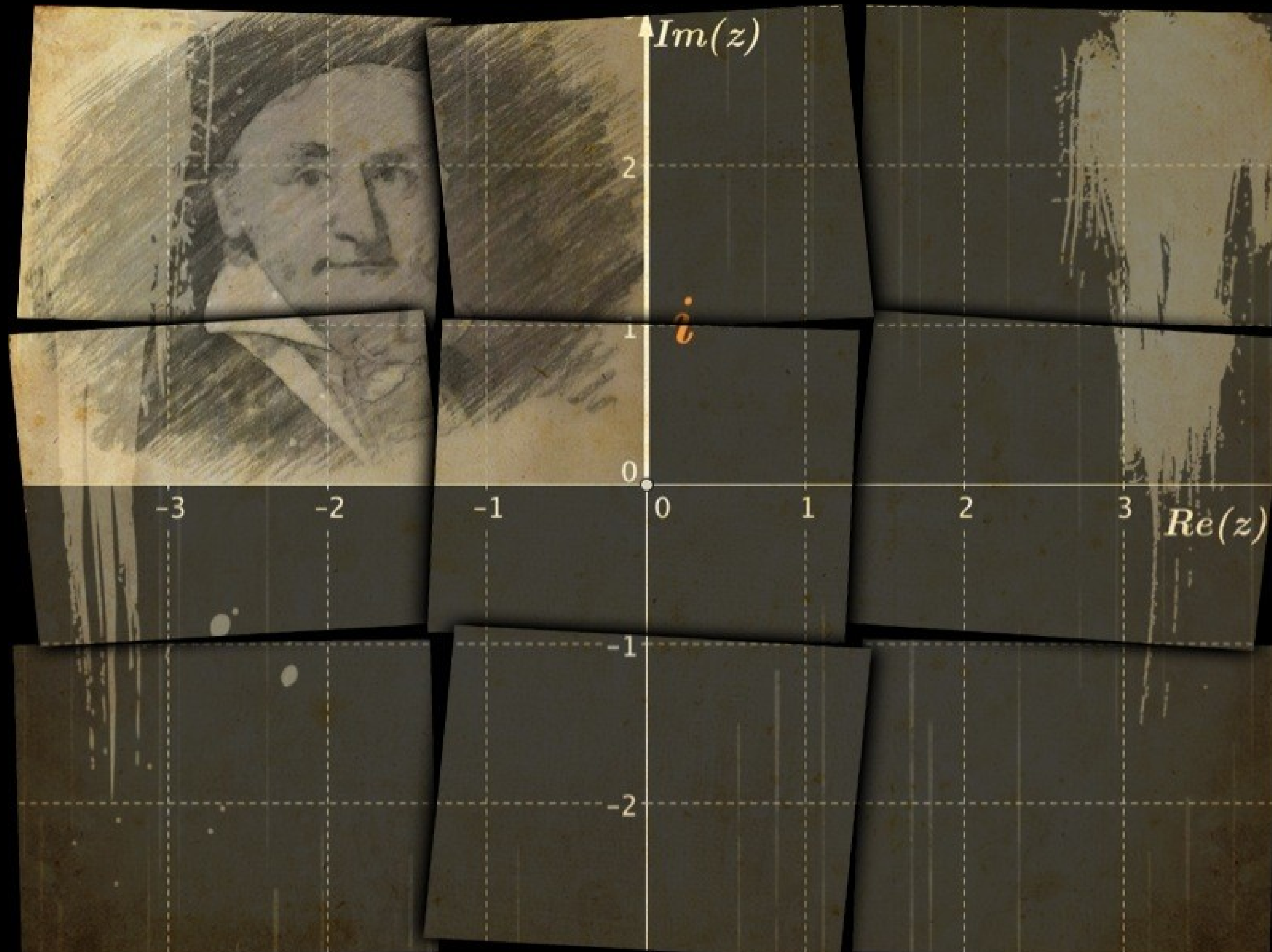


Die Menge der komplexen Zahlen

Kartesische (algebraische) Form einer komplexen Zahl:

$$\boxed{z = x + i\, y}$$

$x = Re\,(z)$ – Realteil von z

$y = Im\,(z)$ – Imaginärteil von z

Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{\, z \mid z = x + i\, y;\ \ x,\ y \in \mathbb{R} \,\}$$

Aufgabe:

Stellen Sie die Mengen der reellen, imaginären und komplexen Zahlen in einem Euler-Venn-Diagramm dar.

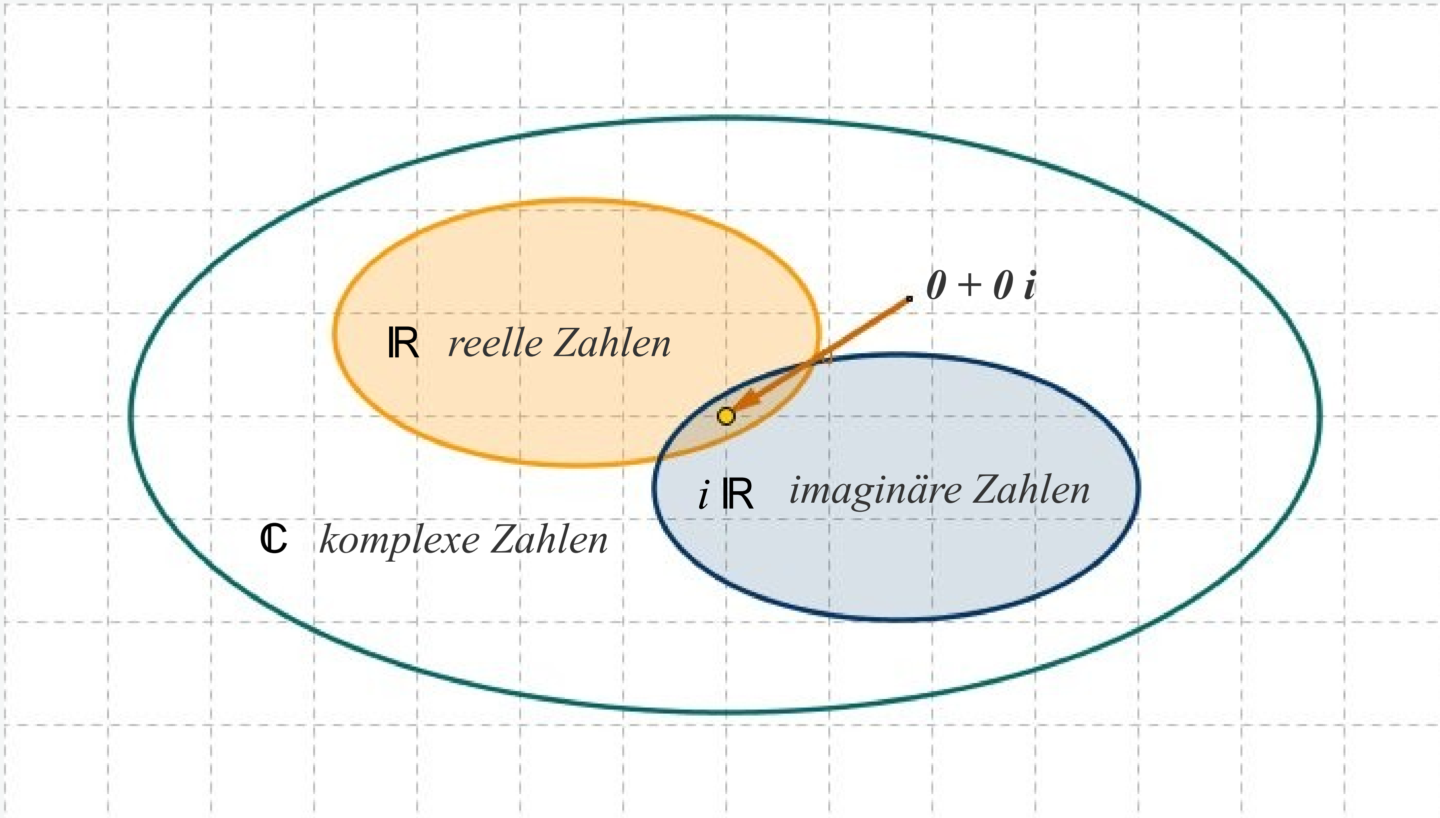


Abb. 3: Euler-Venn-Diagramm der Mengen der reellen, imaginären und komplexen Zahlen

Die reellen und imaginären Zahlen sind Teilmengen der komplexen Zahlen.

Wie kann man eine komplexe Zahl geometrisch darstellen?

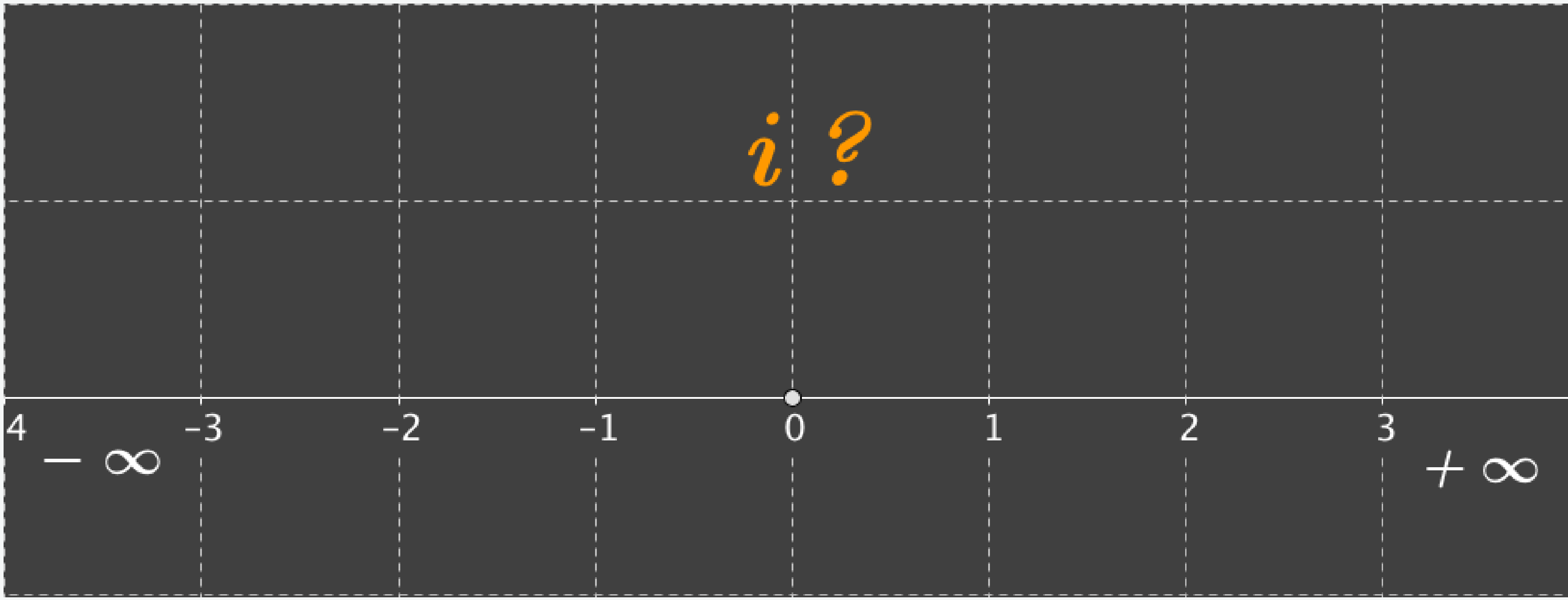


Abb. 4: Eine Darstellung der Zahlengeraden

Im Umgang mit reellen Zahlen ist oft die Vorstellung eines Zahlenstrahls hilfreich. Dies ist für die komplexen Zahlen nicht mehr ausreichend.

Um uns komplexe Zahlen geometrisch vorzustellen, stellen wir uns noch einmal die Frage: Wie können wir eine Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen, etwa

$$\sqrt{-1}$$

oder, was bedeutet die Gleichung

$$x^2 = -1$$

x steht für eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert, eine negative Zahl ergibt. Eine solche Zahl kann nicht positiv sein, da eine positive Zahl mal eine positive Zahl eine positive Zahl ergibt. Sie kann auch nicht negativ sein, weil das Produkt zweier negativen Zahlen ebenfalls eine positive Zahl ist. Folglich kann es auf unserer Geraden der reellen Zahlen keine Zahl geben, welche die Quadratwurzel einer negativen Zahl ist.

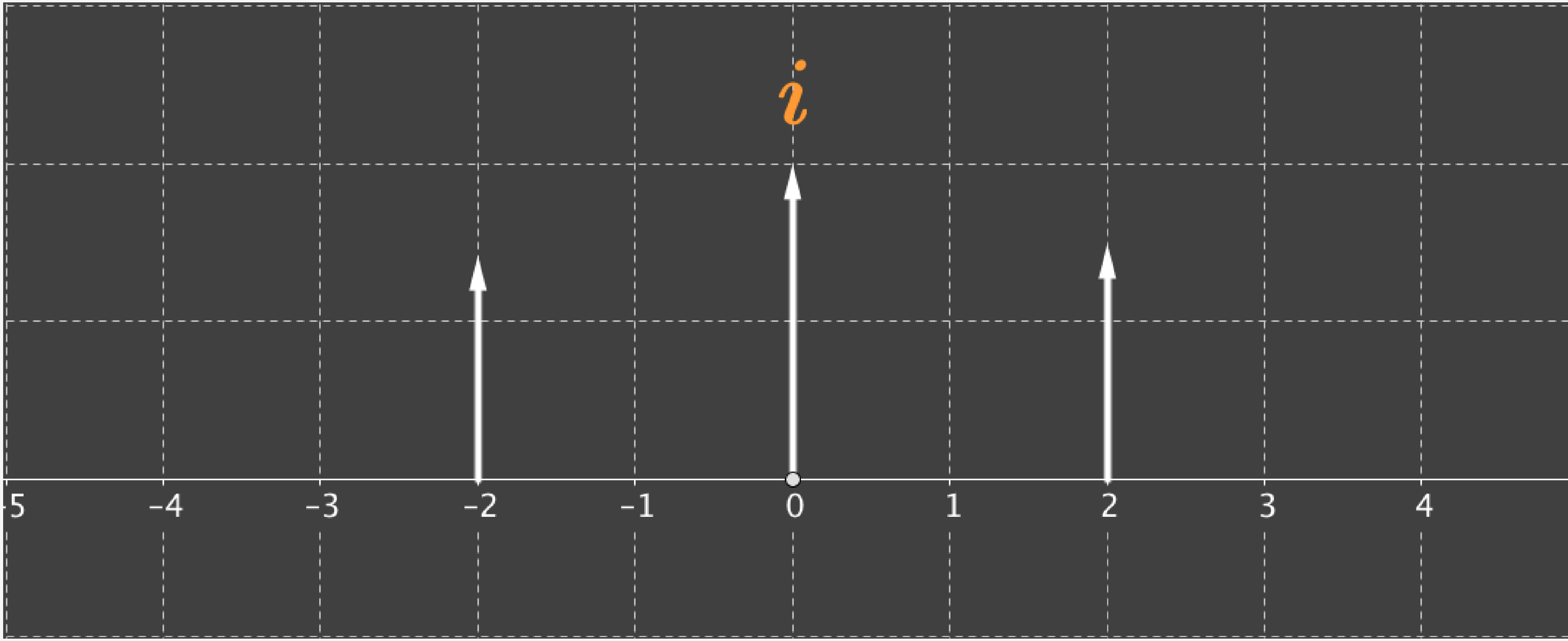


Abb. 5-1: Zur geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen

Eine andere geometrische Vorstellung liefert uns hier ein besseres Werkzeug. Man muss sich von dem Konzept, dass Zahlen auf einer Geraden angeordnet sind, lösen. Da Realteil und Imaginärteil voneinander unabhängig sind, fassen wir beide als kartesische Koordinaten in einer Ebene auf – der Gaußsche Zahlenebene.

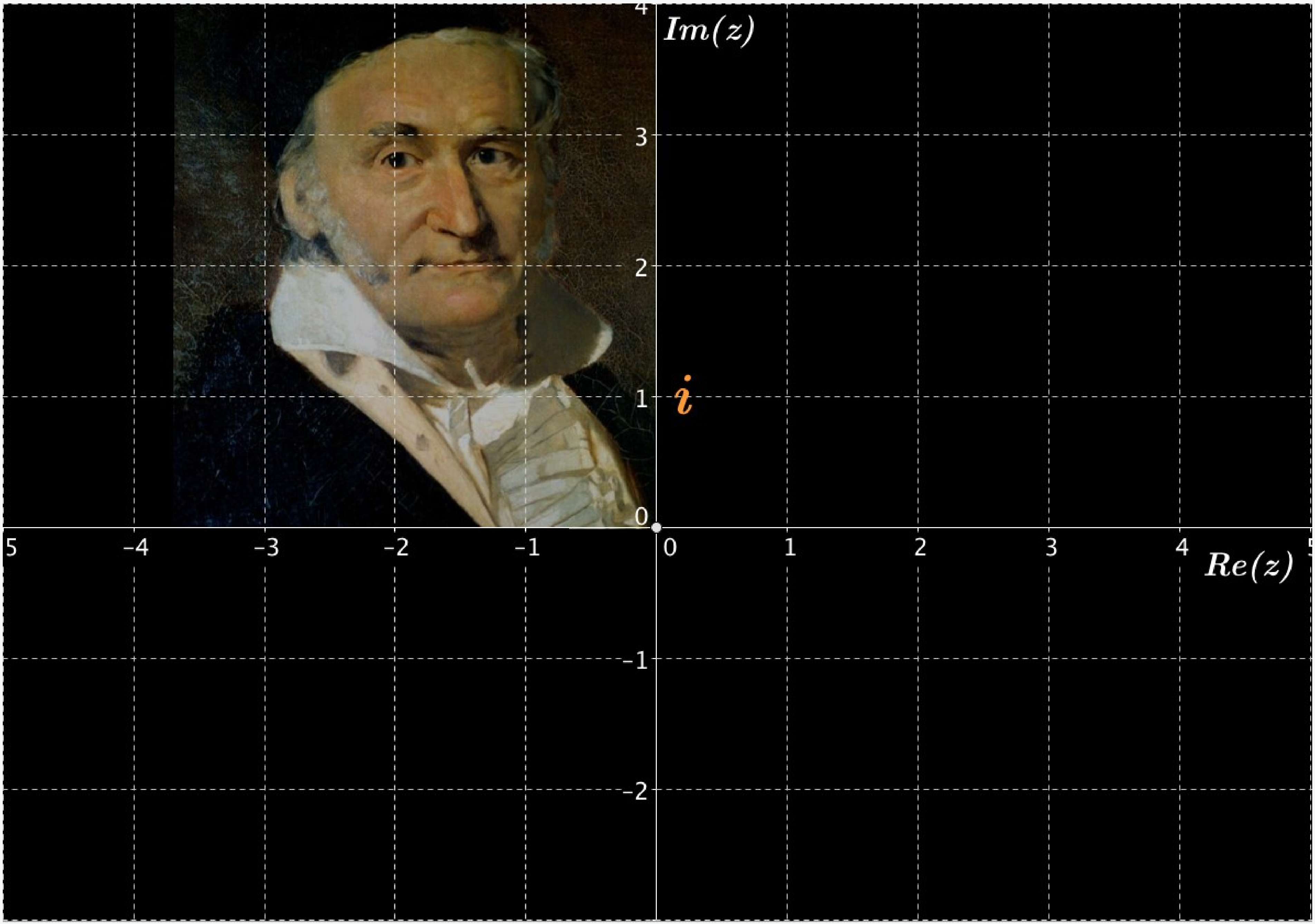


Abb. 5-2: Gaußsche Zahlenebene

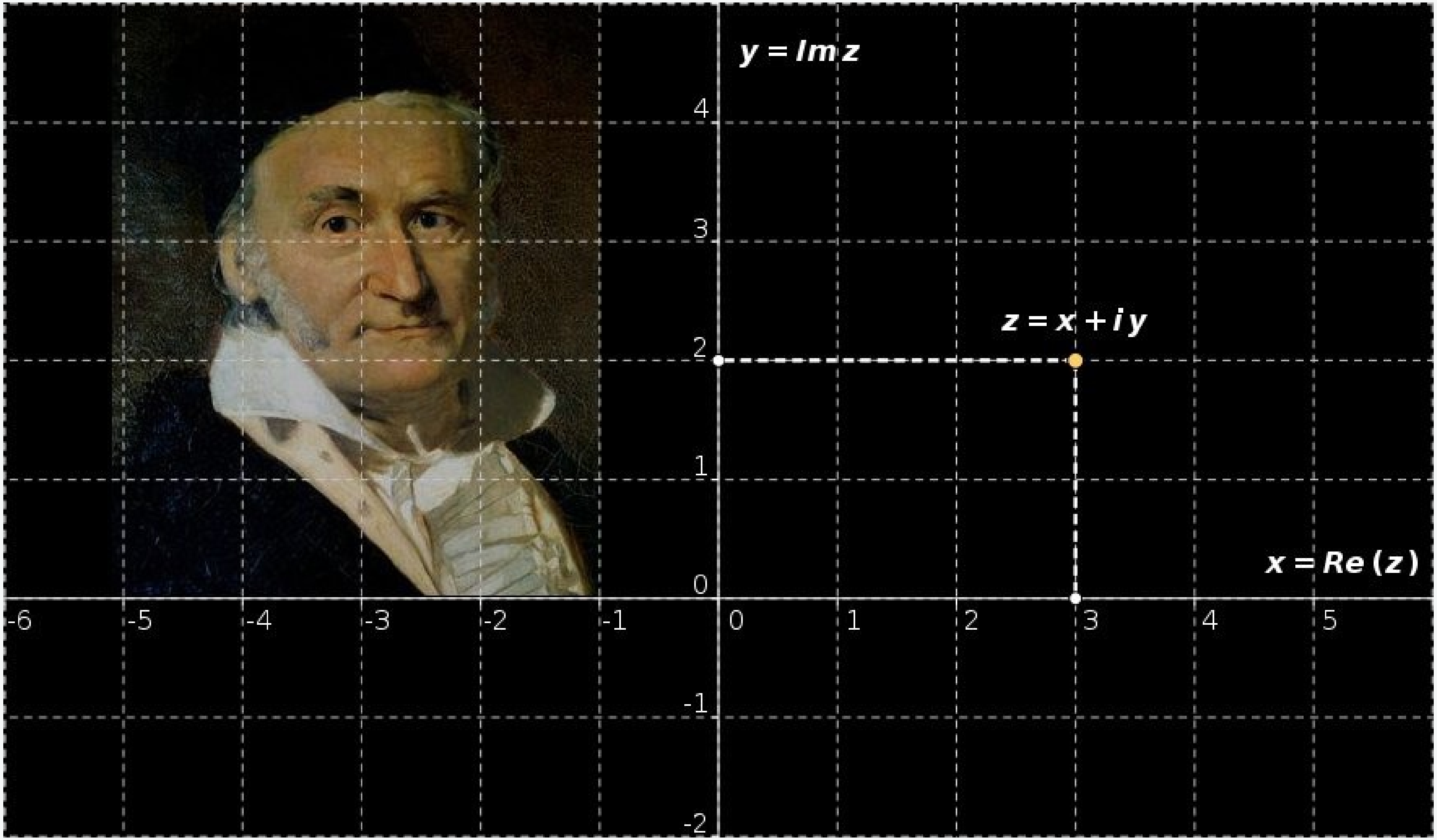


Abb. 5-3: Die Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + i\,y$ in der Gaußschen Zahlenebene

Re (z), Im (z) – kartesische Koordinaten eines Punktes der *x,y*-Ebene.

reelle Zahlen	$z = x + i \cdot 0 = x$	$\operatorname{Im}(z) = 0$	reelle Achse
imaginäre Zahlen	$z = 0 + i \cdot y = i\,y$	$\operatorname{Re}(z) = 0$	imaginäre Achse

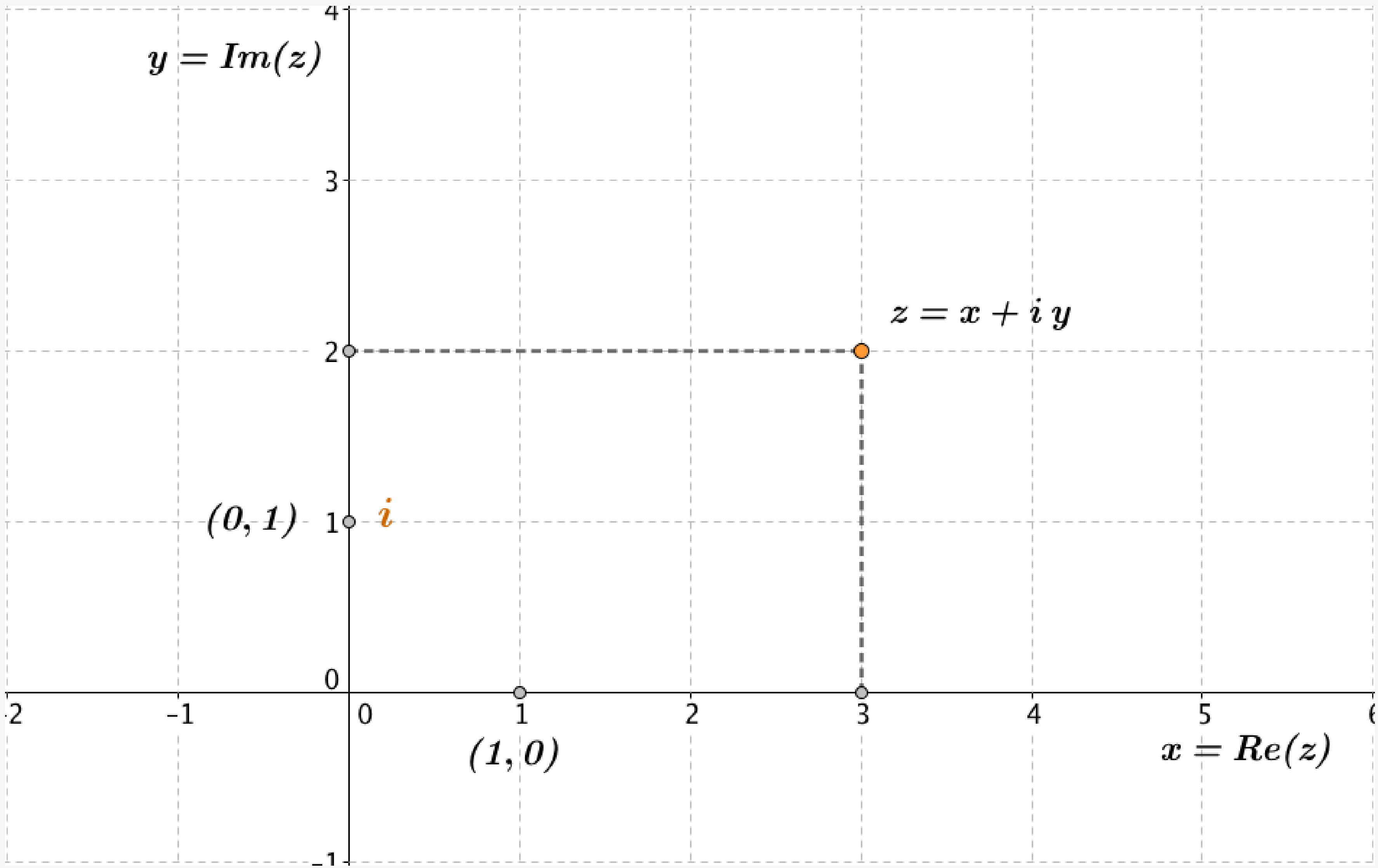


Abb. 6-1: Darstellung einer komplexen Zahl durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene. Der Punkt $z = x + i\,y$ entspricht der komplexen Zahl $z = 3 + 2\,i$

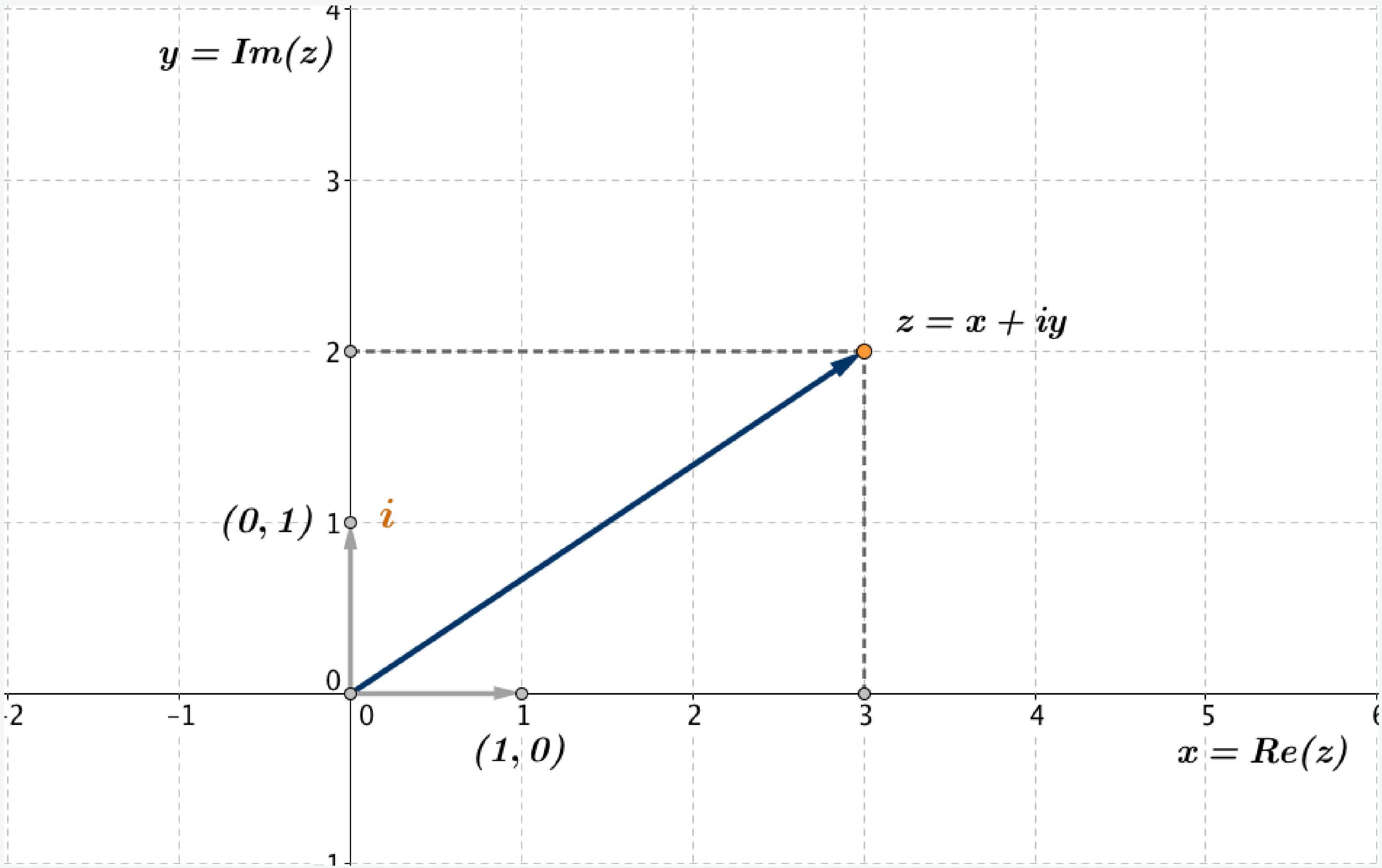


Abb. 6-2: Darstellung einer komplexen Zahl durch einen Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene. Der Punkt $z = x + i\,y$ entspricht der komplexen Zahl $z = 3 + 2\,i$

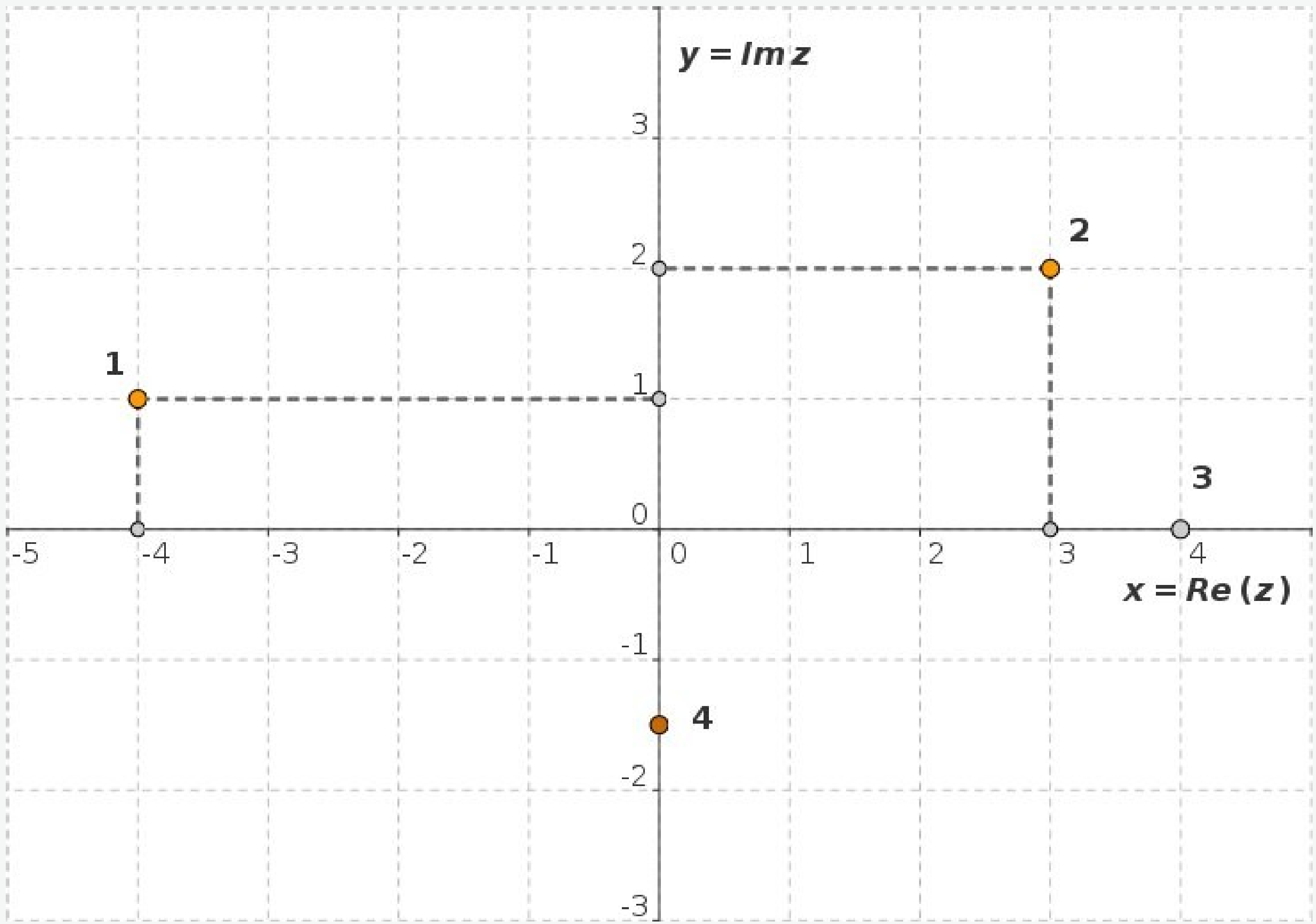


Abb. 6-3: Darstellung komplexer Zahlen durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene

$1: \ z_1 = -4 + i, \qquad 2: \ z_2 = 3 + 2i, \qquad 3: \ z_3 = 4 + 0i, \qquad 4: \ z_4 = 0 - 1.5i$

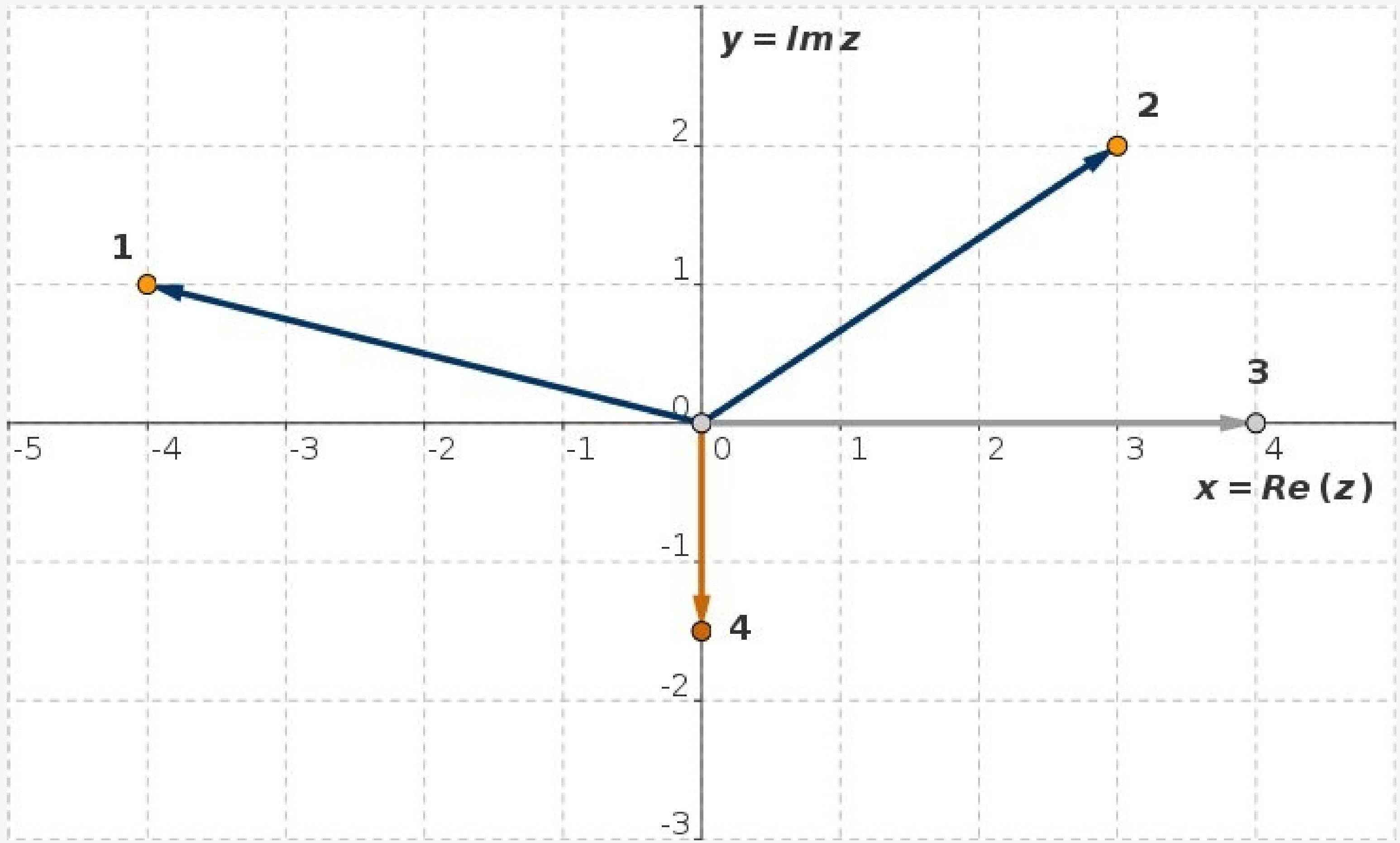


Abb. 6-4: Darstellung komplexer Zahlen durch Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene

Der Zeiger ist nicht mit einem Vektor zu verwechseln !

- Der Zeiger ist eine geometrische Darstellungsform der komplexen Zahl.
- Zeiger und Vektoren unterliegen unterschiedlichen Rechengesetzen.

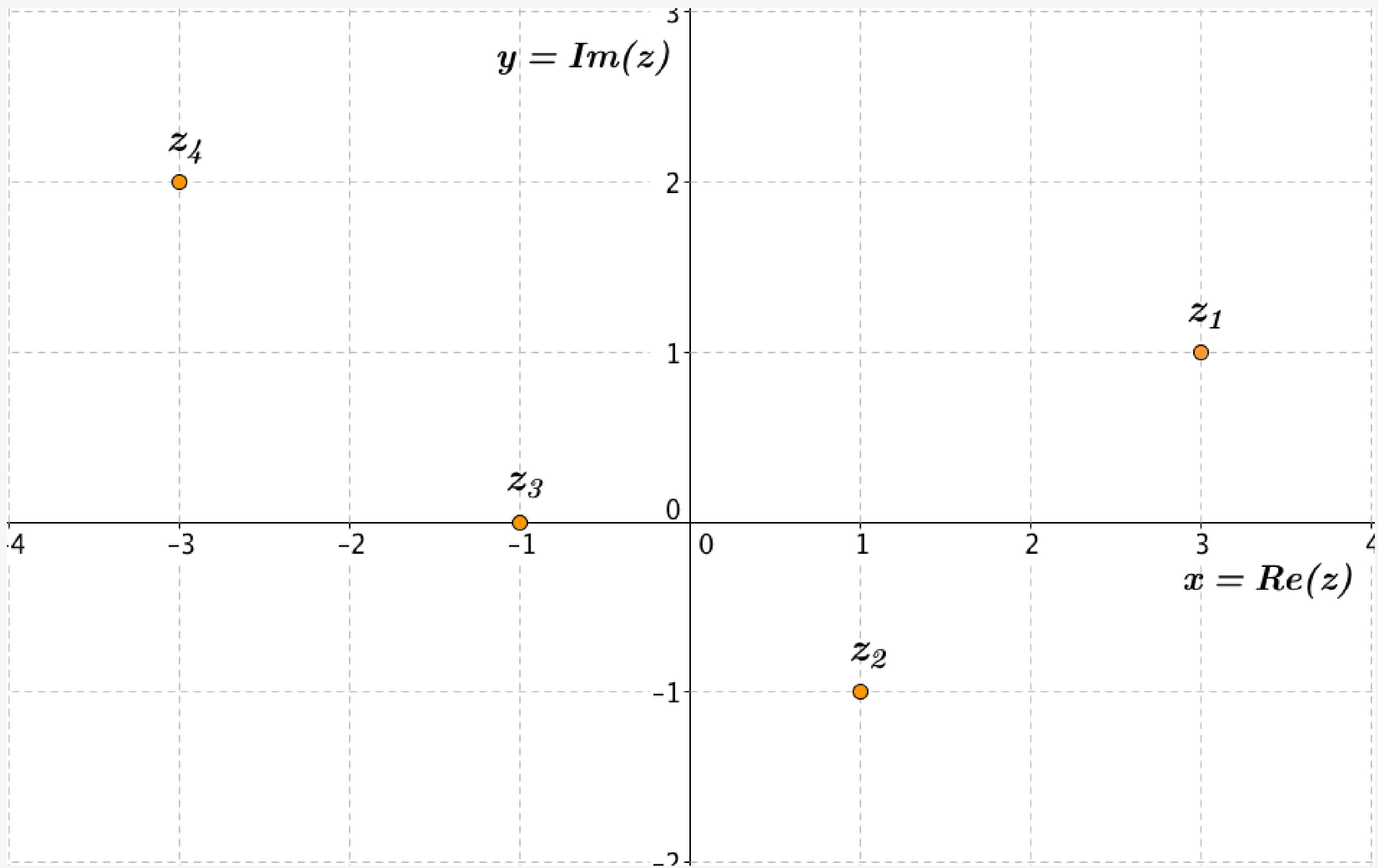


Abb. 7-1: Graphische Darstellung der Aufgabe 1a

Aufgabe 1a: Bestimmen die Koordinaten der komplexen Zahlen.

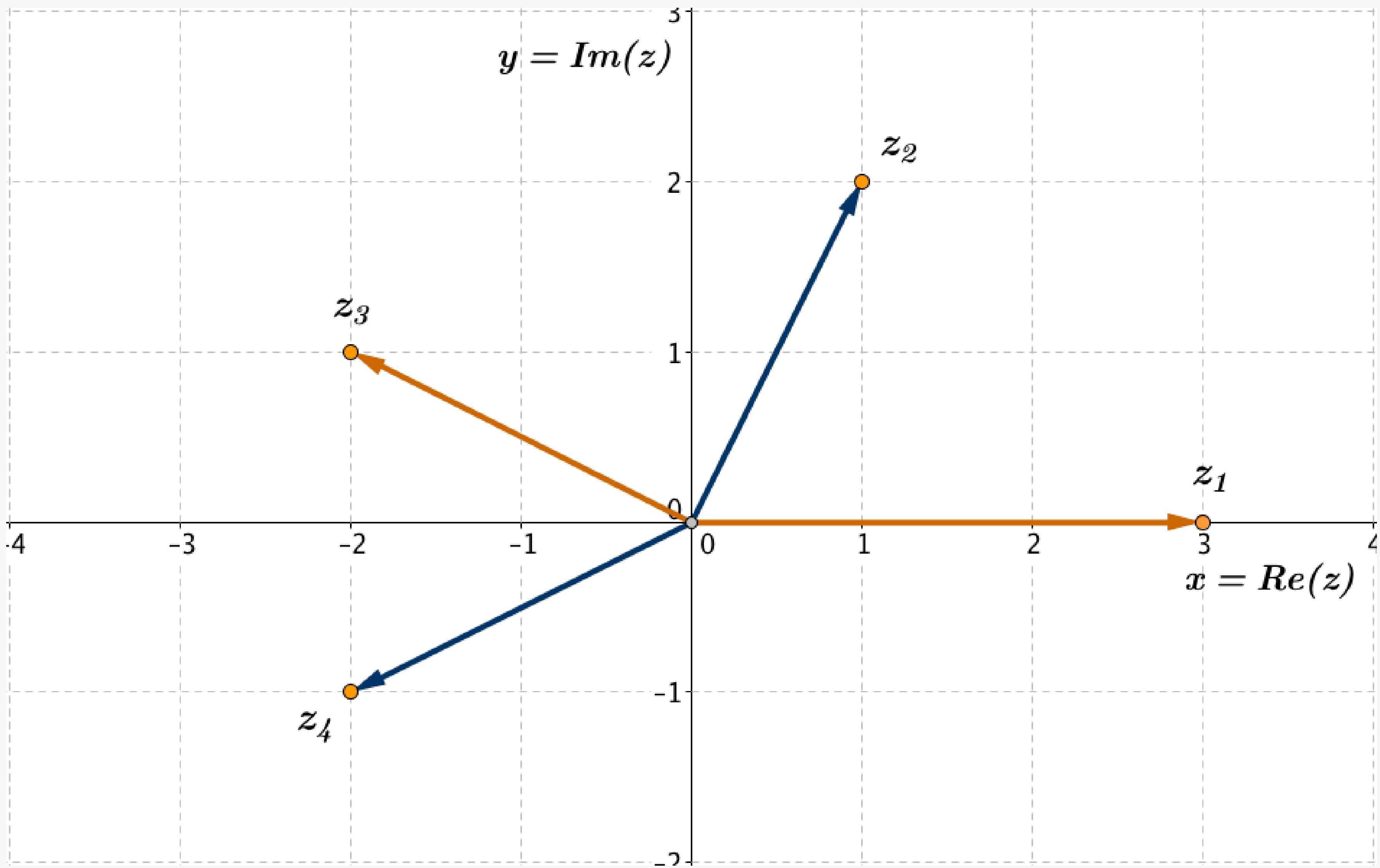
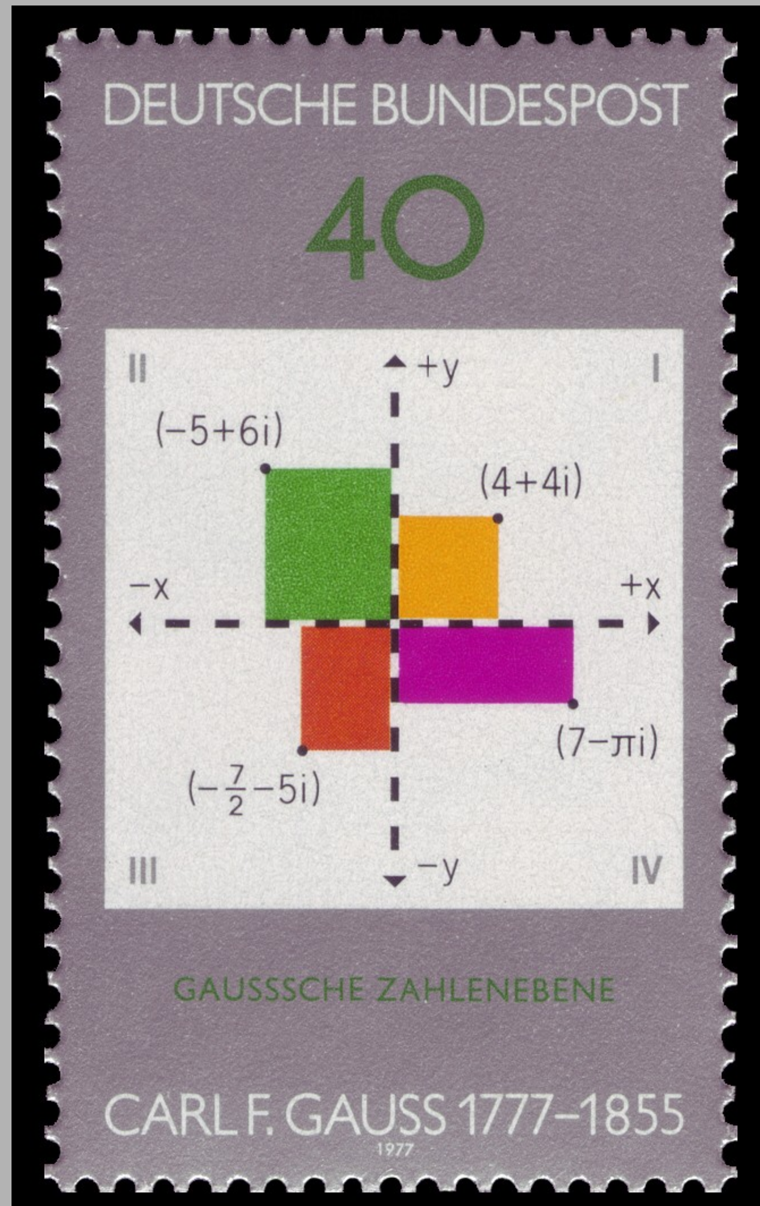


Abb. 7-2: Graphische Darstellung der Aufgabe 1b

Aufgabe 1b: Bestimmen die Koordinaten der komplexen Zahlen.

$a)\quad z_1 = 3 + i, \qquad z_2 = 1 - i, \qquad z_3 = -1, \qquad z_4 = -3 + 2i$

$b)\quad z_1 = 3, \qquad z_2 = 1 + 2i, \qquad z_3 = -2 + i, \qquad z_4 = -2 - i$


DEUTSCHE BUNDESPOST
40
II
+y
I
(−5+6i)
(4+4i)
−x
+x
(7−πi)
(−7/2−5i)
III
−y
IV
GAUSSSCHE ZAHLENEBENE
CARL F. GAUSS 1777–1855
1977