



Komposition oder Verkettung



Der Begriff Komposition bedeutet in der Mathematik meist die Hintereinanderschaltung von Funktionen, auch als Verkettung bezeichnet.

Die Darstellung einer Funktion als Verkettung zweier oder mehrerer im Allgemeinen einfacherer Funktionen ist z.B. in der Differential- und Integralrechnung wichtig, wenn es darum geht Ableitungen mit der Kettenregel oder Integrale mit der Substitutionsregel zu berechnen.

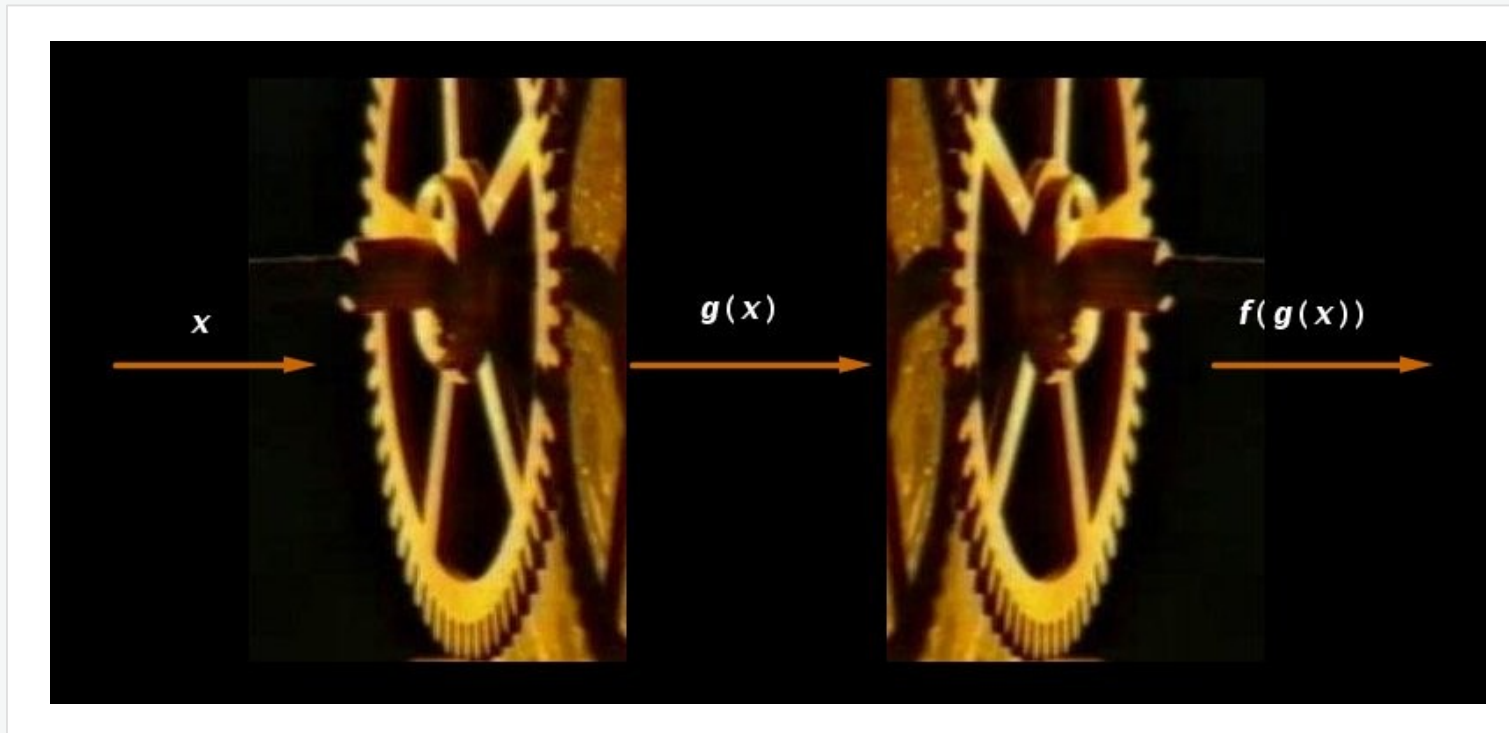


Abb. : Zwei Funktionen können verkettet werden, wenn der Wertebereich der einen im Definitionsbereich der anderen liegt

Nehmen wir an, dass wir die Funktionswerte einer Funktion g als Eingabewerte für eine Funktion f benutzen können. Dann können wir g und f zu einer neuen Funktion verketteten: Die Eingabewerte sind die der Funktion g , und die Ausgabewerte (Funktionswerte) sind die Zahlen $f(g(x))$ (siehe Abb.). Man sagt dann, dass die Funktion $f(g(x))$ (“ f von g von x ”) die Verkettung oder Komposition von g und f ist.



Wir bestimmen im Folgenden die Verkettungen

$$f(g(x)), \quad g(f(x))$$

der Funktionen

$$f(x) = x - 4, \quad g(x) = x^2$$

und ihre Werte für $x = 2$.

Verkettung von Funktionen: Beispiel 1

Um $f(g(x))$ zu bestimmen, ersetzen wir x in der Gleichung für $f(x)$ durch die Funktion $g(x)$:

$$f(x) = x - 4, \quad g(x) = x^2$$

$$f(g(x)) = g(x) - 4 = x^2 - 4$$

$$f(g(2)) = 2^2 - 4 = 0$$

Durch die Änderung der Reihenfolge der verketteten Funktionen ändert sich in der Regel das Resultat

$$g(x) = x^2, \quad f(x) = x - 4$$

$$g(f(x)) = (f(x))^2 = (x - 4)^2$$

$$g(f(2)) = (2 - 4)^2 = 4$$

Verkettung von Funktionen: Beispiel 1

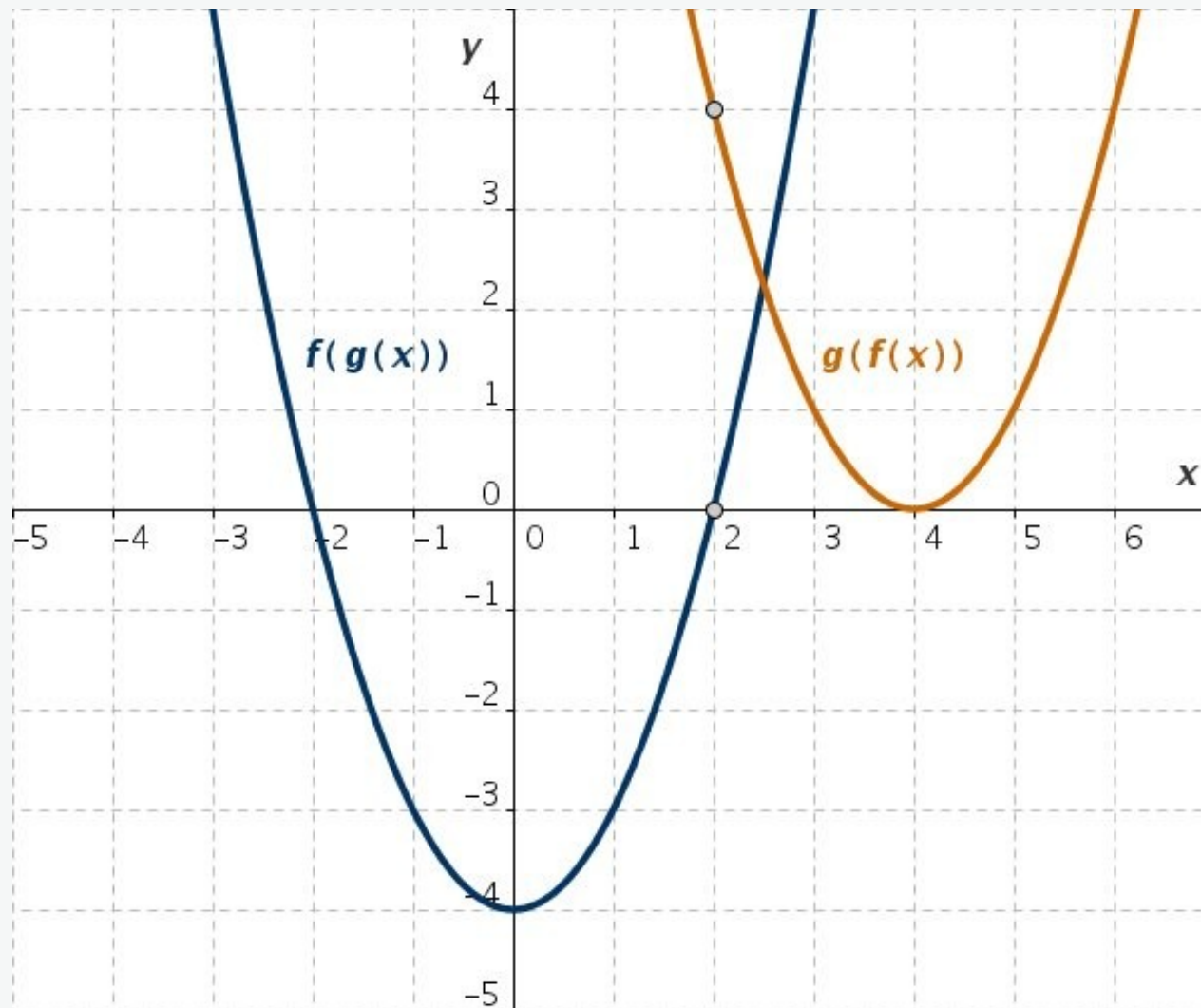


Abb. B1: Die verketteten Funktionen $f(g(x))$ und $g(f(x))$

Die Verkettung $f(g(x))$ kann nur dann gebildet werden, wenn der Wertebereich der Funktion $g(x)$ und der Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ gemeinsame Elemente haben.



Bilden Sie aus den Funktionen f und g die Verkettungen $f(g(x))$ und $g(f(x))$, bestimmen Sie entsprechende Definitions- und Wertebereiche und zeichnen Sie die Verkettungen

Aufgabe 1: $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$

Aufgabe 2: $f(x) = 2\sqrt{1 - x}$, $g(x) = x^2 - 3$

Aufgabe 3: $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$

Aufgabe 4: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$

Verkettung von Funktionen: Lösung 1

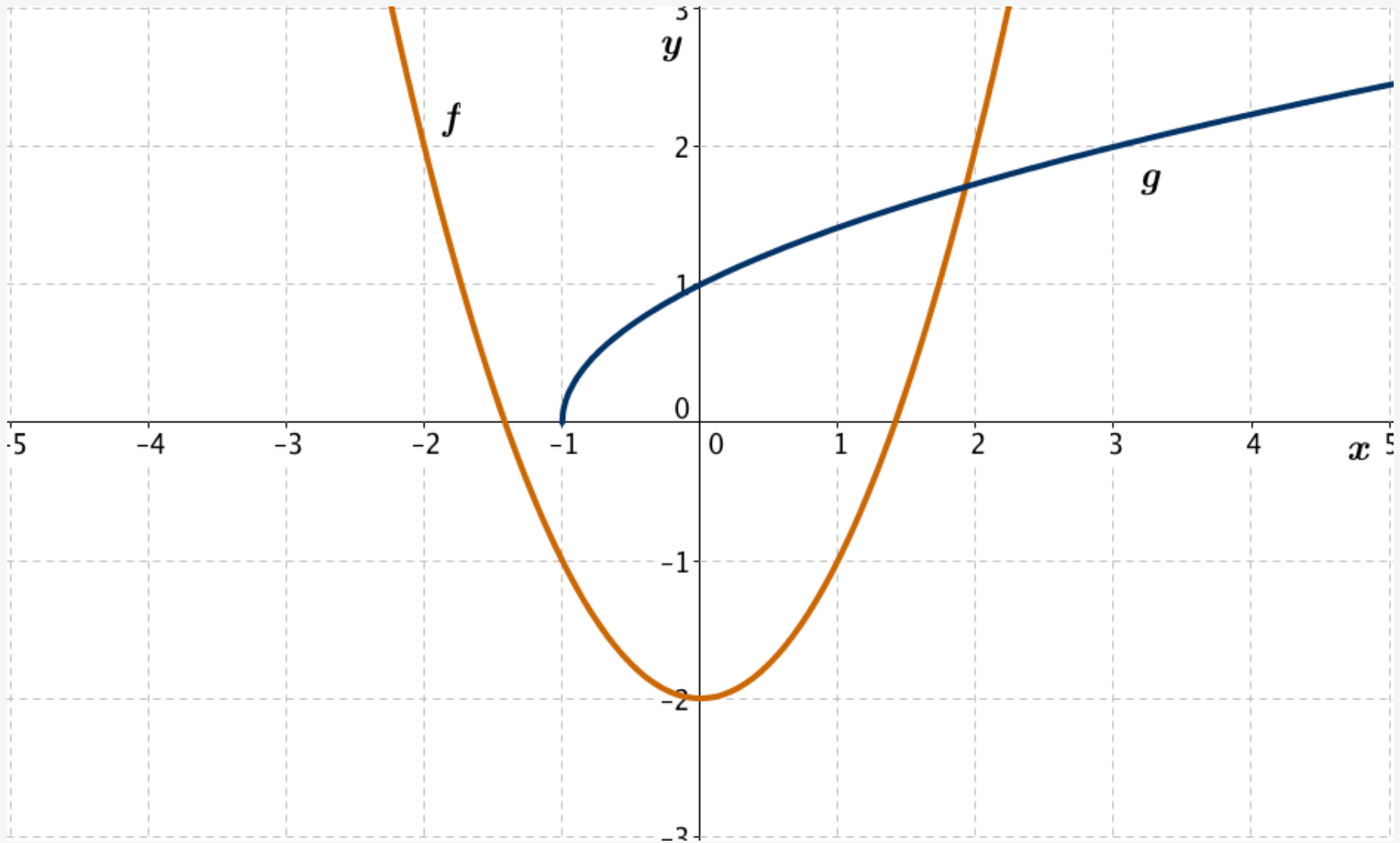


Abb. L1-1: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$f(x) = x^2 - 2, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad W_f = [-2, \infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x+1}, \quad D_g = [-1, \infty), \quad W_g = [0, \infty)$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 1

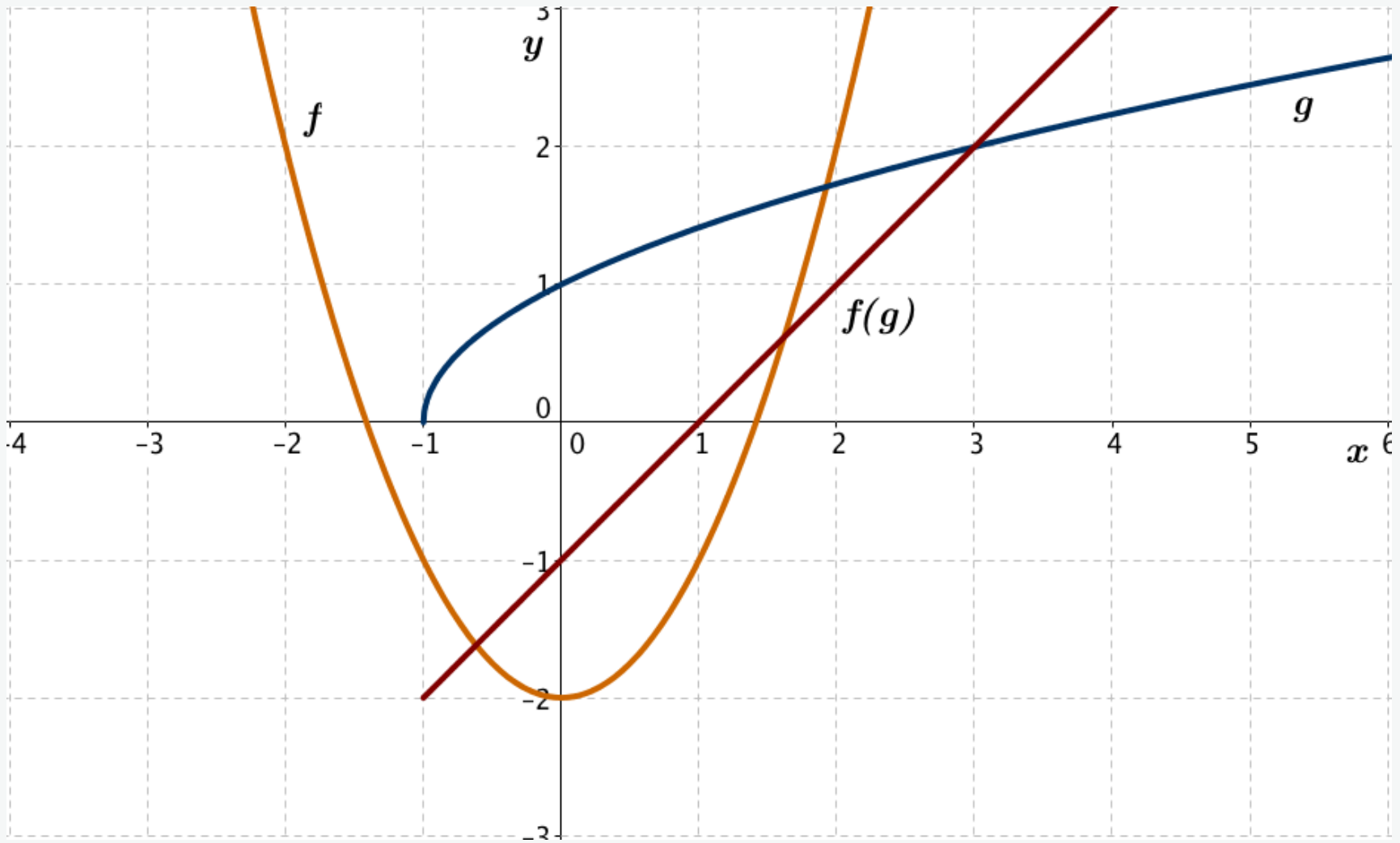


Abb. L1-2: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und die verkettete Funktion $f(g(x))$

$$f(g(x)) = g^2(x) - 2 = (\sqrt{x+1})^2 - 2 = x - 1$$

$$D_{f(g)} = [-1, \infty), \quad W_{f(g)} = [-2, \infty)$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 1

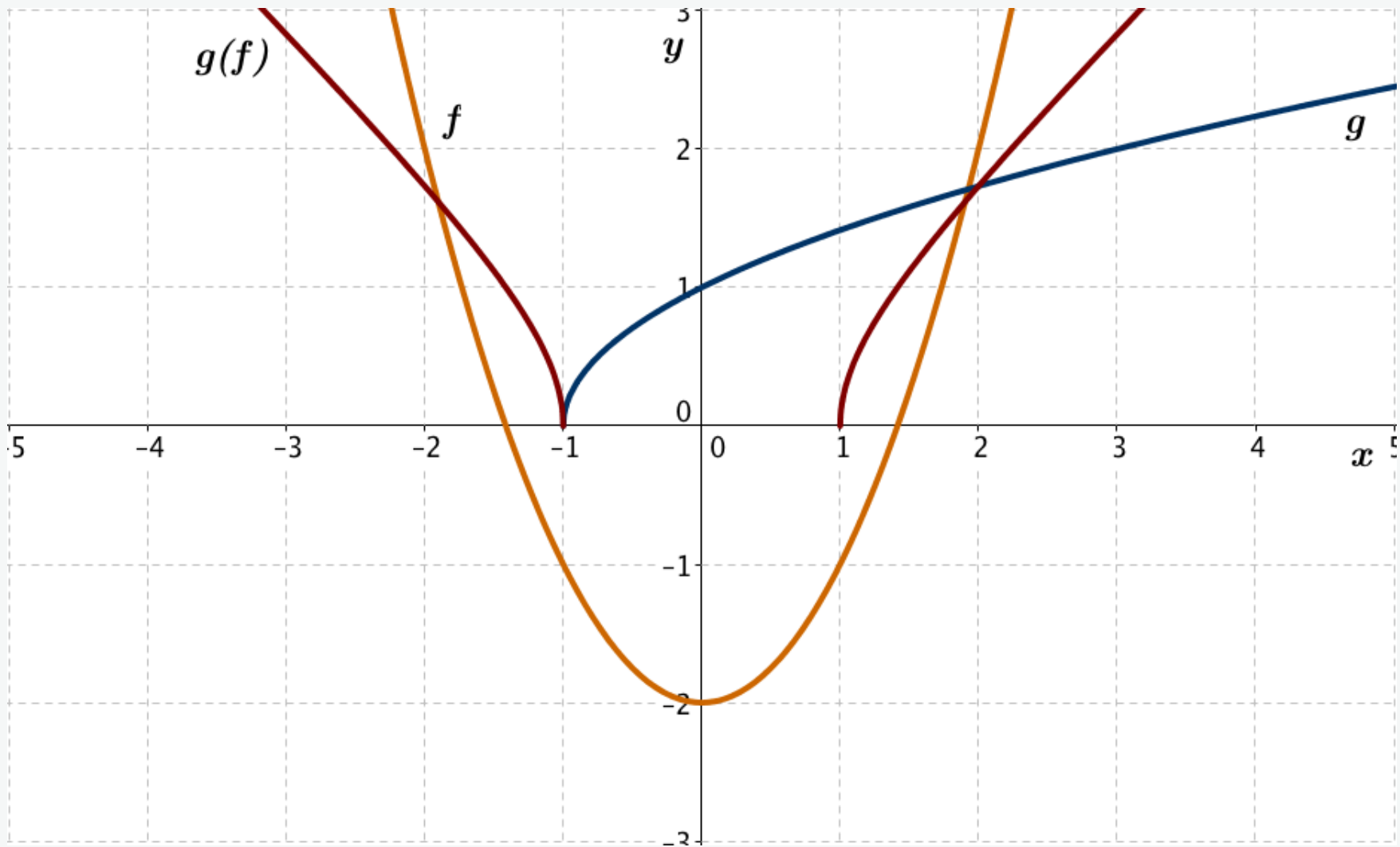


Abb. L1-3: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und die verkettete Funktion $g(f(x))$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 1} = \sqrt{x^2 - 2 + 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_{g(f)} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad W_{g(f)} = [0, \infty)$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 2

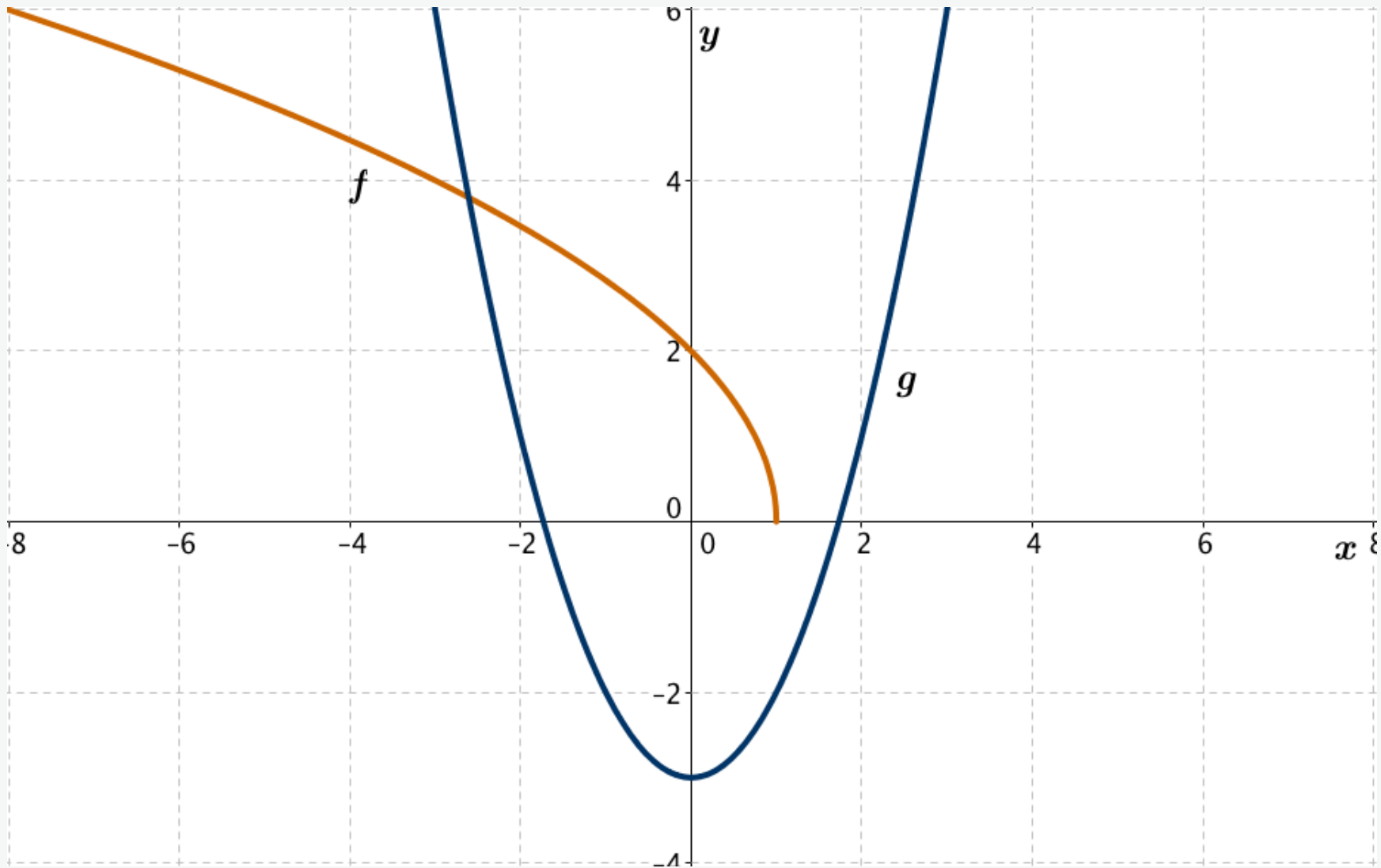


Abb. L2-1: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$f(x) = 2\sqrt{1-x}, \quad D_f = (-\infty, 1], \quad W_f = [0, \infty)$$

$$g(x) = x^2 - 3, \quad D_g = \mathbb{R}, \quad W_g = [-3, \infty)$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 2

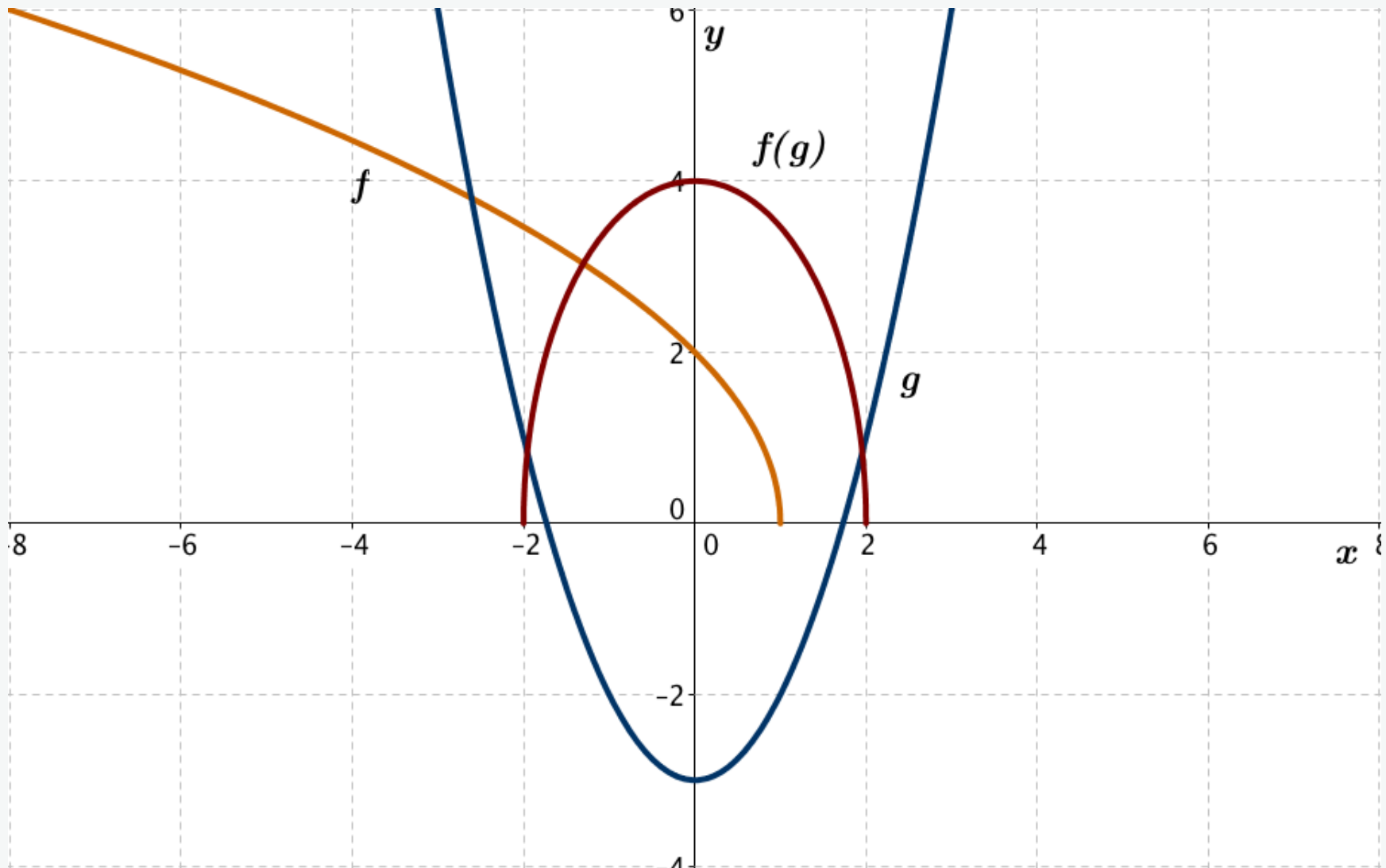


Abb. L2-2: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und die verkettete Funktion $f(g(x))$

$$f(g(x)) = 2\sqrt{1 - g(x)} = 2\sqrt{4 - x^2}, \quad D_{f(g)} = [-2, 2], \quad W_{f(g)} = [0, 4]$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 2

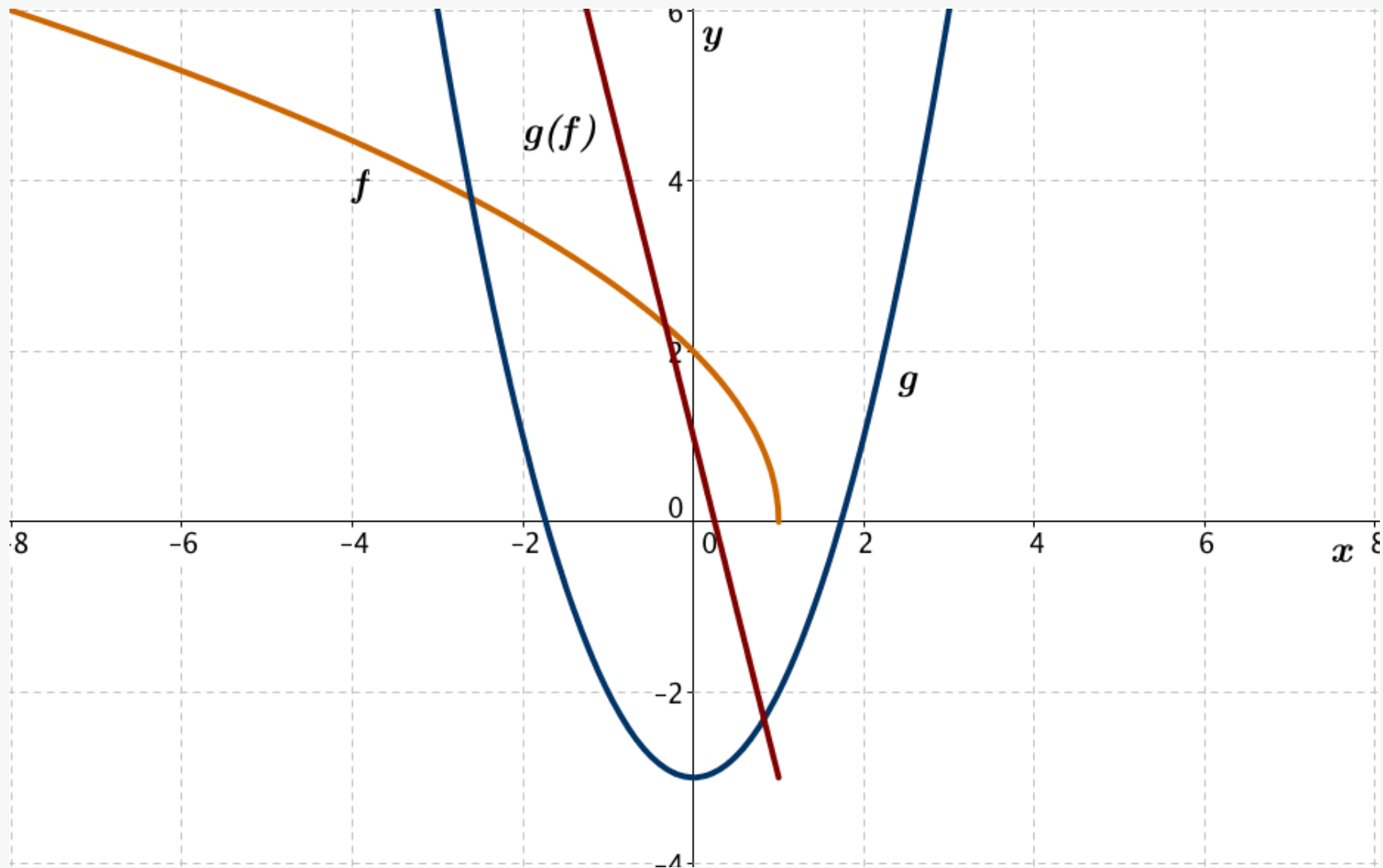


Abb. L2-3: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und die verkettete Funktion $g(f(x))$

$$g(f(x)) = f^2(x) - 3 = 1 - 4x, \quad D_{g(f)} = (-\infty, 1], \quad W_{g(f)} = [-3, \infty)$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 3

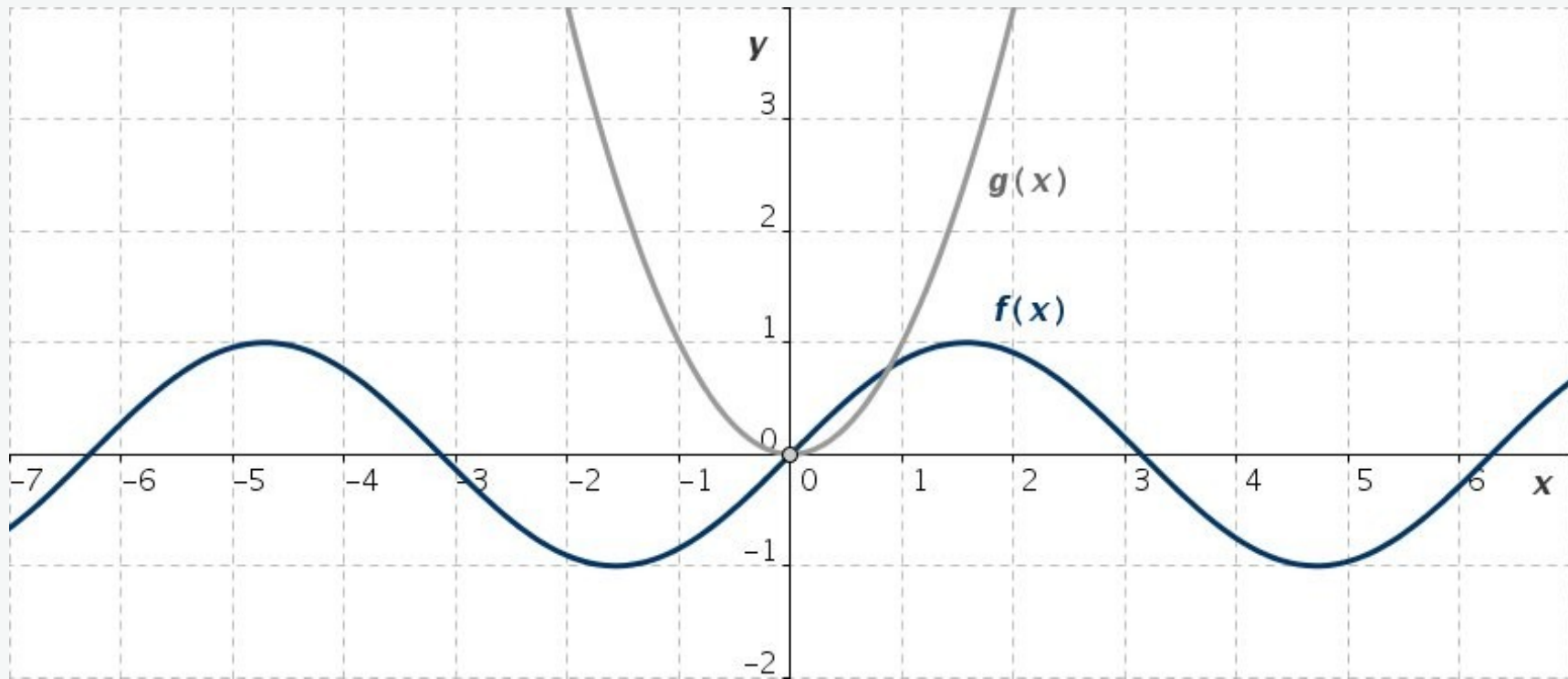


Abb. L3-1: Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$f(x) = \sin x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = [-1, 1]$$

$$g(x) = x^2, \quad D(g) = \mathbb{R}, \quad W(g) = \mathbb{R}^+$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 3

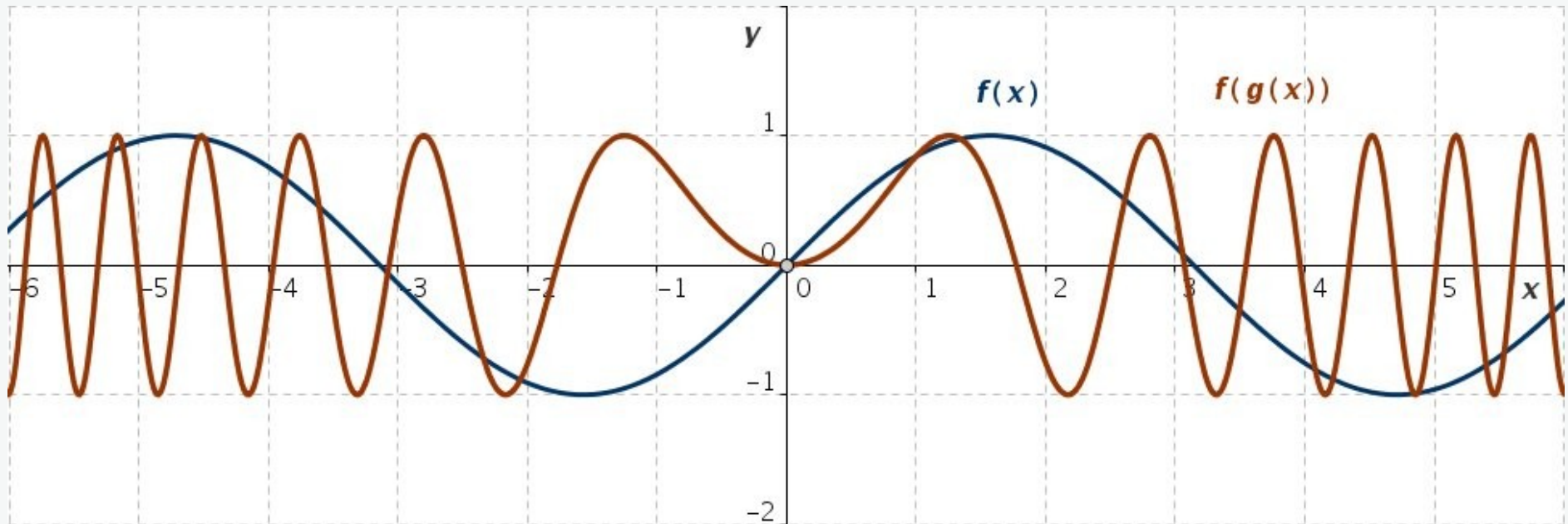


Abb. L3-2: Die Funktion $f(x)$ und die verkettete Funktion $f(g(x))$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2, \quad f(g(x)) = \sin(x^2)$$

$$D(f(g)) = \mathbb{R}, \quad W(f(g)) = [-1, 1]$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 3

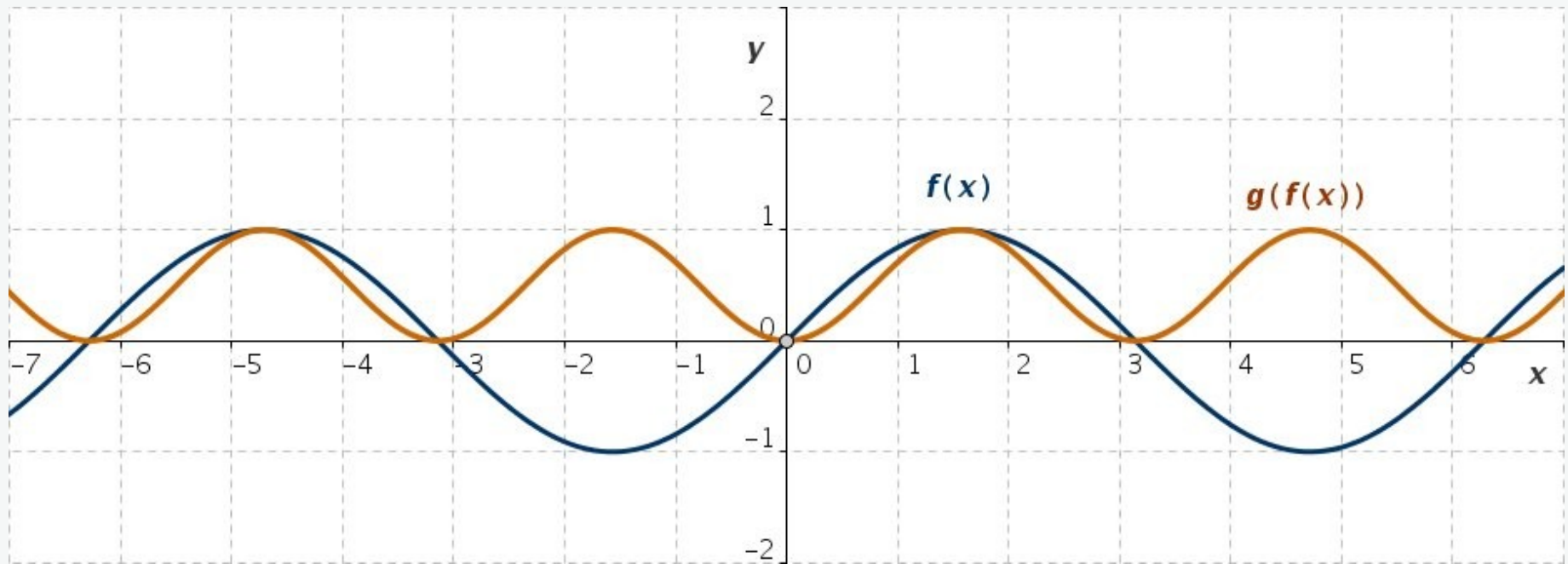


Abb. L3-3: Die Funktion $f(x)$ und die verkettete Funktion $g(f(x))$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2, \quad g(f(x)) = \sin^2 x$$

$$D(g(f)) = \mathbb{R}, \quad W(g(f)) = [0, 1]$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 4

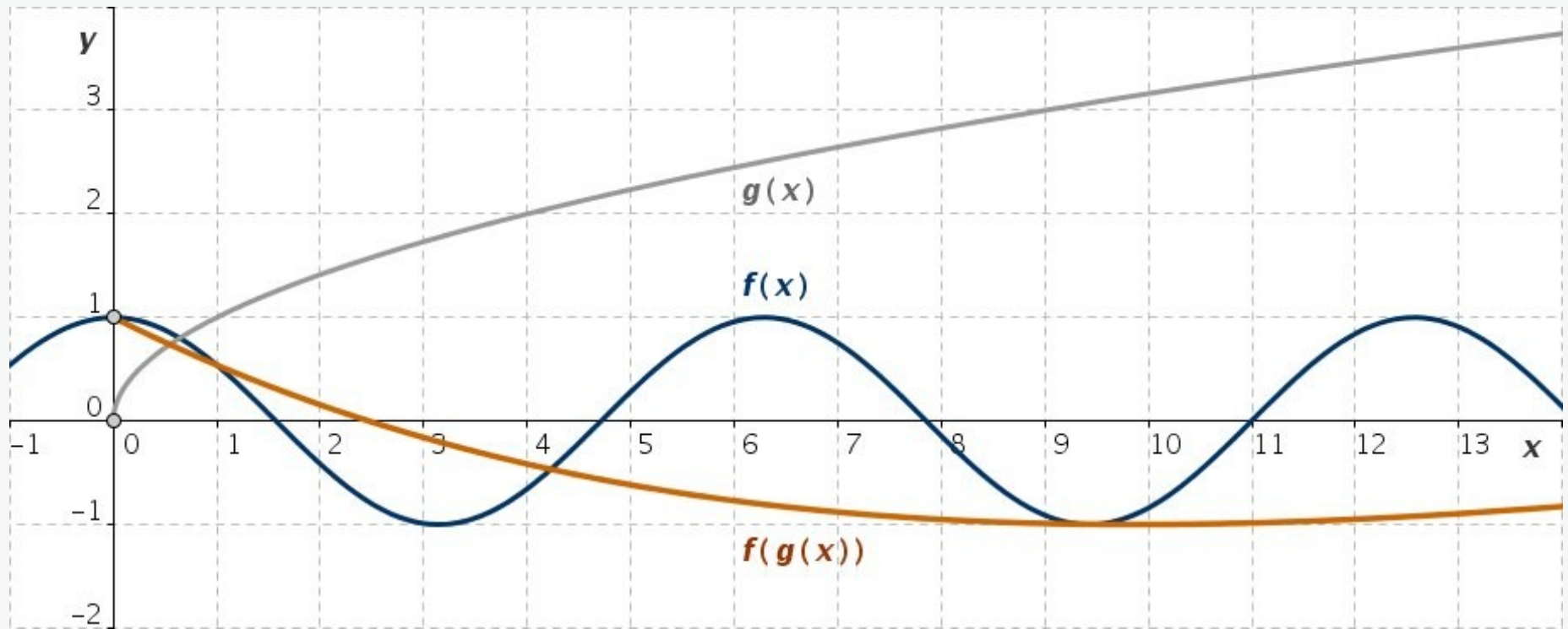


Abb. L4-1: Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und die verkettete Funktion $f(g(x))$

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad f(g(x)) = \cos(\sqrt{x})$$

$$D(f(g)) = \mathbb{R}^+, \quad W(f(g)) = [-1, 1]$$

Verkettung von Funktionen: Lösung 4

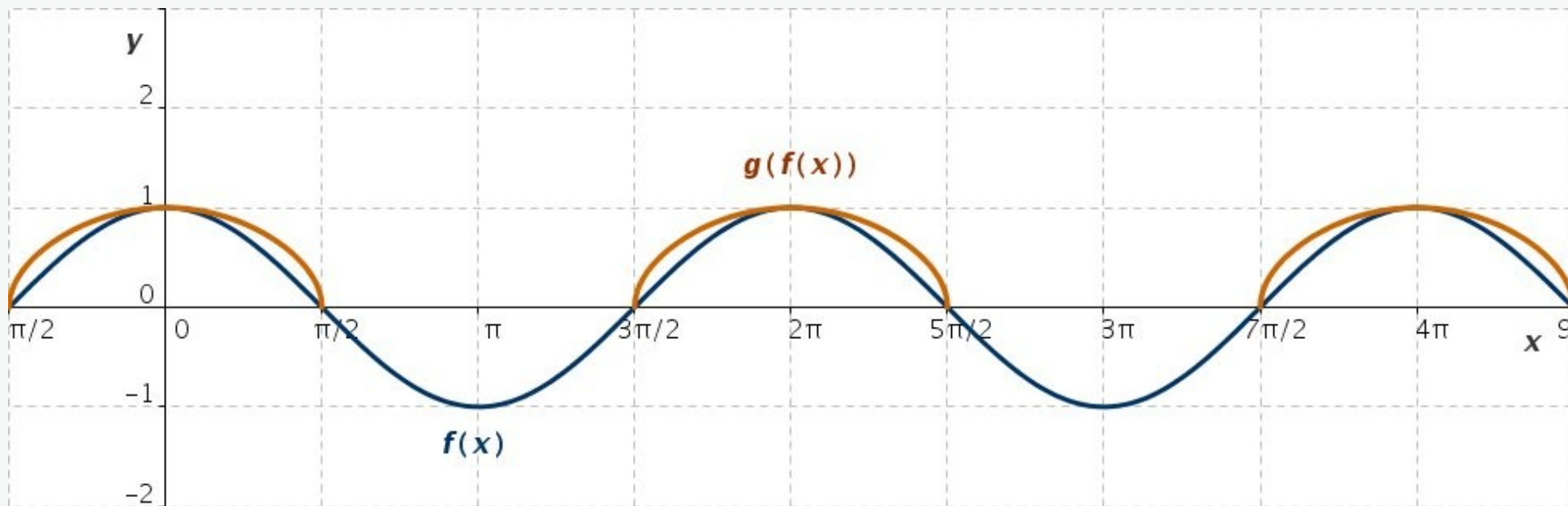


Abb. L4-2: Die Funktion $f(x)$ und die verkettete Funktion $g(f(x))$

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad g(f(x)) = \sqrt{\cos x}$$

$$D(g(f)) = \dots \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \right] \cup \dots$$

$$W(g(f)) = [0, 1]$$