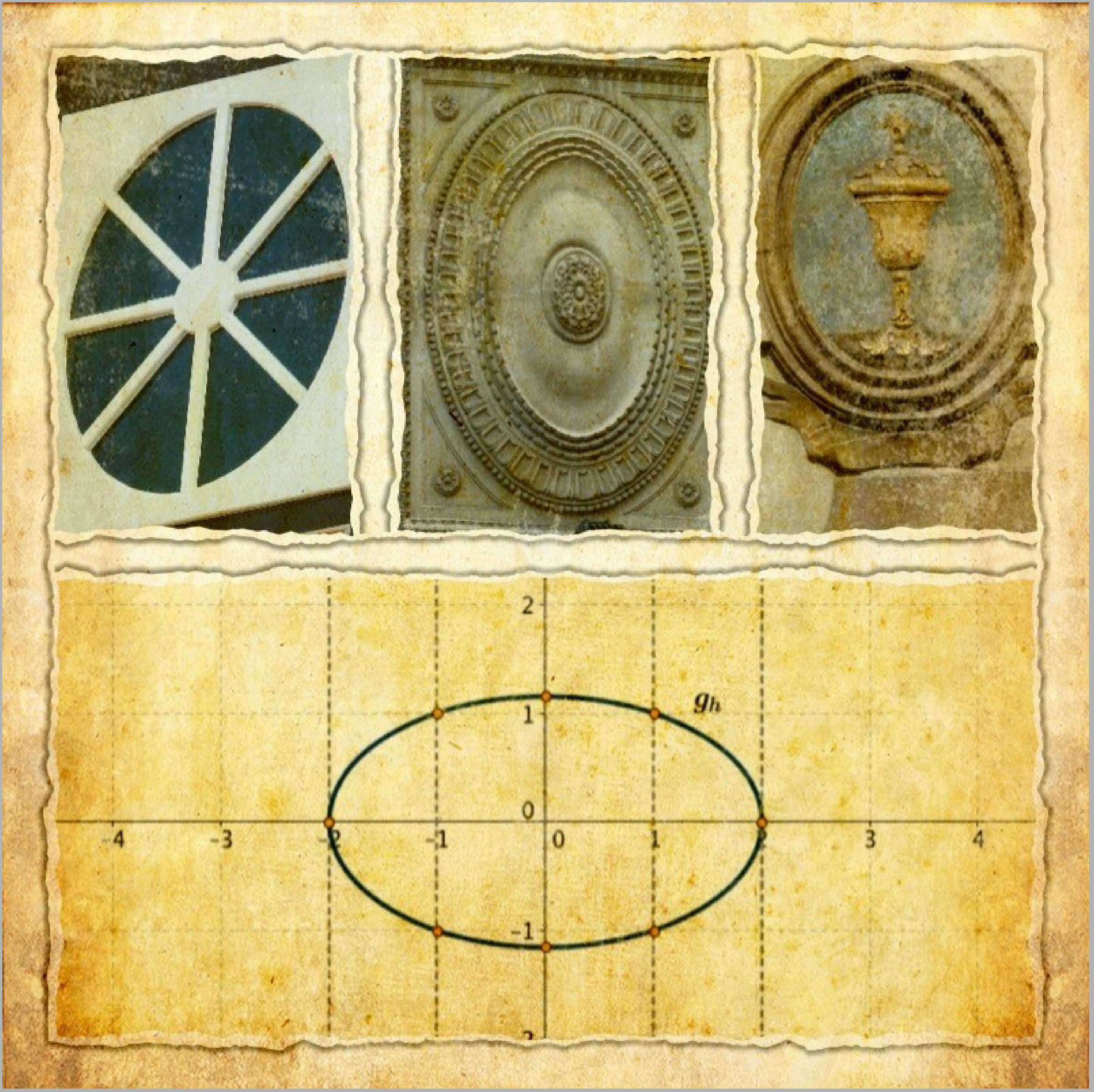
Abb. 3-5: Senkrechtentest als visuelle Prüfung, ob ein Graph eine Funktion oder eine Relation beschreibt



2-6a



$y = f(x)$



2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
g_h