Gerade, ungerade oder weder noch? Algebraische und graphische Beweise

Prüfen Sie, ob die Funktionen gerade, ungerade oder keines von beiden sind:

$a)\quad f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \cos^2 x, \qquad h(x) = \cos^3 x$

$b)\quad f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin^2 x, \qquad h(x) = \sin^3 x$

$c)\quad f(x) = \cos x + \sin x, \qquad g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$d)\quad f(x) = |\cos x|, \qquad g(x) = |\sin x|$

$e)\quad f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$

$f)\quad f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x)$

$g)\quad f(x) = 3^{\cos x}, \qquad g(x) = 3^{\sin x}$

$h)\quad f(x) = \dfrac{1}{1.2 + \cos x}, \qquad g(x) = \dfrac{1 + \cos x}{1 + \sin^2 x}, \qquad h(x) = \dfrac{\sin x}{1/2 + \cos^2 x}$

Unter welcher Bedingung sind solche Funktionen gerade, ungerade oder weder noch?

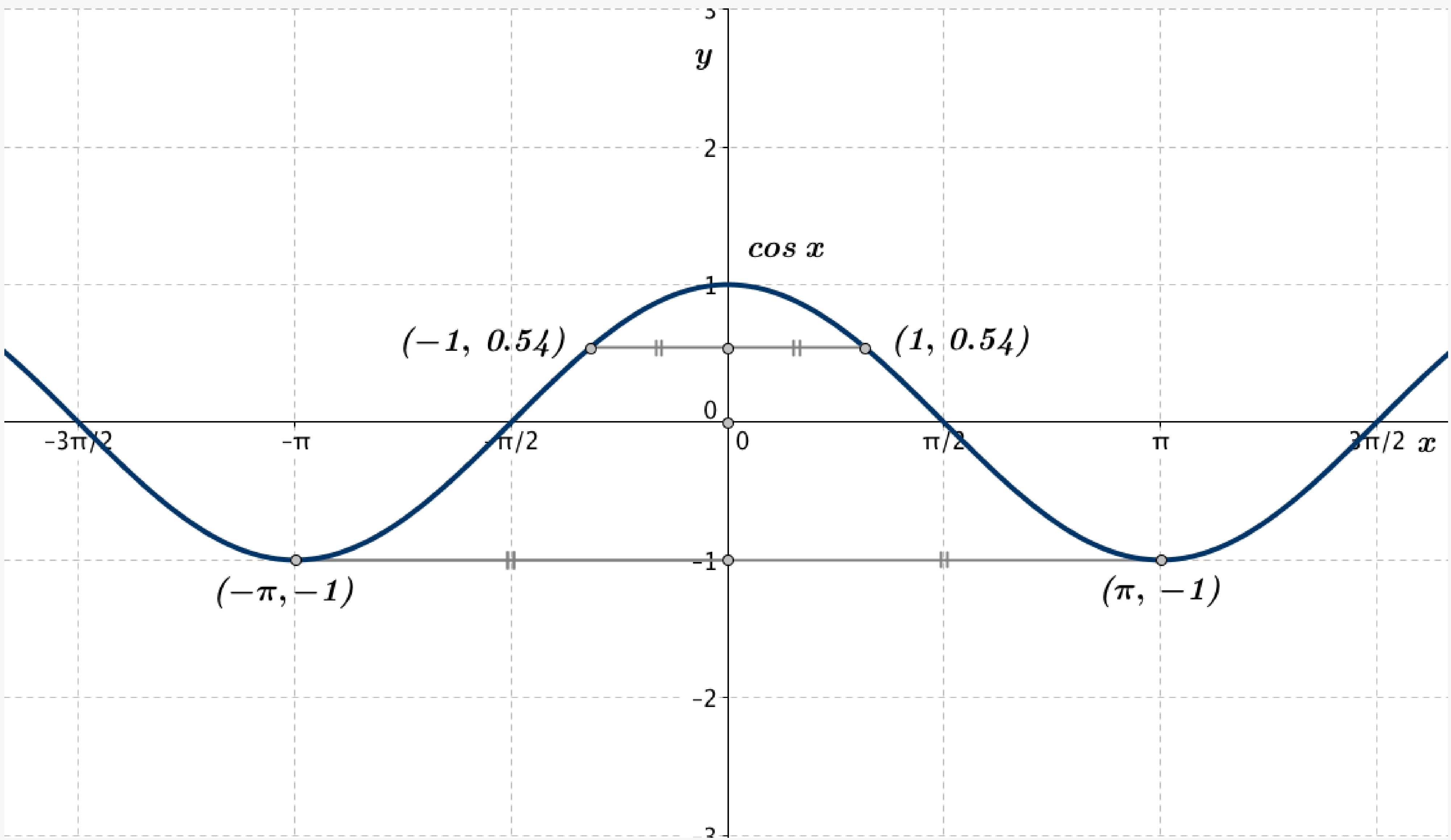

Abb. L8a-1: Die Funktion f (x) = cos x ist gerade, f (-x) = f(x)

$$\cos(-x) = \cos x$$

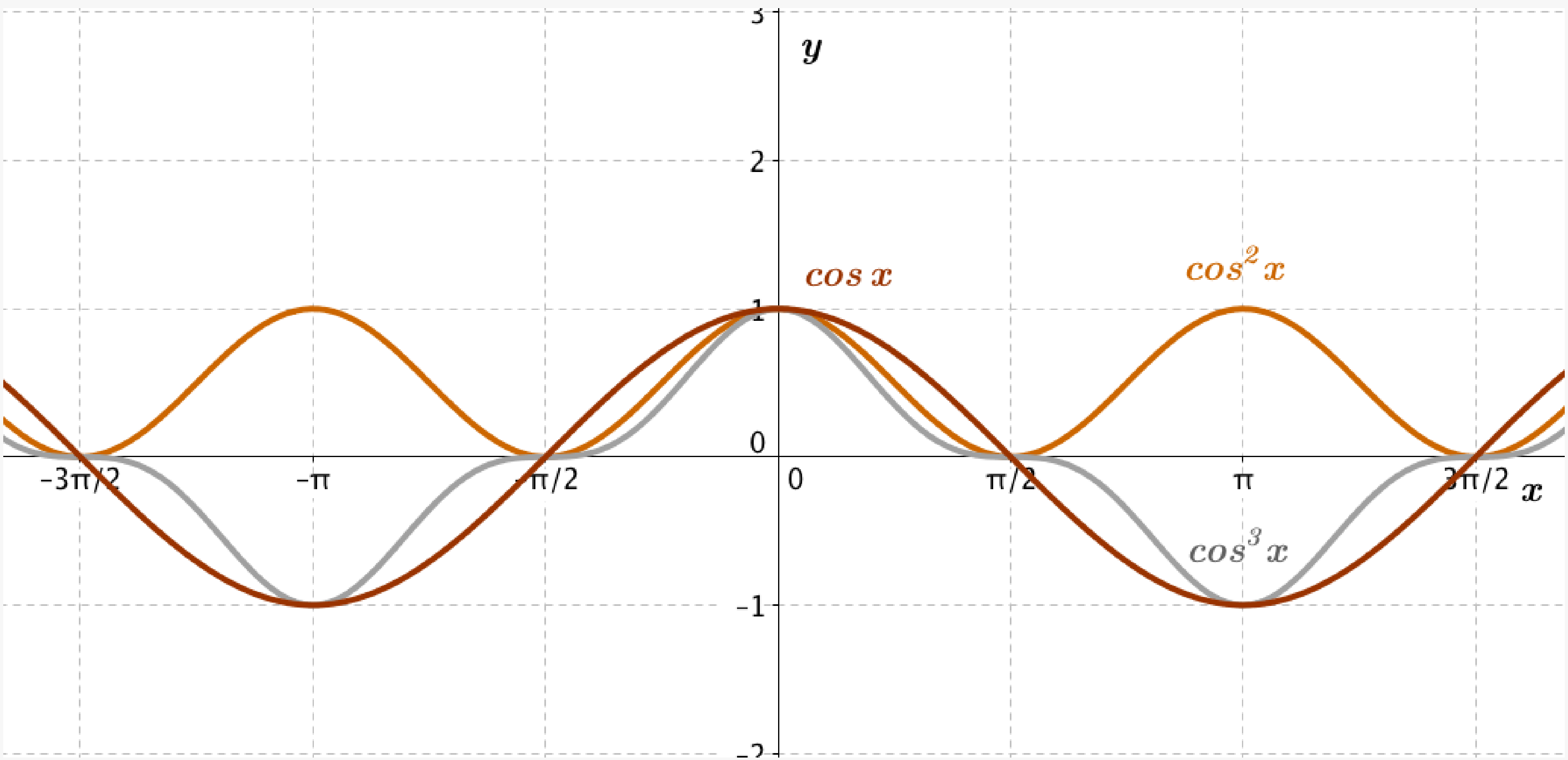

Abb. L8a-2: Die dargestellten Funktionen sind gerade

$$\cos(-x) = \cos x\,, \qquad \cos^2(-x) = \cos^2 x\,, \qquad \cos^3(-x) = \cos^3 x$$

Die Funktion $y = \cos x$ ist gerade. Ganze Potenzen von $\cos x$ sind gerade Funktionen.

$$\cos^n(-x) = \cos^n x\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

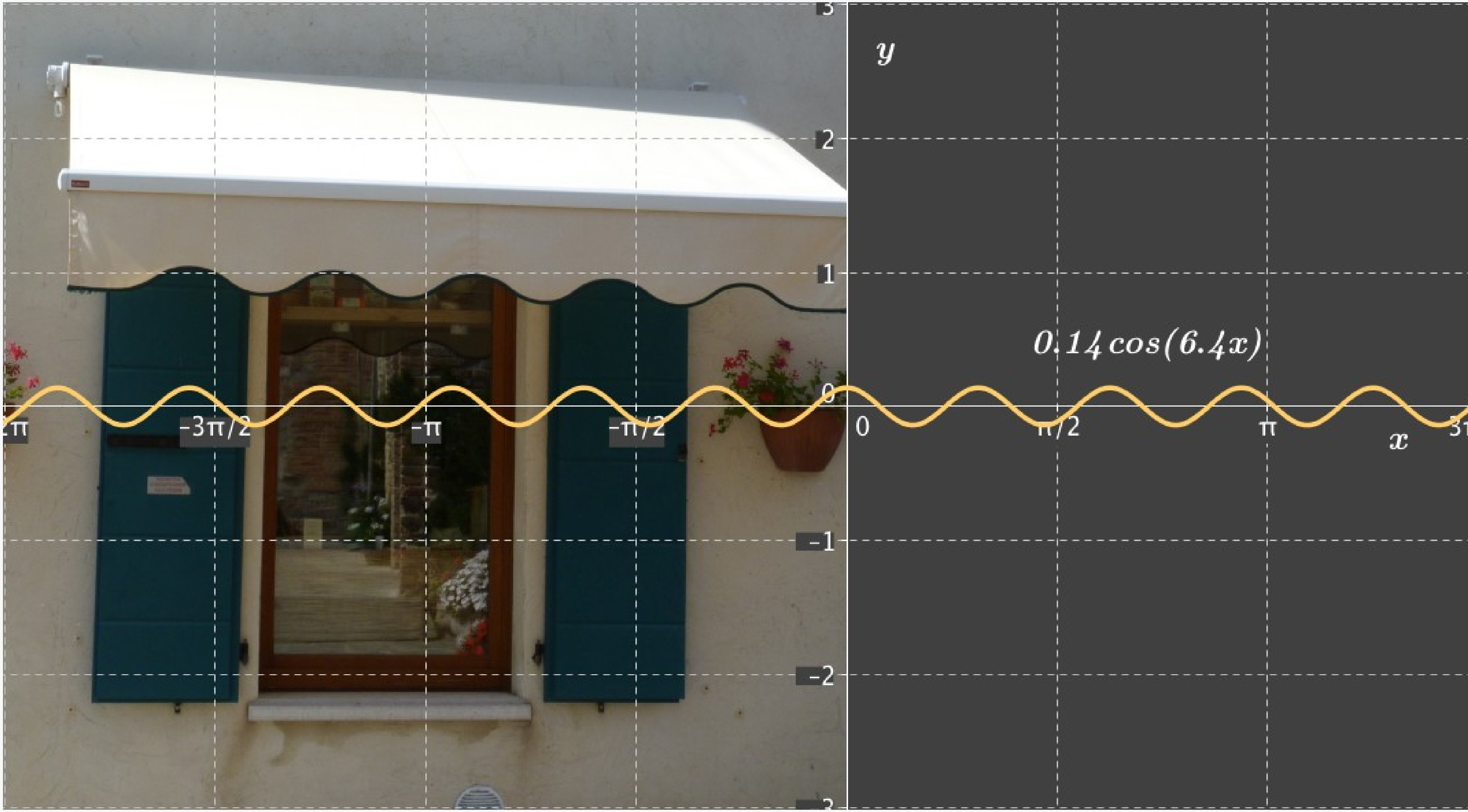

Abb. L8a-3: Die Funktion cos x (sin x) im Alltag

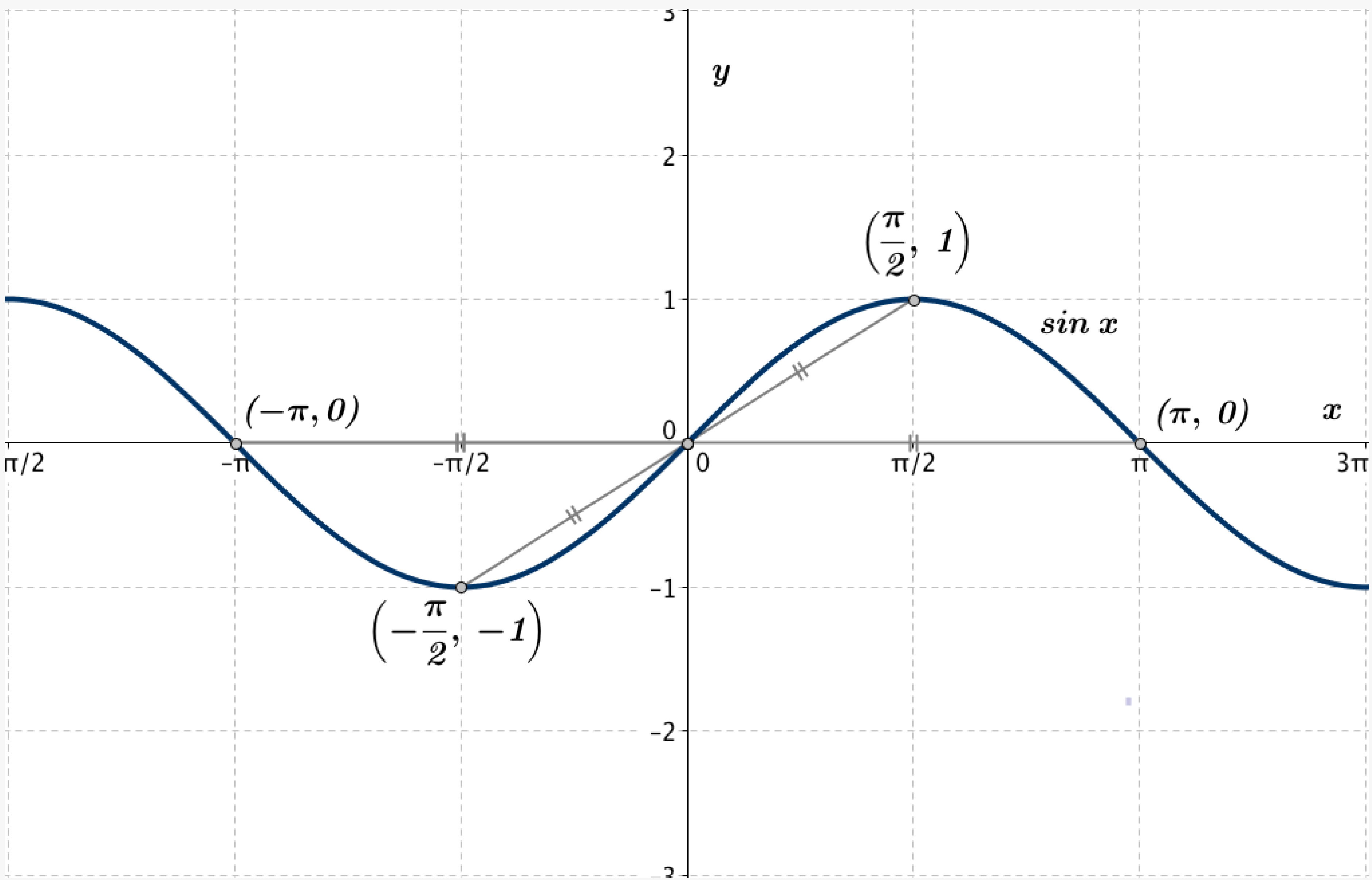

Abb. L8b-1: Die Funktion f (x) = sin x ist eine ungerade Funktion, f (-x) = - f(x)

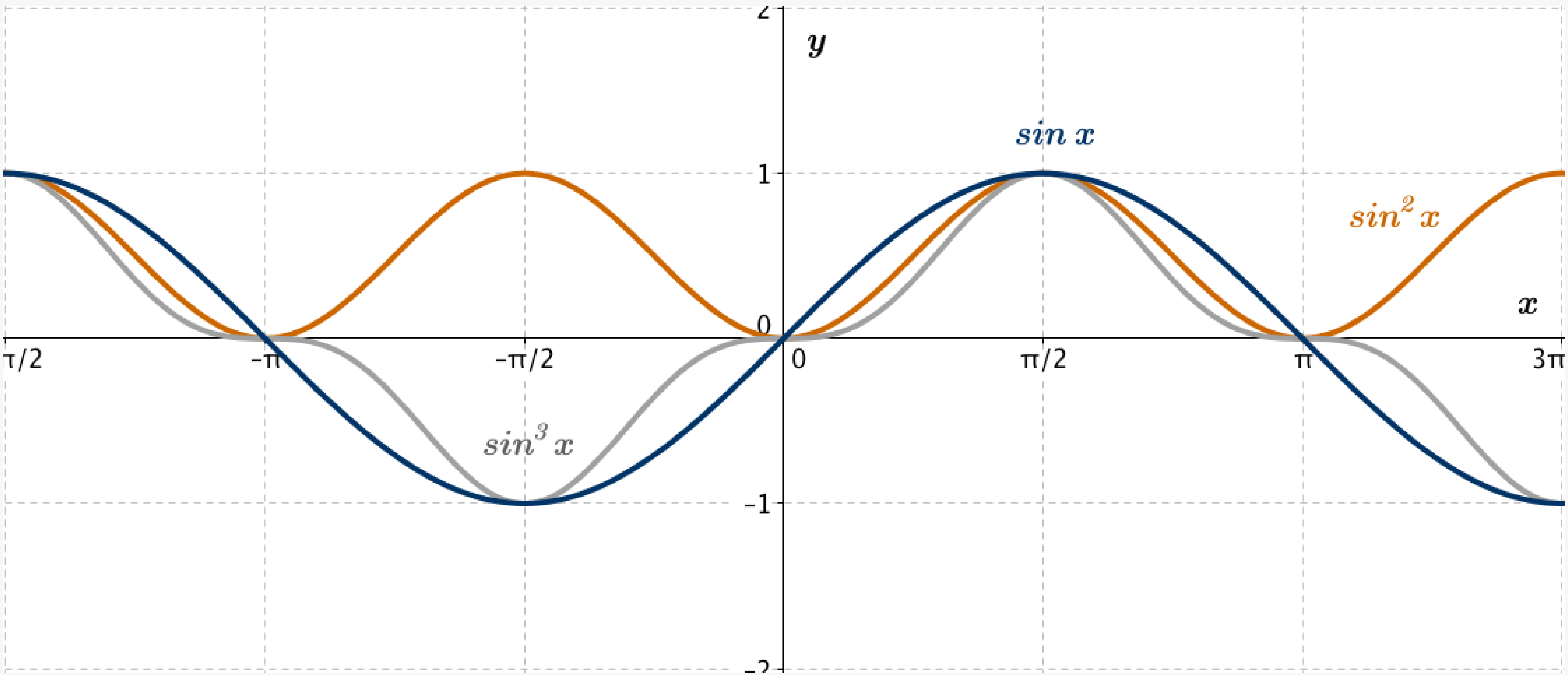

Abb. L8b-2: Graphen der Funktion f (x) = sin x, g (x) = sin² x und h (x) = sin³ x

$$\sin(-x) = -\sin x\,, \qquad \sin^2(-x) = \sin^2 x\,, \qquad \sin^3(-x) = -\sin^3 x$$

Ungerade Funktionen: $f(x) = \sin x\,, \quad h(x) = \sin^3 x$

Gerade Funktion: $g(x) = \sin^2 x$

Man kann zeigen, dass eine gerade Potenz der ungeraden Funktion *sin x* eine gerade Funktion ist, während eine ungerade Potenz von *sin x* eine ungerade Funktion ist.

Auf den nächsten Seiten werden die Graphen der Funktion $\sin^n x$ für $n = 4, 8$ und $n = 5, 9$ gezeigt:

$$y = \sin^4 x\,, \qquad y = \sin^8 x$$

$$y = \sin^5 x\,, \qquad y = \sin^9 x$$

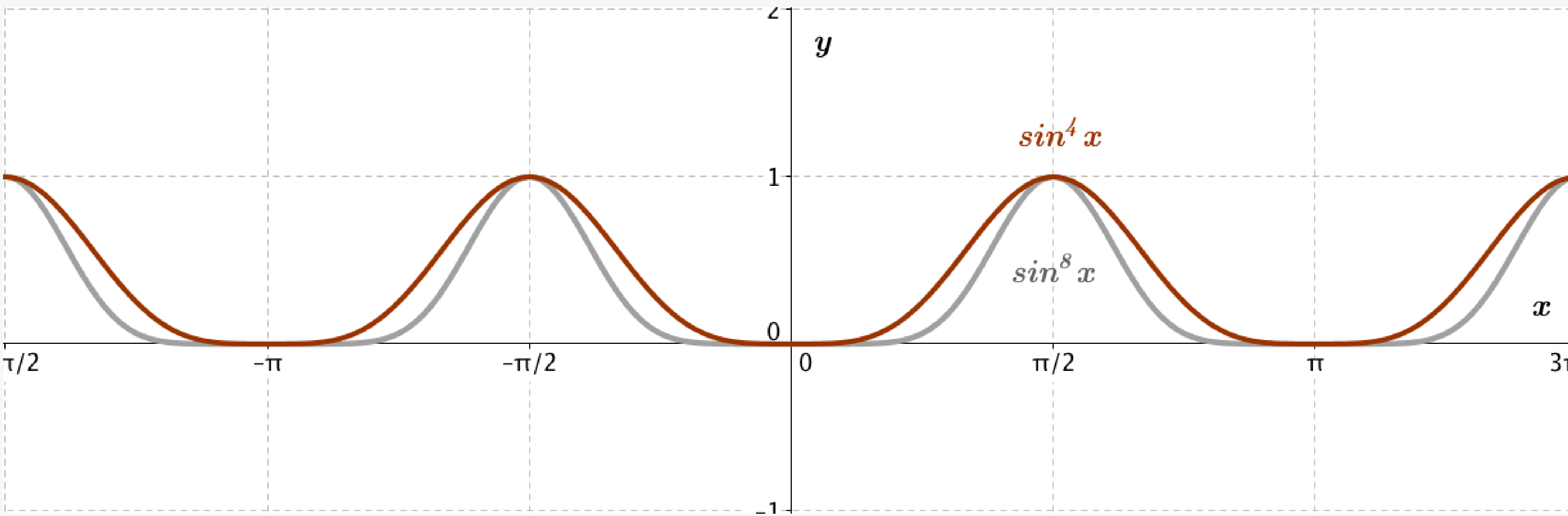

Abb. L8b-3: Graphen der geraden Funktionen, die die geraden Potenzen der Sinusfunktion sind

Geraden Potenzen der ungeraden Funktion *sin x* sind gerade Funktionen, wie zum Beispiel:

$$y = \sin^4 x\,, \qquad y = \sin^6 x$$

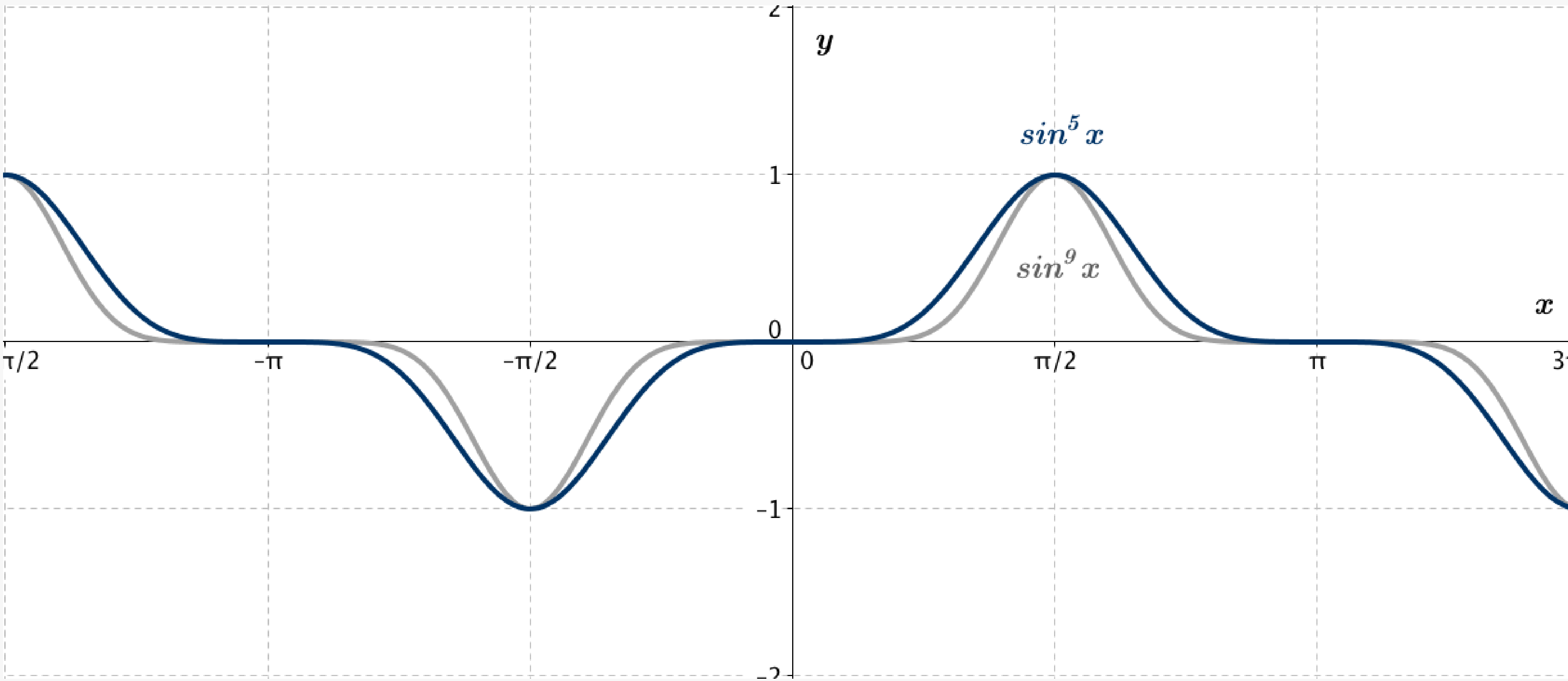

Abb. L8b-4: Graphen der ungeraden Funktionen, die die ungeraden Potenzen der Sinusfunktion sind

Ungeraden Potenzen der ungeraden Funktion *sin x* sind ungerade Funktionen, zum Beispiel:

$$y = \sin^5 x\,, \qquad y = \sin^9 x$$

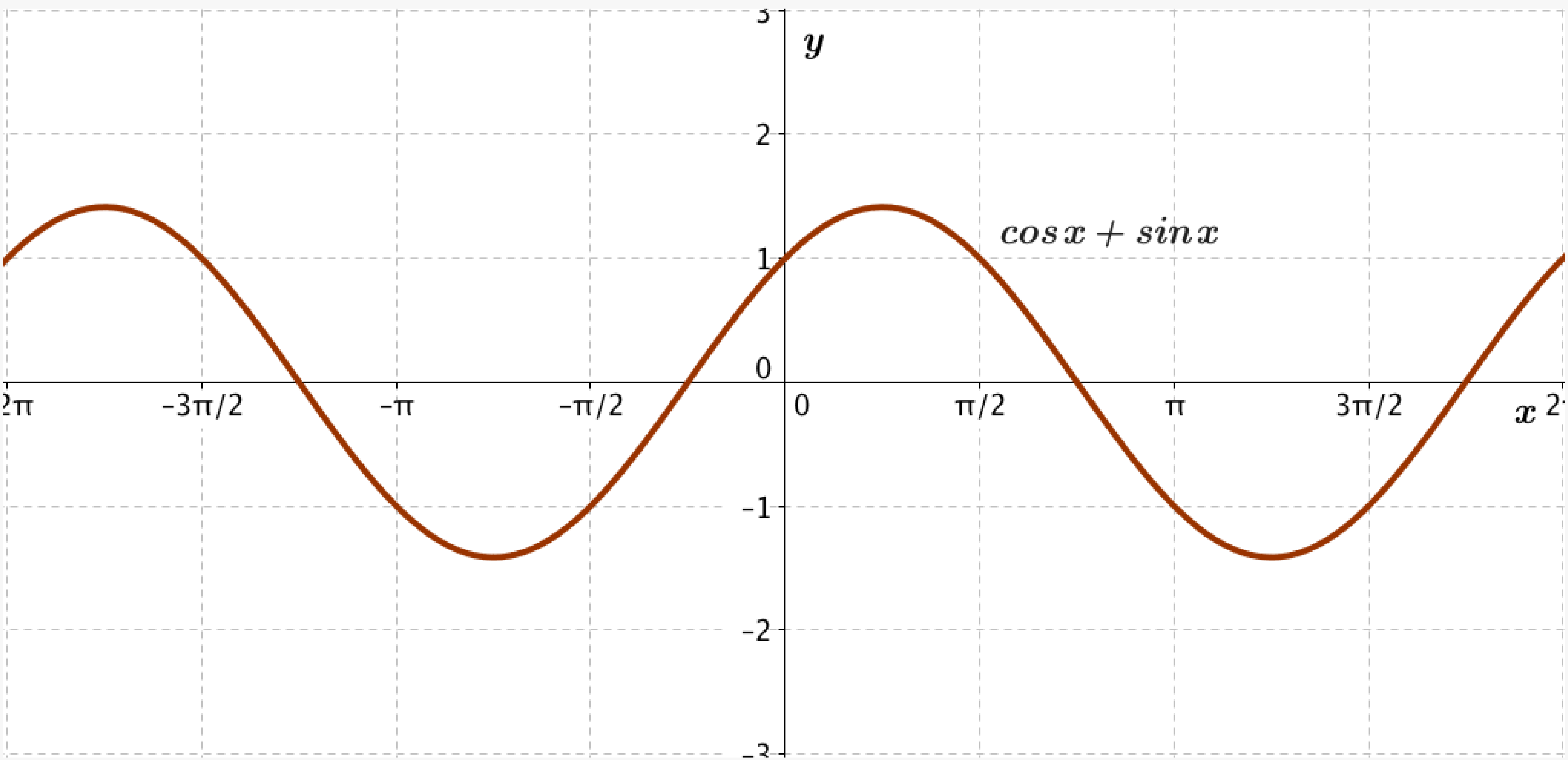

Abb. L8c-1: Graph einer Funktion, der keine Symmetrie bezüglich der Achsen oder des Koordinatenursprungs besitzt

$$f(x) = \cos x + \sin x, \qquad f(-x) = \cos(-x) + \sin(-x) = \cos x - \sin x \neq f(x)$$

$$f(x) \neq f(-x), \qquad f(x) \neq -f(-x)$$

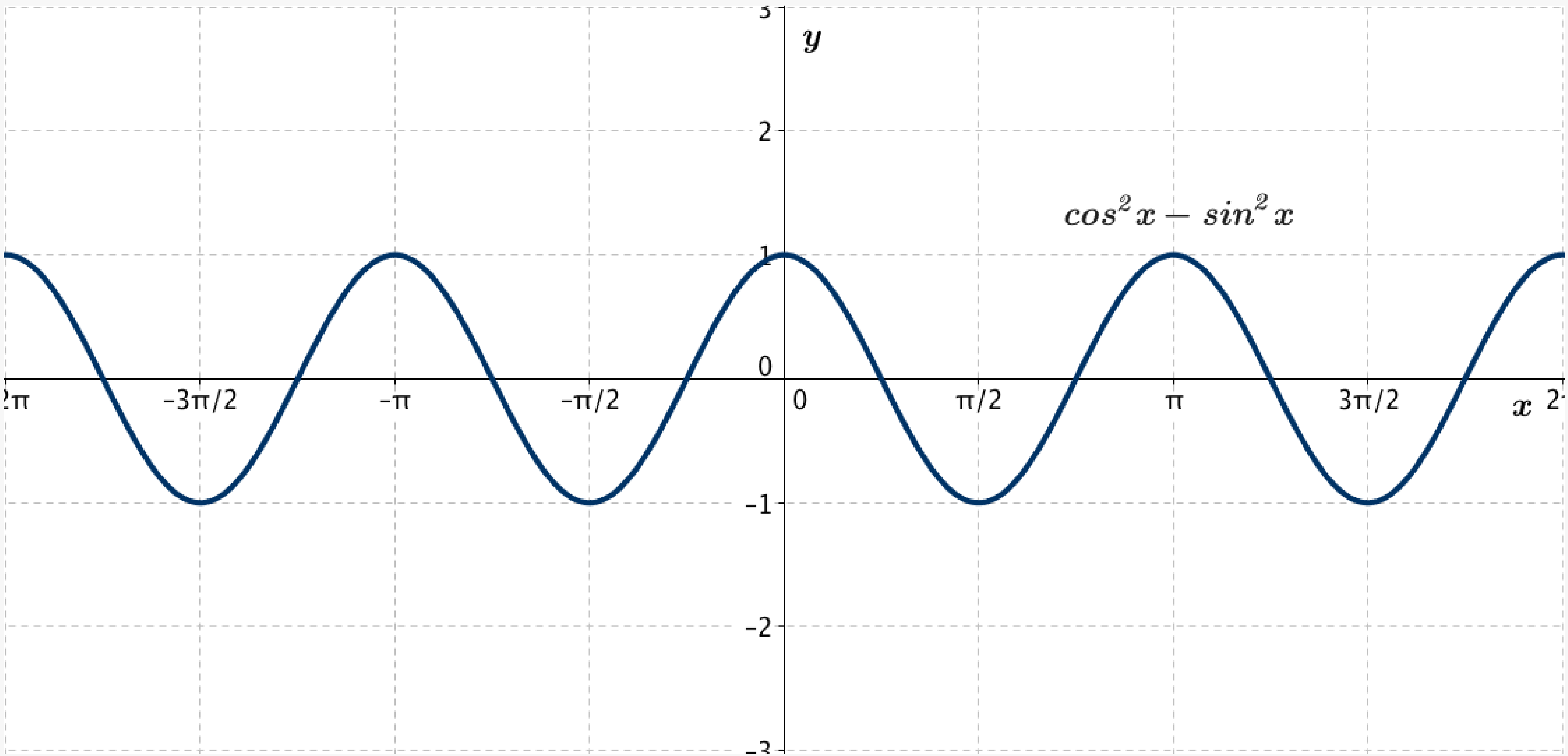

Abb. L8c-2: Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad f(-x) = \cos^2(-x) + \sin^2(-x) = \cos^2 x - \sin^2 x = f(x)$$

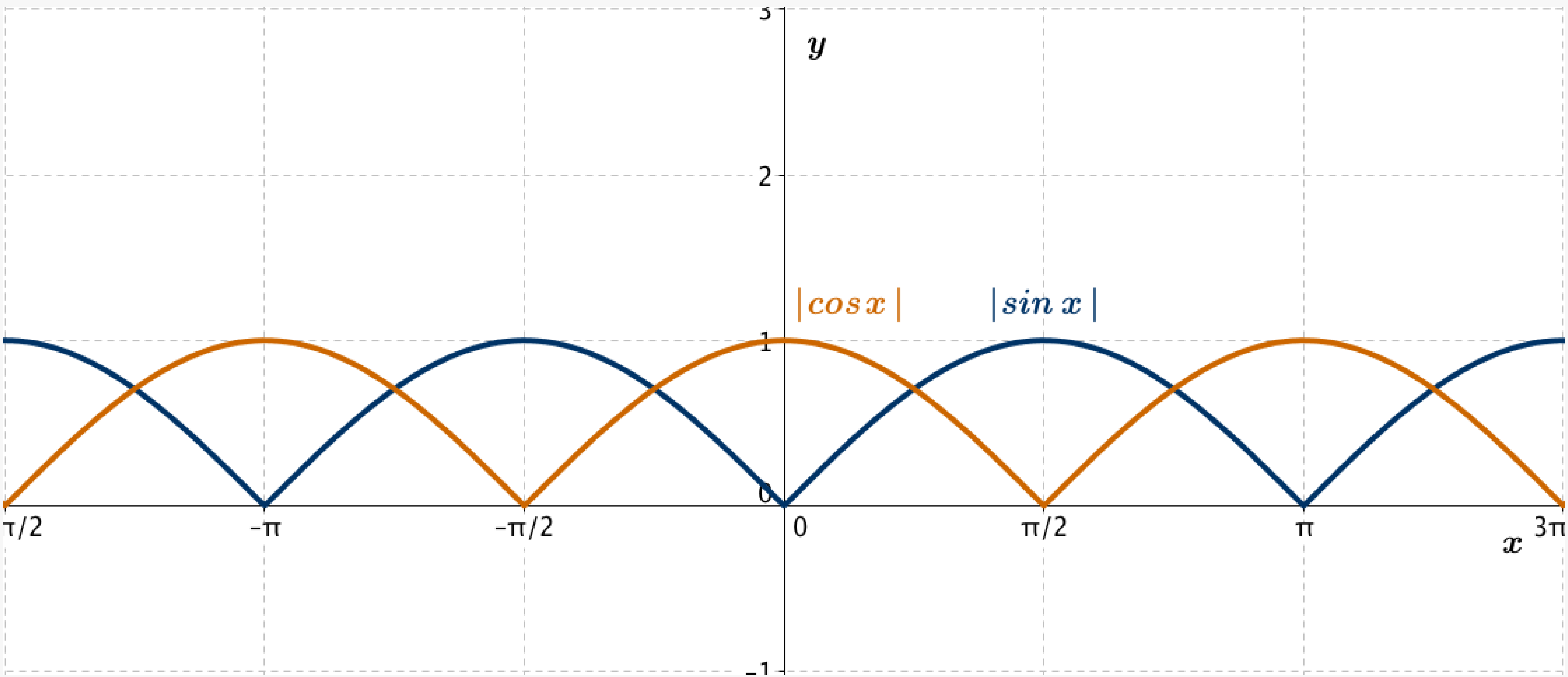

Abb. L8d-1: Die Funktionen sind symmetrisch bezüglich der y-Achse

$$f(-x) = |\cos(-x)| = |\cos x| = f(x)$$

$$g(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = g(x)$$

Abb. L8d-2: Die Funktion $y = - |\sin x|$

Abb. L8d-3: Die Funktion $y = |\sin x|$

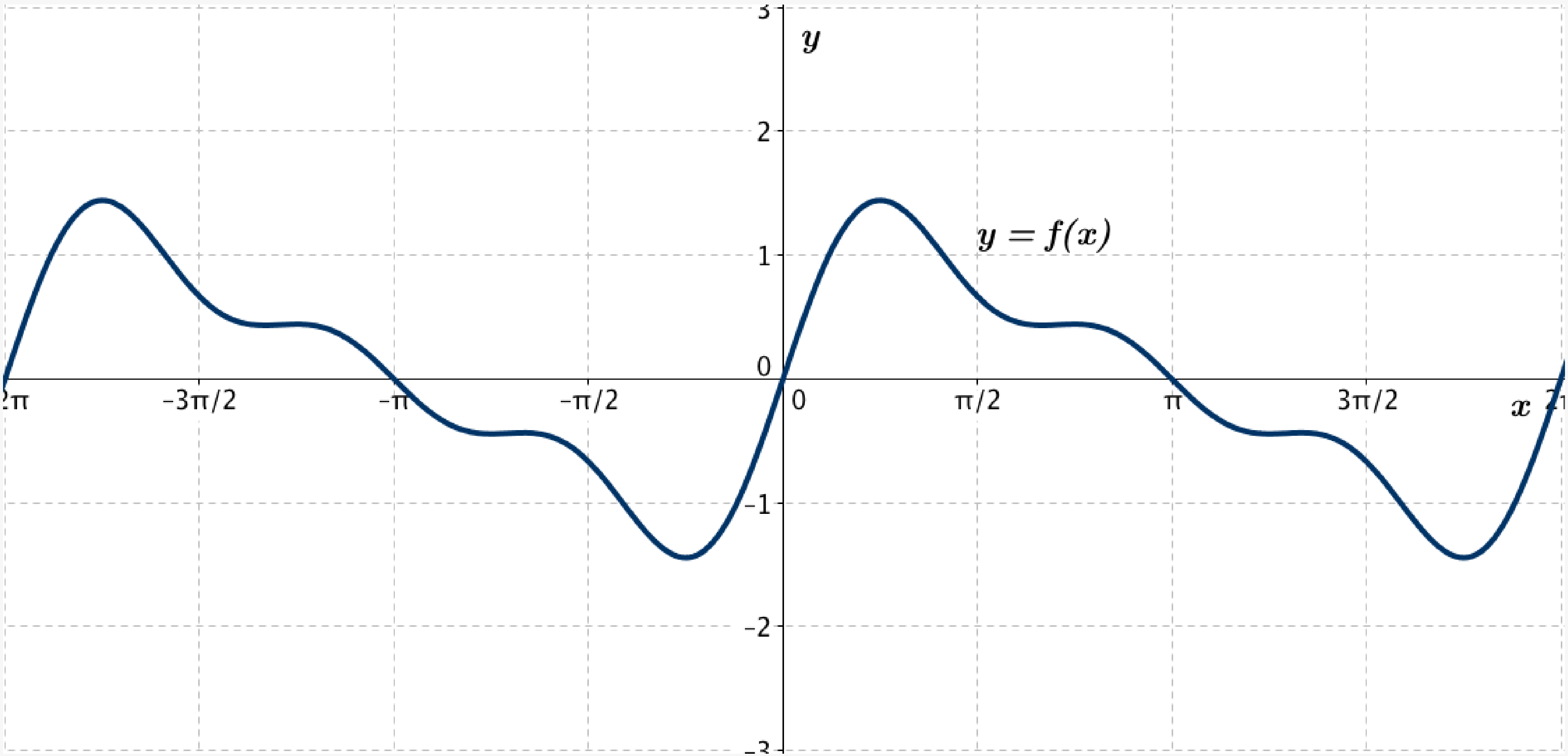

Abb. L8e-1: Die Function ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs

Die Funktion ist ungerade, ihr Graph ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Auf der nächsten Seite wird gezeigt, dass die Funktionen *sin (2x)* und *sin (3x)* symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind.

$$f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{2}\sin(-2x) + \frac{1}{3}\sin(-3x) = -\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(3x) = -f(x)$$

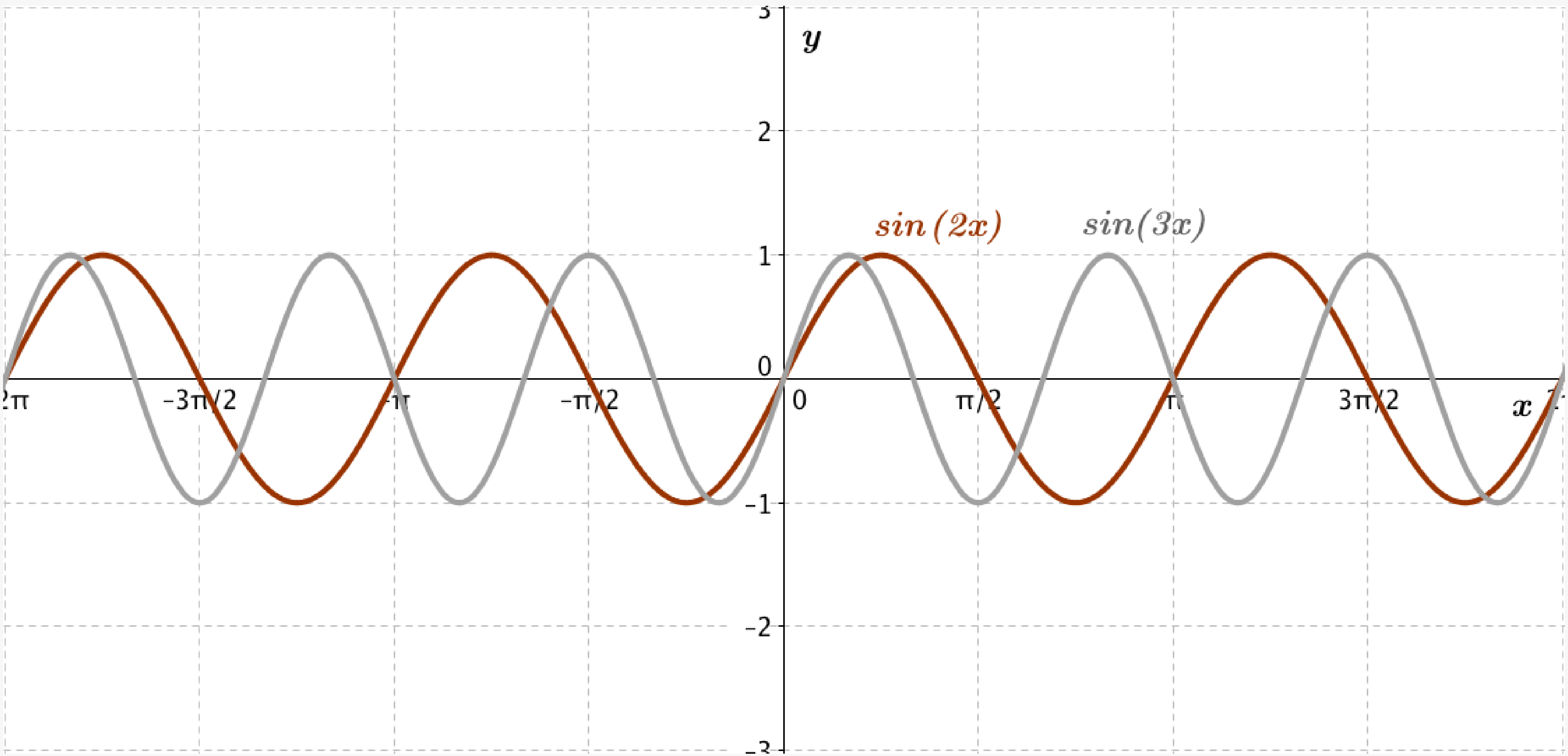

Abb. L8e-2: Die Graphen der Funktionen sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Die rote Kurve entspricht der Funktion $y = \sin(2x)$, die graue Kurve - der Funktion $y = \sin(3x)$

Die Periode der Funktion $y = \sin(ax)$ unterscheidet sich von der von $y = \sin x$, aber die Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs ist unverändert

$$T_{\sin(2x)} = \pi, \qquad T_{\sin(3x)} = \frac{2\pi}{3}$$

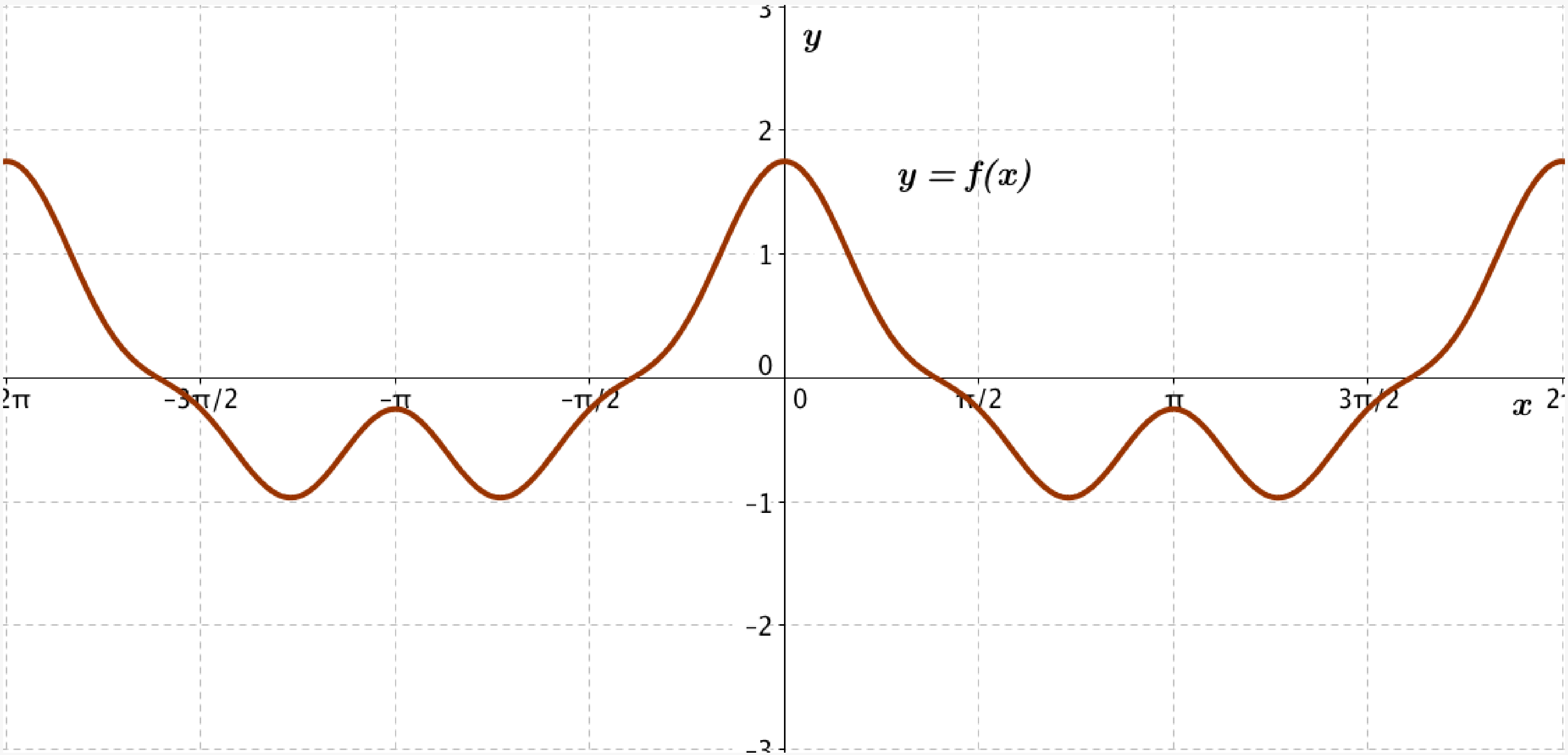

Abb. L8f-1: Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

Die Funktion ist gerade, ihr Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Auf der nächsten Seite wird gezeigt, dass die Funktionen *cos (2x)* und *cos (3x)* symmetrisch bezüglich der y-Achse sind.

$$f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2}\cos(-2x) + \frac{1}{4}\cos(-4x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x) = f(x)$$

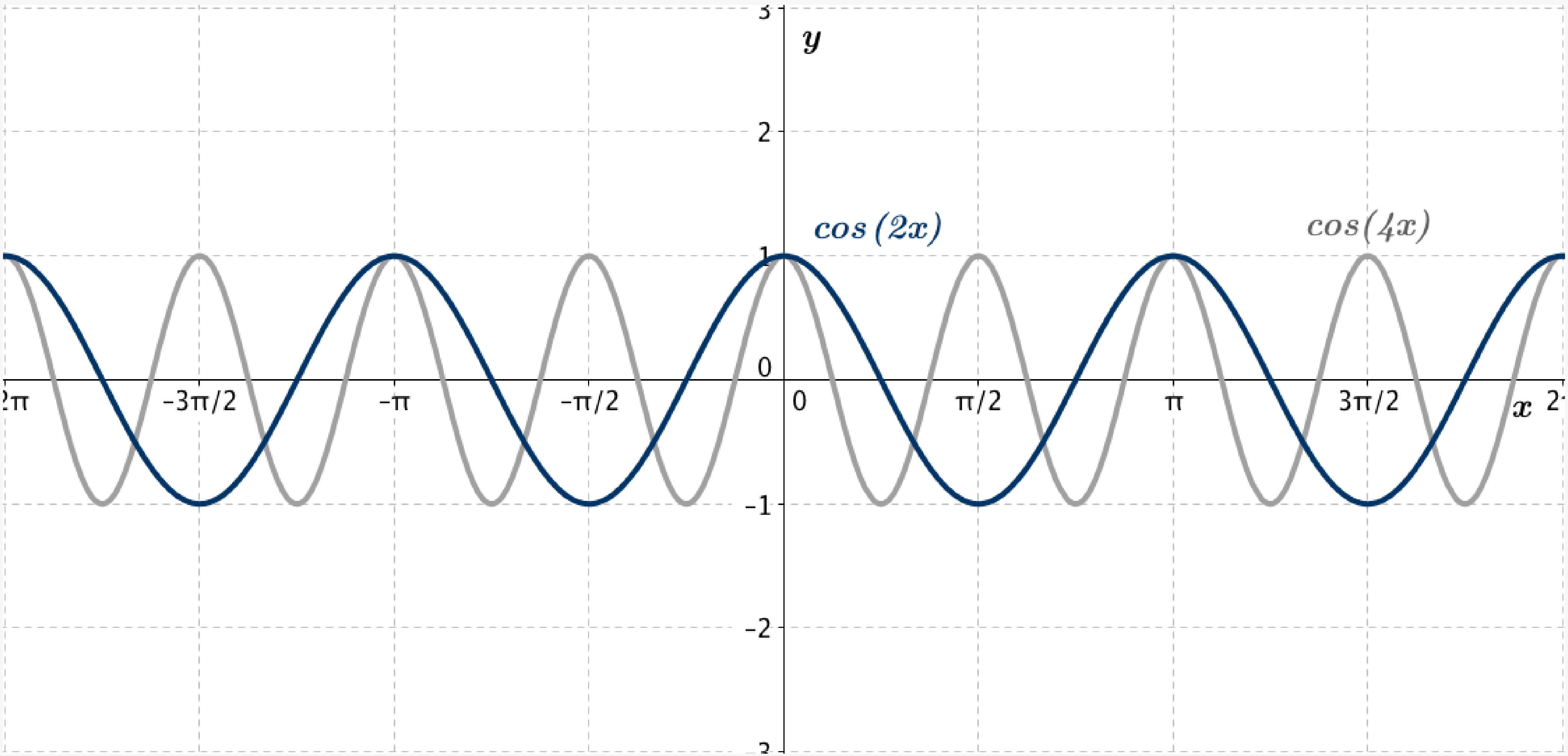

Abb. L8f-2: Die Funktionen sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die blaue Kurve beschreibt die Function y = cos (2x), die graue Kurve beschreibt die Function y = cos (4x)

Die Periode der Funktion $y = cos\ (ax)$ unterscheidet sich von der von $y = cos\ x$, aber die Symmetrie bezüglich der y-Achse bleibt unverändert

$$T_{\cos(2x)} = \pi, \qquad T_{\cos(4x)} = \frac{\pi}{2}$$

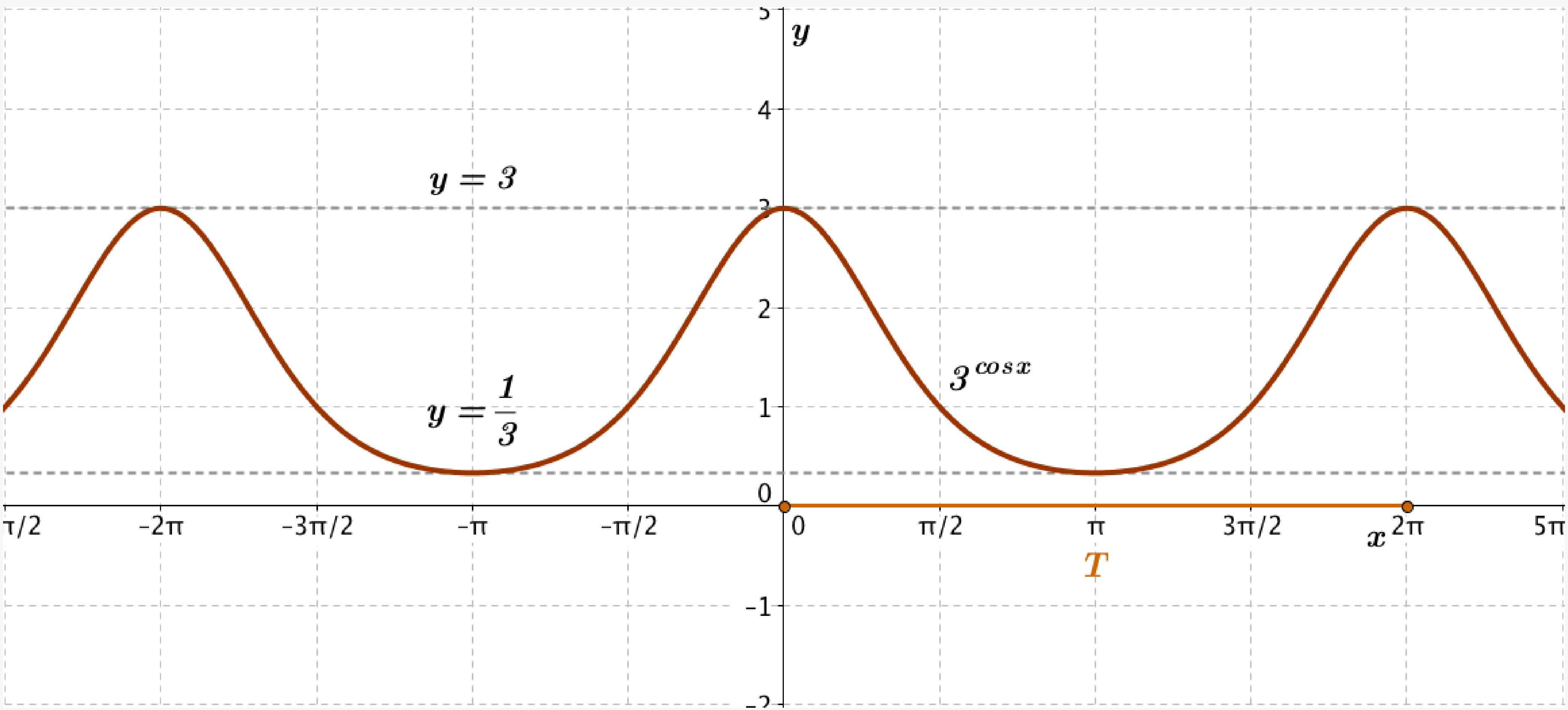

Abb. L8g-1: Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

Die Funktion ist gerade, ihr Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Das kann man algebraisch beweisen:

$$f(-x) = 3^{\cos(-x)} = 3^{\cos x} = f(x), \qquad \cos(-x) = \cos x$$

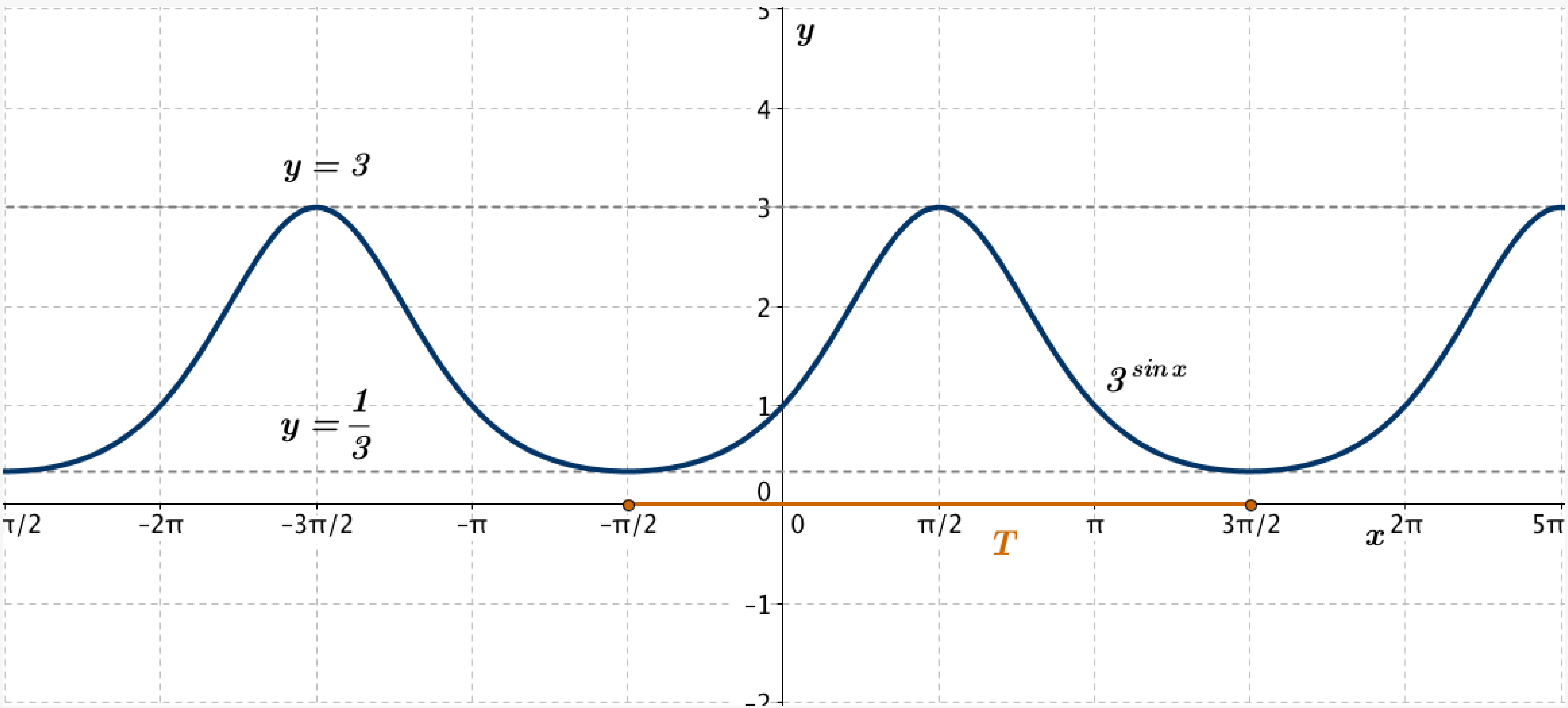

Fig. L8g-2: The function is not symmetric with respect to the y-axis or to the origin

Die Funktion ist weder gerade noch ungerade, ihr Graph besitzt keine Symmetrie bezüglich der y-Achse oder des Koordinatenursprungs. Das kann man algebraisch beweisen:

$$g(-x) = 3^{\sin(-x)} = 3^{-\sin x} = \left(3^{\sin x}\right)^{-1} = (g(x))^{-1} = \frac{1}{g(x)}$$

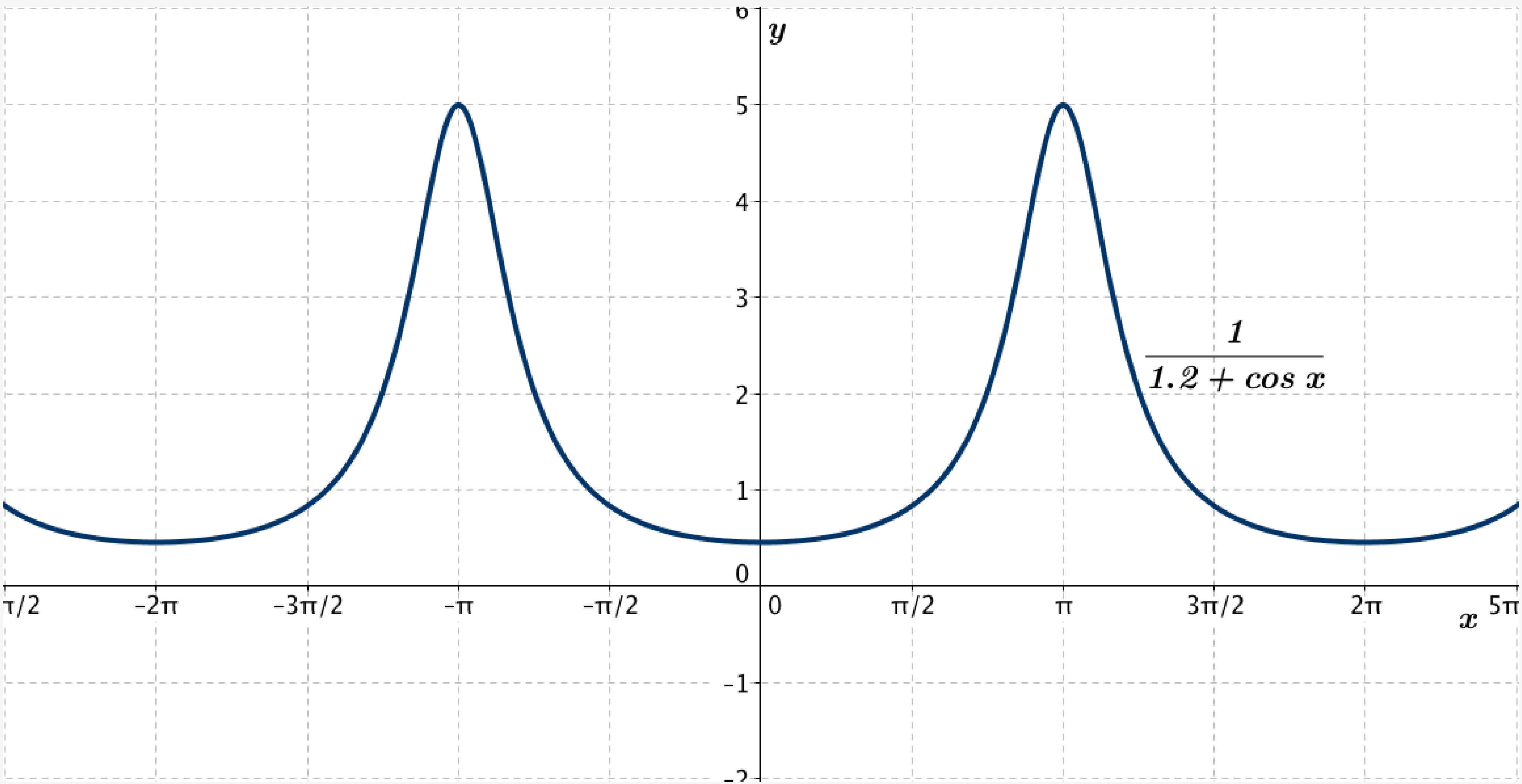

Abb. L8h-1: Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

Die Funktion ist gerade, ihr Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Algebraisch kann man zeigen, dass der Quotient von zwei geraden Funktionen gerade ist:

$$f(-x) = \frac{1}{1.2 + \cos(-x)} = \frac{1}{1.2 + \cos x} = f(x)$$

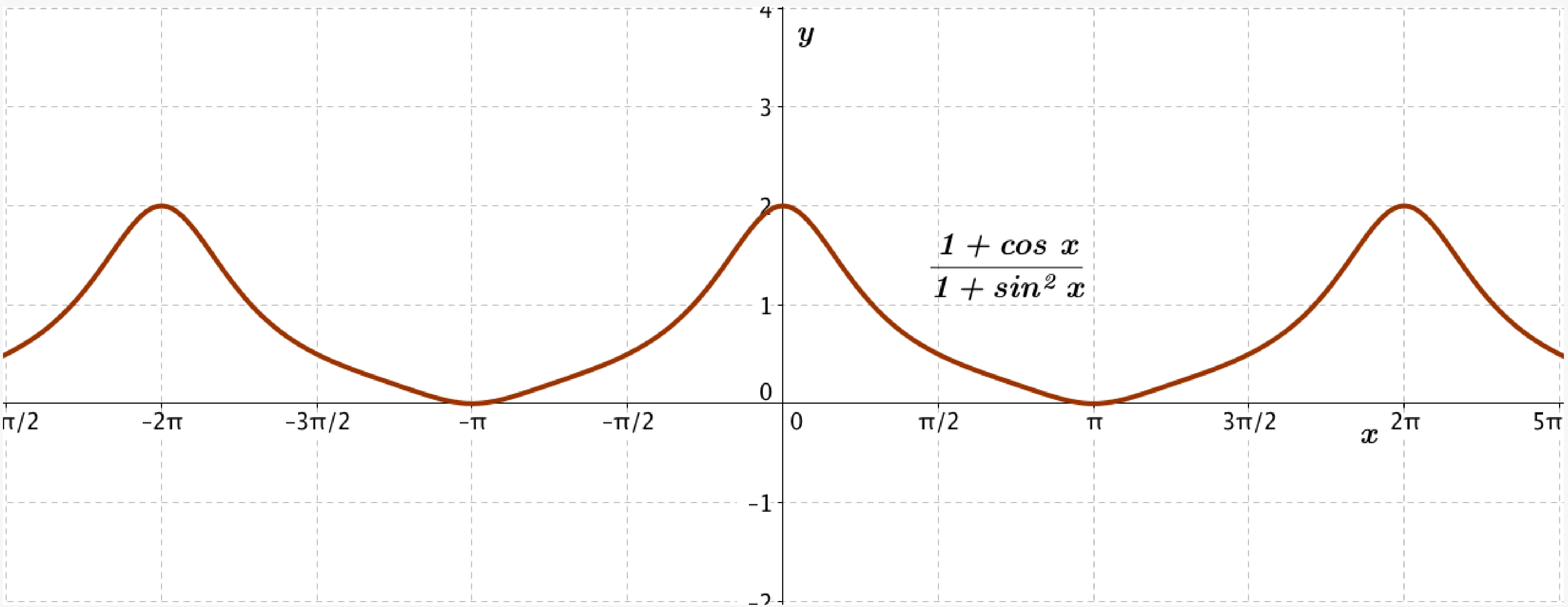

Abb. L8h-2: Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

Die Funktion ist gerade, ihr Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Algebraisch kann man zeigen, dass der Quotient von zwei geraden Funktionen gerade ist:

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{1 + \sin^2(-x)} = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin^2 x} = f(x)$$

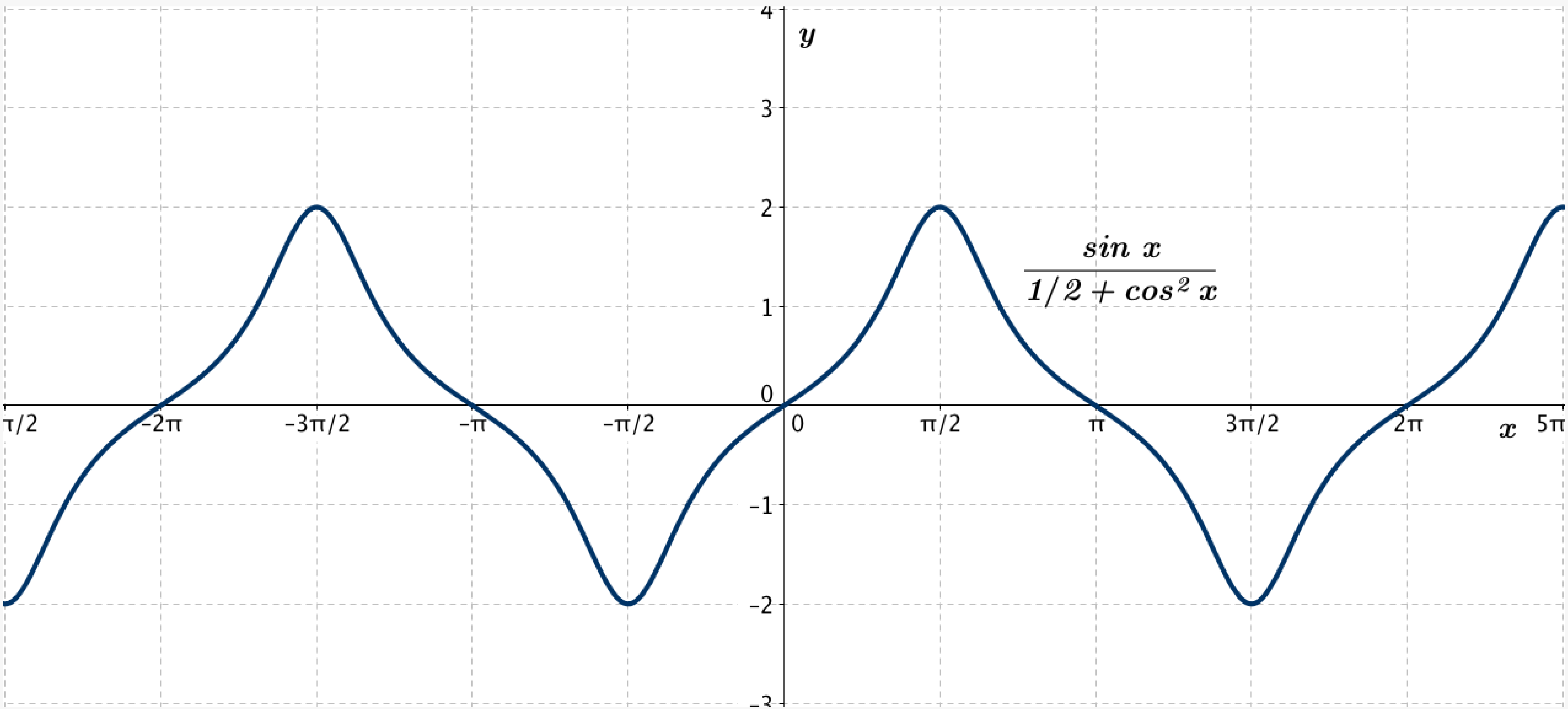

Abb. L8h-3: Die Function ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs

Die Funktion ist ungerade, ihr Graph ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Algebraisch kann man zeigen, dass der Quotient einer ungeraden und einer geraden Funktionen ungerade ist:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1/2 + \cos^2(-x)} = \frac{-\sin x}{1/2 + \cos^2 x} = -f(x)$$

Mit algebraischen und trigonometrischen Mitteln haben wir die Symmetrieeigenschaften von trigonometrischen Funktionen untersucht.

Zusammenfassung:

- Das Produkt von zwei oder mehr geraden Funktionen ist eine gerade Funktion, wie z.B.

  $$y = \cos^2 x\,, \qquad y = \cos^3 x$$

- Das Produkt von zwei ungeraden Funktionen ist eine gerade Funktion, z.B.

  $$y = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$$

- Das Produkt einer ungeraden und einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion:

  $$y = \sin^3 x = \underbrace{\sin x}_{ungerade} \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{gerade}$$

- Die Summe einer ungeraden und einer geraden Funktionen ist weder gerade noch ungerade, wie z.B.

  $$y = \cos x + \sin x$$

- Eine Summe ungerader Funktionen ist eine ungerade Funktion, wie z.B.

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

- Eine Summe gerader Funktionen ist auch eine gerade Funktion, wie z.B.

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x), \qquad y = \cos^2 - \sin^2 x$$

- Eine Exponentialfunktion ist gerade, wenn der Exponent eine gerade Funktion ist, wie z.B.

$$y = 3^{\cos x}$$

- Der Quotient von zwei geraden Funktionen ist eine gerade Funktion, z.B.

$$y = \frac{1}{1.2 + \cos x}, \qquad y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin^2 x}$$

- Der Quotient einer ungeraden und einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion, z.B.

$$y = \frac{\sin x}{1/2 + \cos^2 x}$$