



# DETERMINANTEN UND FLÄCHEN

## Aufgaben



*Aufgaben:*

Bestimmen Sie die Flächen in den folgenden Aufgaben mit  
Determinanten zweiter Ordnung

## Berechnung einer Fläche: Aufgabe 1

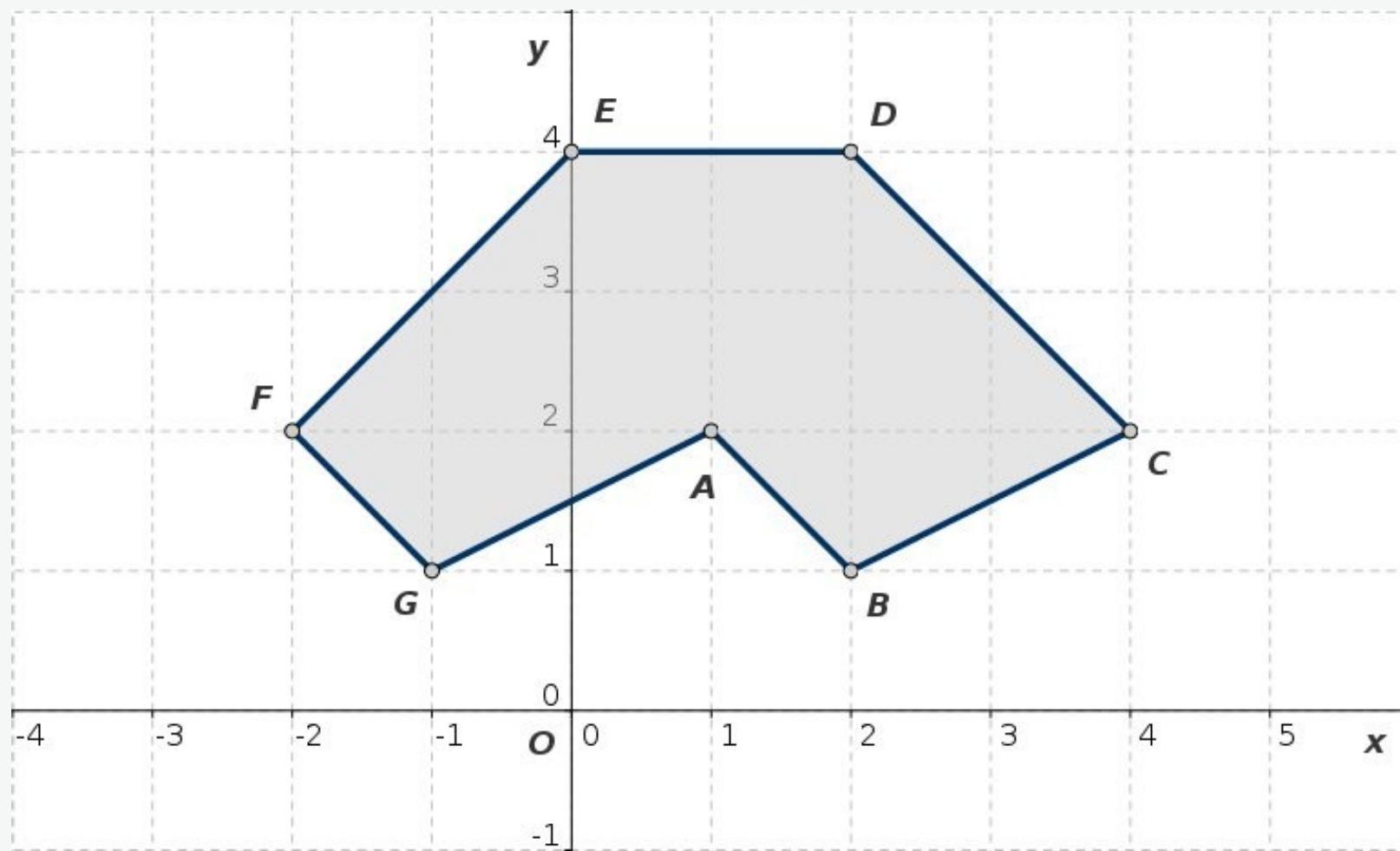


Abb. 4-1: Die Fläche ABCDEFG der Aufgabe 1

$$A(1, 2), \quad B(2, 1), \quad C(4, 2), \quad D(2, 4), \quad E(0, 4), \quad F(-2, 2), \quad G(-1, 1)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 1 (1 Variante)

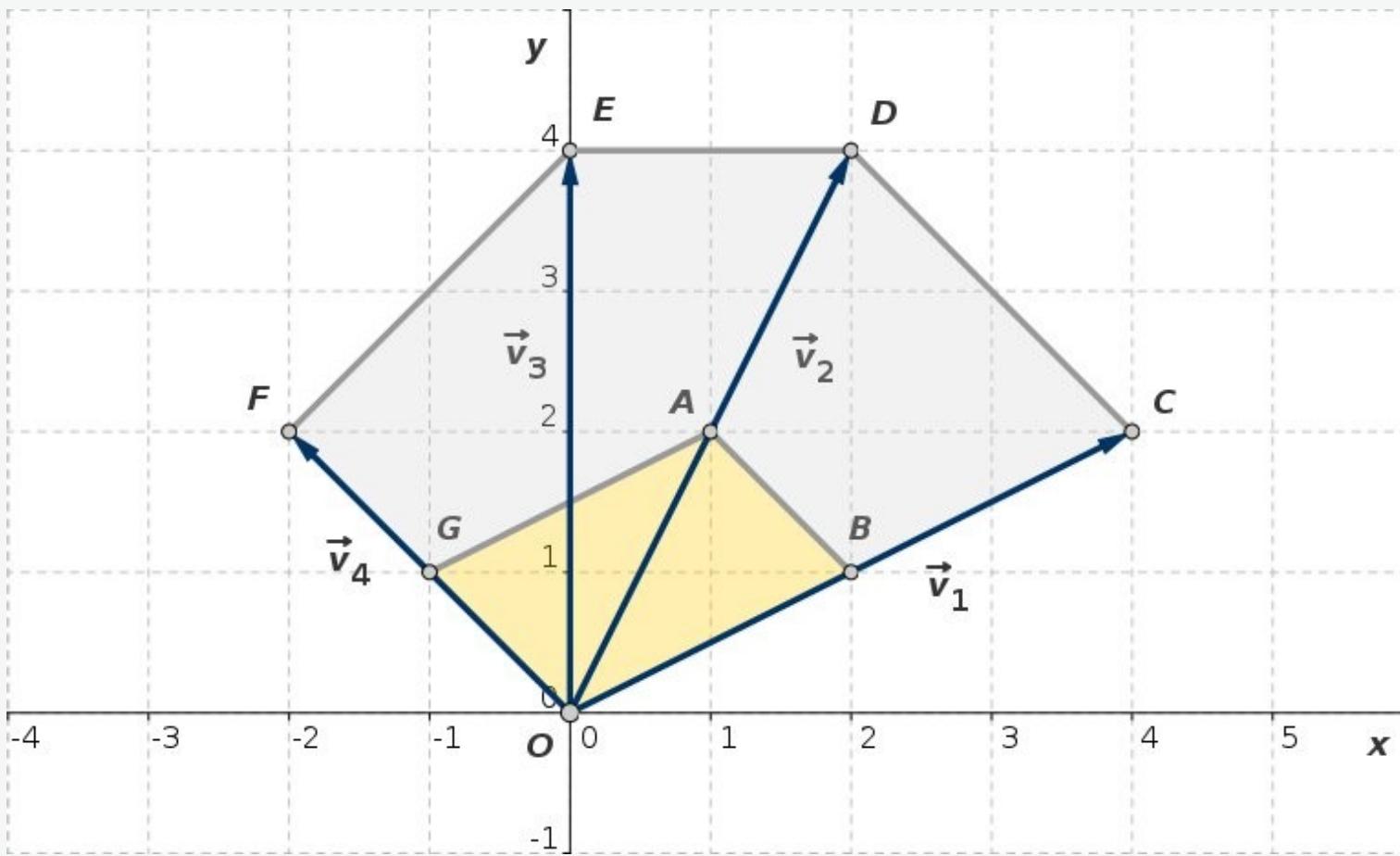


Abb. 4-2: Zur Berechnung der Fläche der Aufgabe 1

$$F = F_{OCDEF} - F_{OBAG}$$

$$2F_{OCDEF} = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 1 (1 Variante)

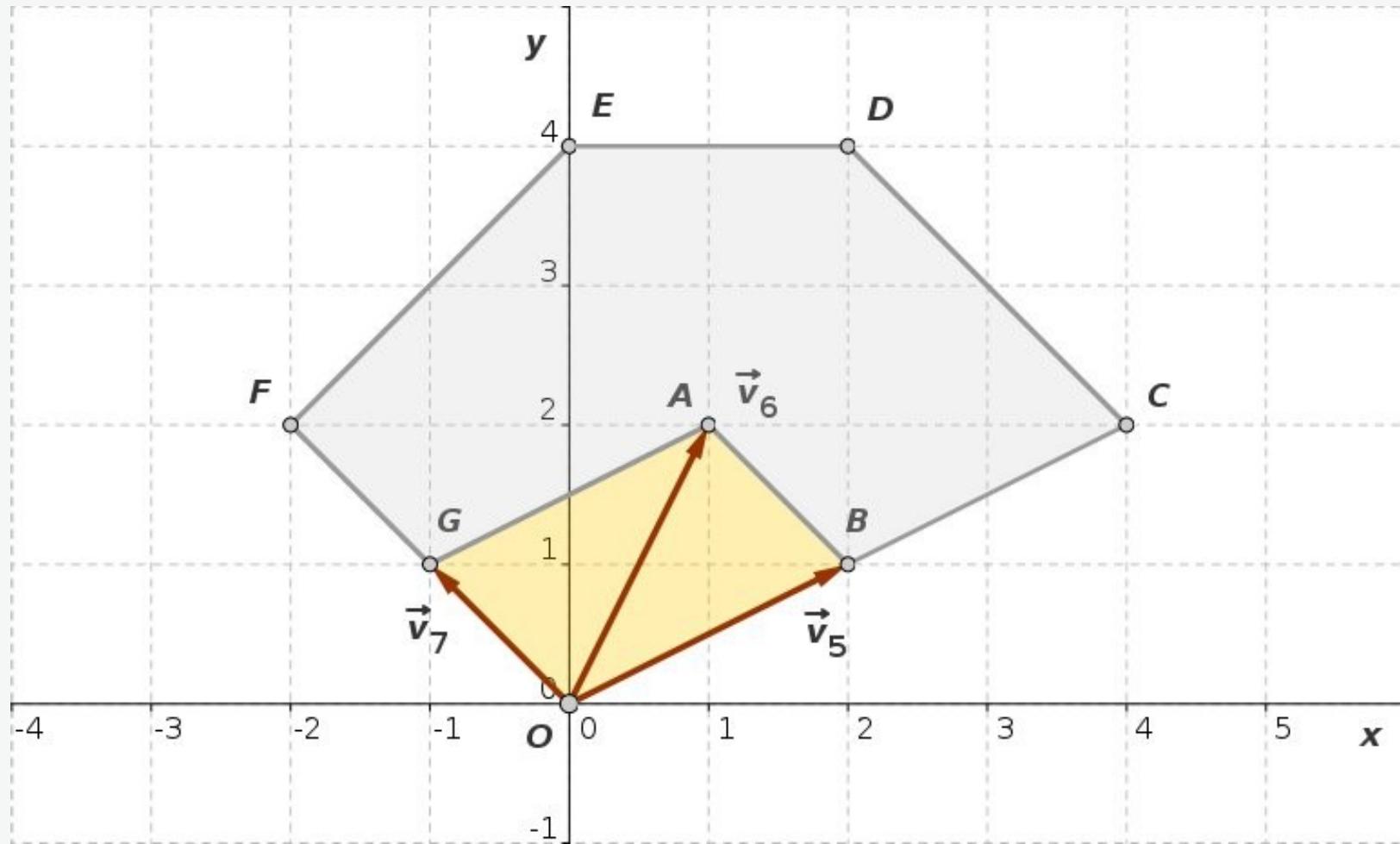


Abb. 4-3: Zur Berechnung der Fläche der Aufgabe 1

$$2 F_{OBAG} = \det(\vec{v}_5, \vec{v}_6) + \det(\vec{v}_6, \vec{v}_7)$$

$$F_{OBAG} = \det(\vec{v}_5, \vec{v}_7)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 1 (1 Variante)

$$2 F_{OCDEF} = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_4) = \\ = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 28 \text{ FE}$$

$$F_{OCDEF} = 14 \text{ FE}$$

$$2 F_{OBAG} = \det(\vec{v}_5, \vec{v}_6) + \det(\vec{v}_6, \vec{v}_7) = \\ = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \text{ FE}, \quad F_{OBSG} = 3 \text{ FE}$$

$$F_{OBAG} = \det(\vec{v}_5, \vec{v}_7) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \text{ FE}$$

$$F = F_{OCDEF} - F_{OBAG} = 14 - 3 = 11 \text{ FE}$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 1 (2 Variante)

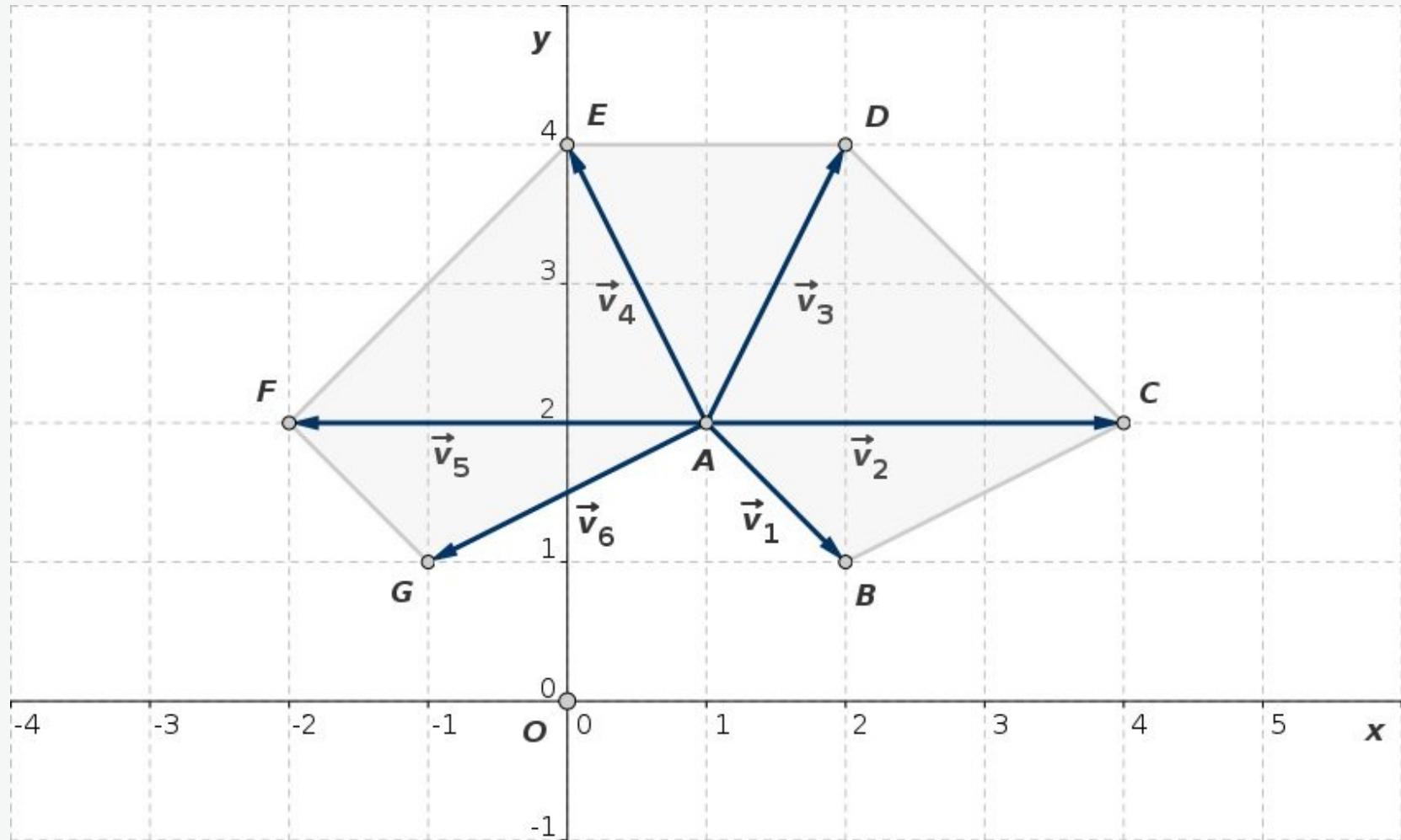


Abb. 4-4: Zur Berechnung der Fläche der Aufgabe 1

$$A(1, 2), \quad B(2, 1), \quad C(4, 2), \quad D(2, 4), \quad E(0, 4), \quad F(-2, 2), \quad G(-1, 1)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 1 (2 Variante)

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (1, -1), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (3, 0), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{AD} = (1, 2)$$

$$\vec{v}_4 = \overrightarrow{AE} = (-1, 2), \quad \vec{v}_5 = \overrightarrow{AF} = (-3, 0), \quad \vec{v}_6 = \overrightarrow{AG} = (-2, -1)$$

$$2 F_{ABCDEFG} = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_4) + \det(\vec{v}_4, \vec{v}_5) + \\ + \det(\vec{v}_5, \vec{v}_6) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \\ = 22 \text{ FE}$$

$$F_{ABCDEFG} = 11 \text{ FE}$$

## Berechnung einer Fläche: Aufgabe 2

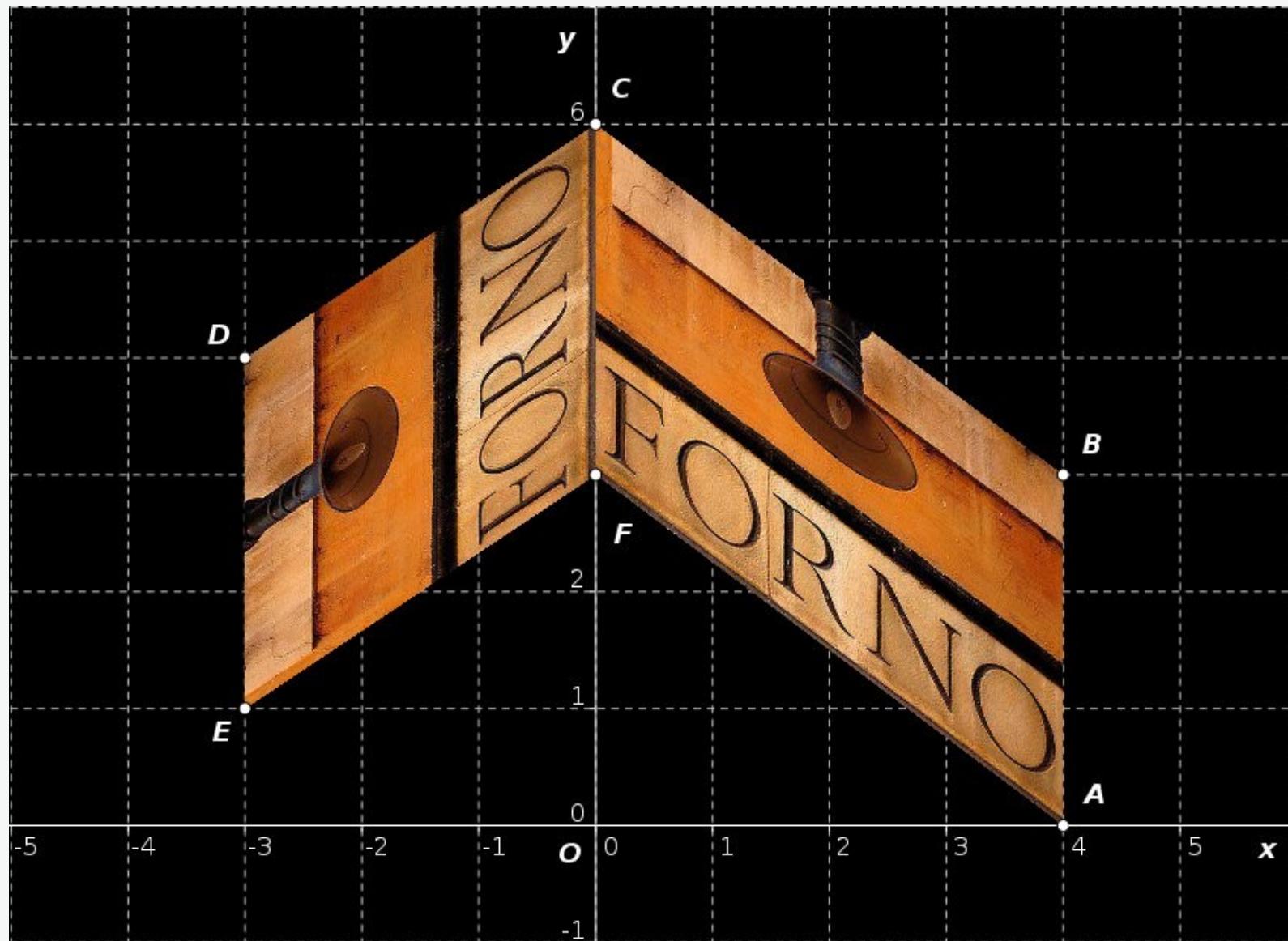


Abb. 5-1: Die Fläche ABCDEF der Aufgabe 2

$A (4, 0), \quad B (4, 3), \quad C (0, 6), \quad D (-3, 4), \quad E (-3, 1), \quad F (0, 3)$

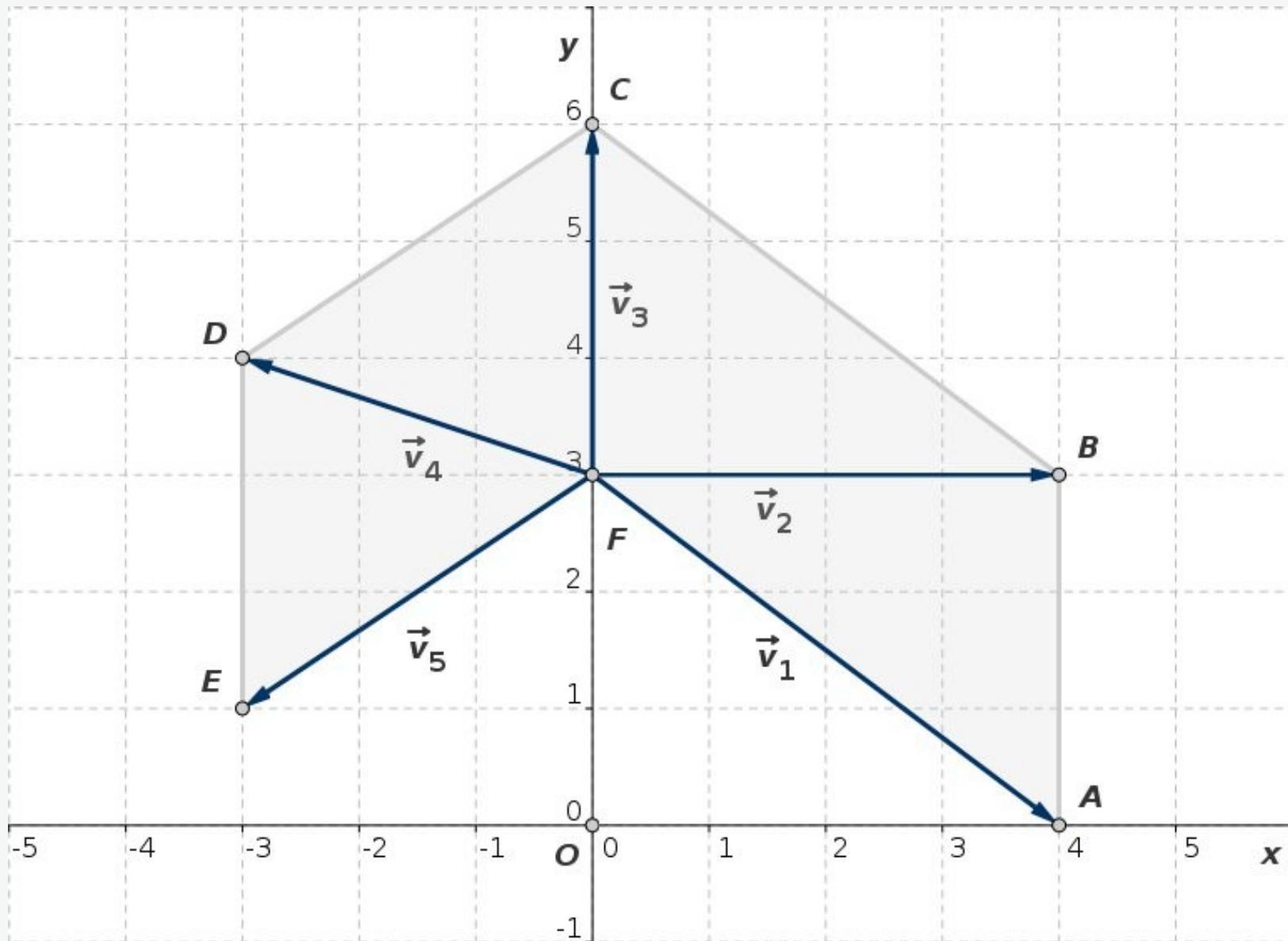


Abb. 5-2: Die Fläche ABCDEF, dargestellt durch Vektoren

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{FA} = (4, -3), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{FB} = (4, 0), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{FC} = (0, 3)$$

$$\vec{v}_4 = \overrightarrow{FD} = (-3, 1), \quad \vec{v}_5 = \overrightarrow{FE} = (-3, -2)$$

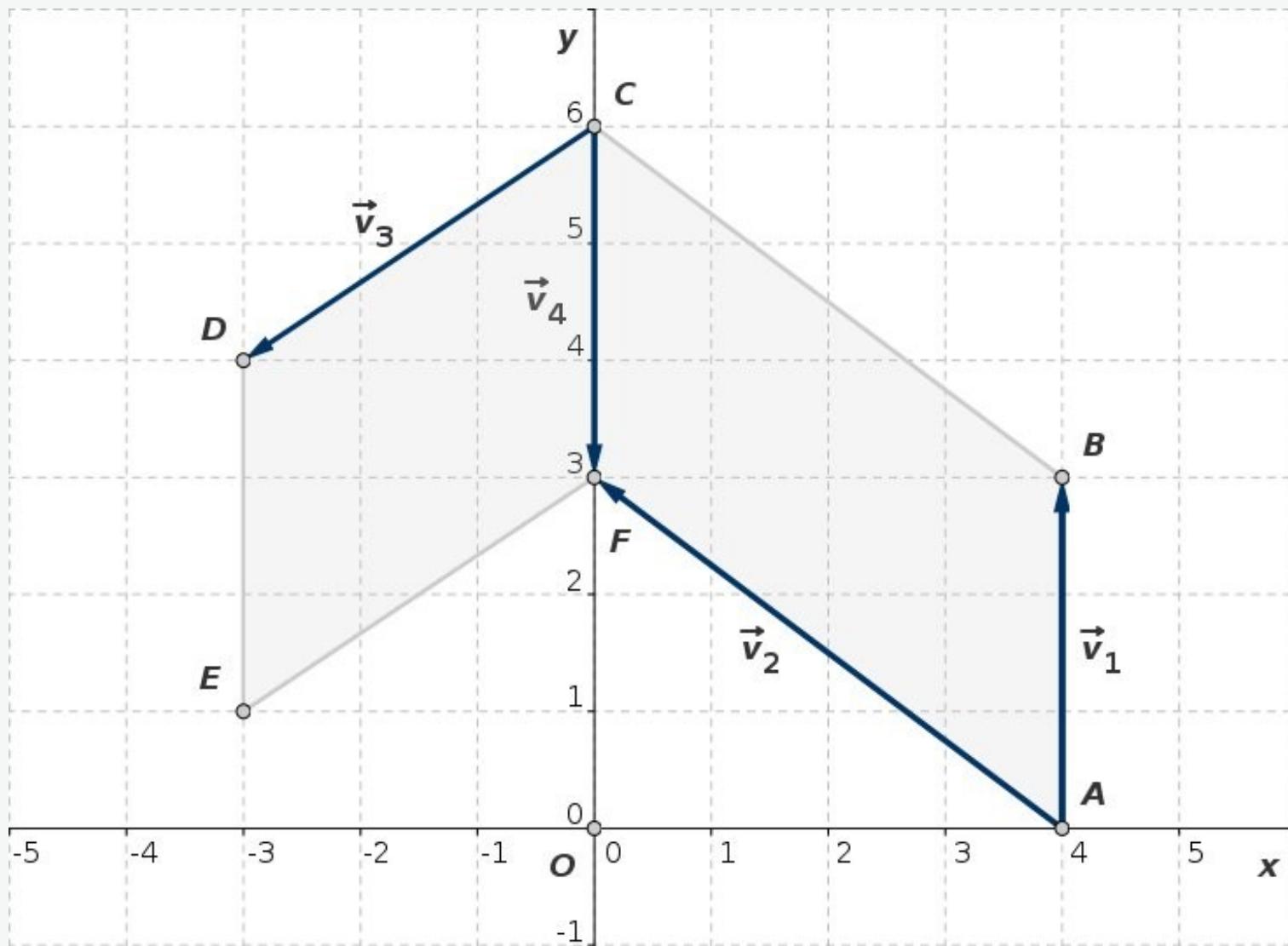


Abb. 5-3: Die Fläche ABCDEF, dargestellt durch Vektoren

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (0, 3), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{AF} = (-4, 3), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{CD} = (-3, -2), \quad \vec{v}_4 = \overrightarrow{CF} = (0, -3)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 2

Lösung entsprechend Abbildung 6-2:

$$\begin{aligned} 2 F_{ABCDEF} &= \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_4) + \det(\vec{v}_4, \vec{v}_5) = \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 12 + 12 + 9 + 9 = 42 \text{ FE}, \quad F_{ABCDEF} = 21 \text{ FE} \end{aligned}$$

Lösung entsprechend Abbildung 6-3:

$$\begin{aligned} F_{ABCDEF} &= \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_4) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 12 + 9 = 21 \text{ FE} \end{aligned}$$

## Berechnung einer Fläche: Aufgabe 3

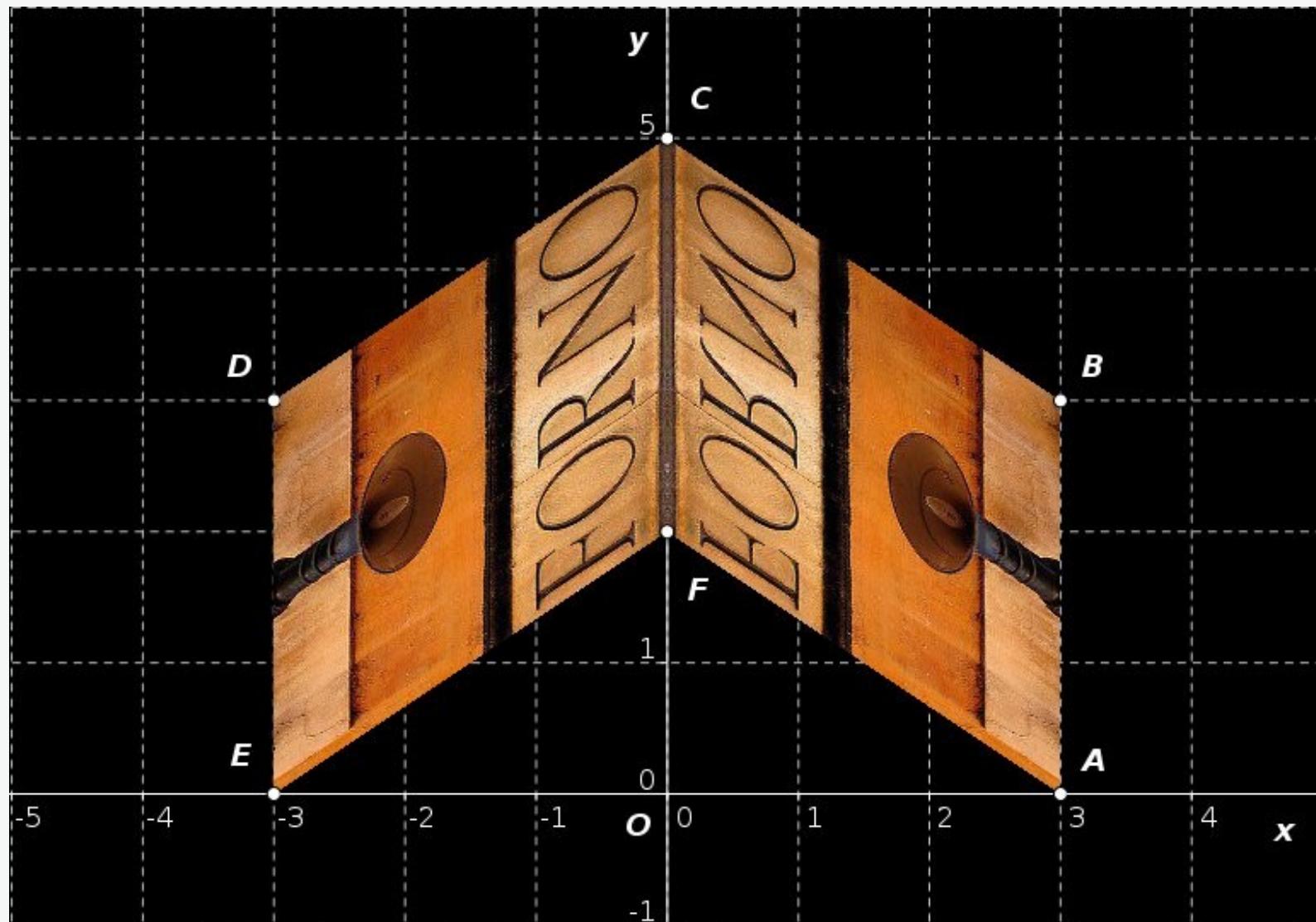


Abb. 6-1: Die Fläche ABCDEF der Aufgabe 3

$A (3, 0), \quad B (3, 3), \quad C (0, 5), \quad D (-3, 3), \quad E (-3, 0), \quad F (0, 2)$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 3a

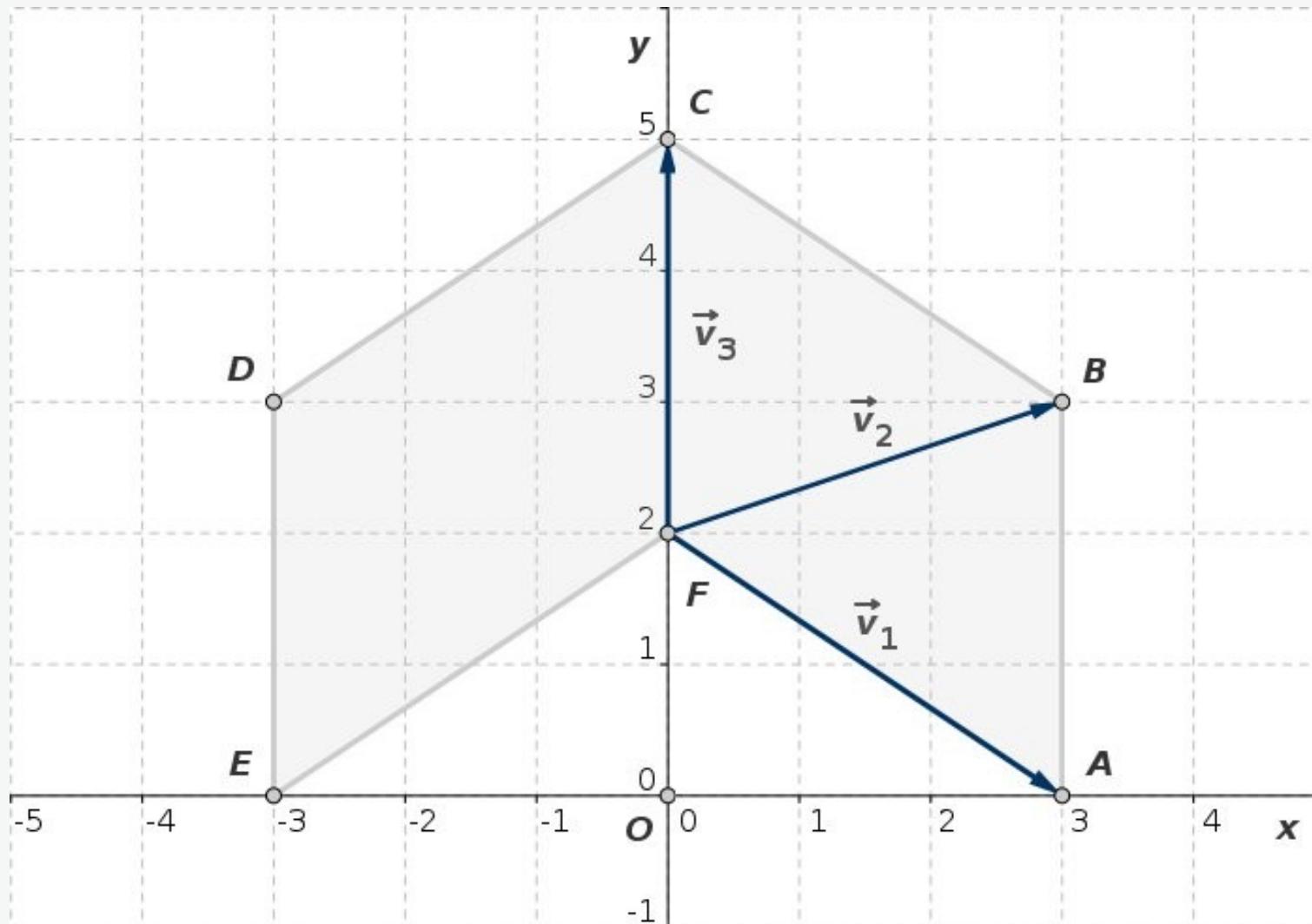


Abb. 6-2: Die Fläche ABCDEF, dargestellt durch Vektoren

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{FA} = (3, -2), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{FB} = (3, 1), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{FC} = (0, 3)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 3b

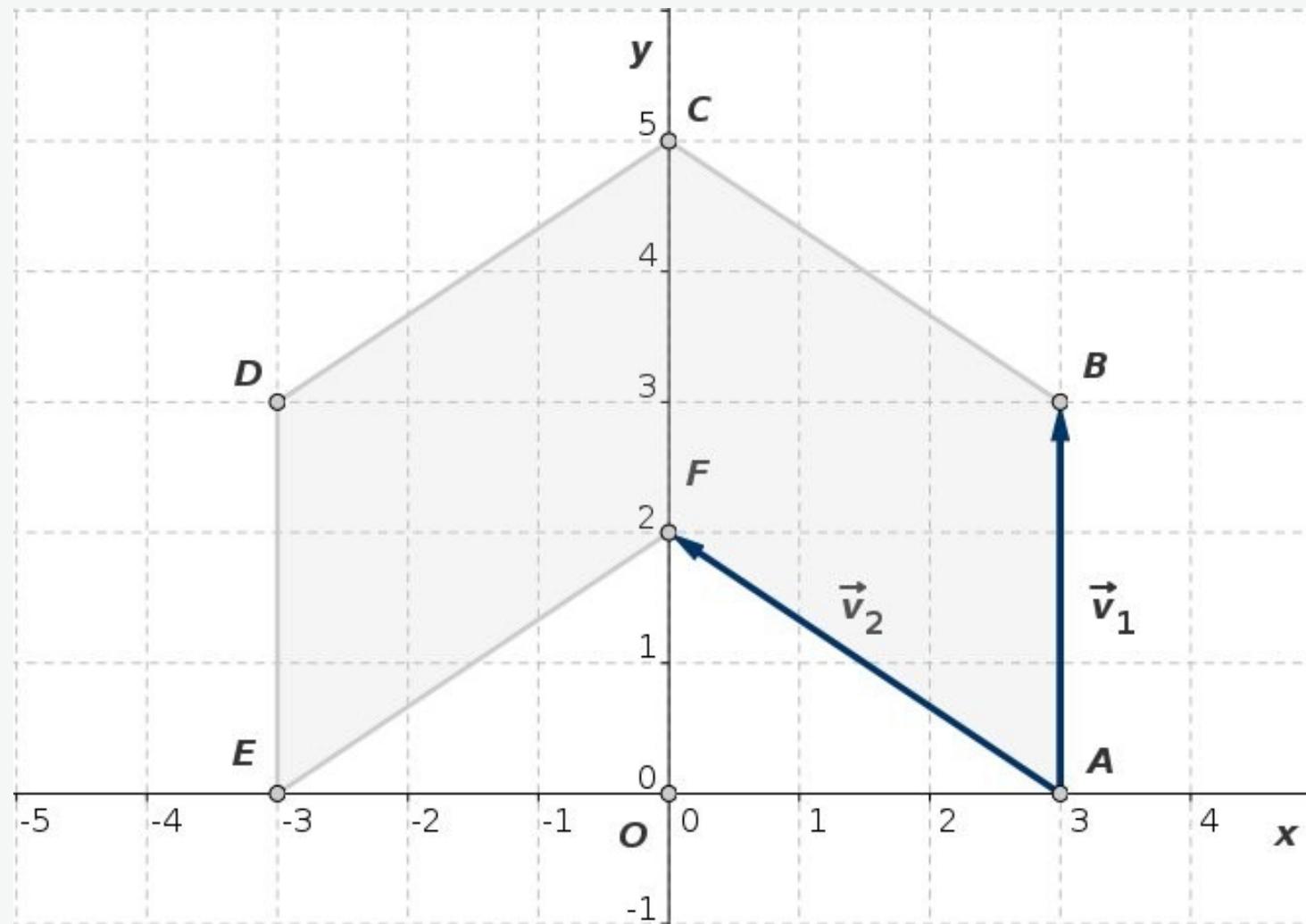


Abb. 6-3: Die Fläche ABCDEF, dargestellt durch Vektoren

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (0, 3), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{AF} = (-3, 2)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 3

Lösung entsprechend Abbildung 7-2:

$$\begin{aligned} F_{ABCDEF} &= 2 F_{ABCF} = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 9 = 18 \text{ FE} \end{aligned}$$

Lösung entsprechend Abbildung 7-3:

$$F_{ABCDEF} = 2 F_{ABCF} = 2 \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 \text{ FE}$$

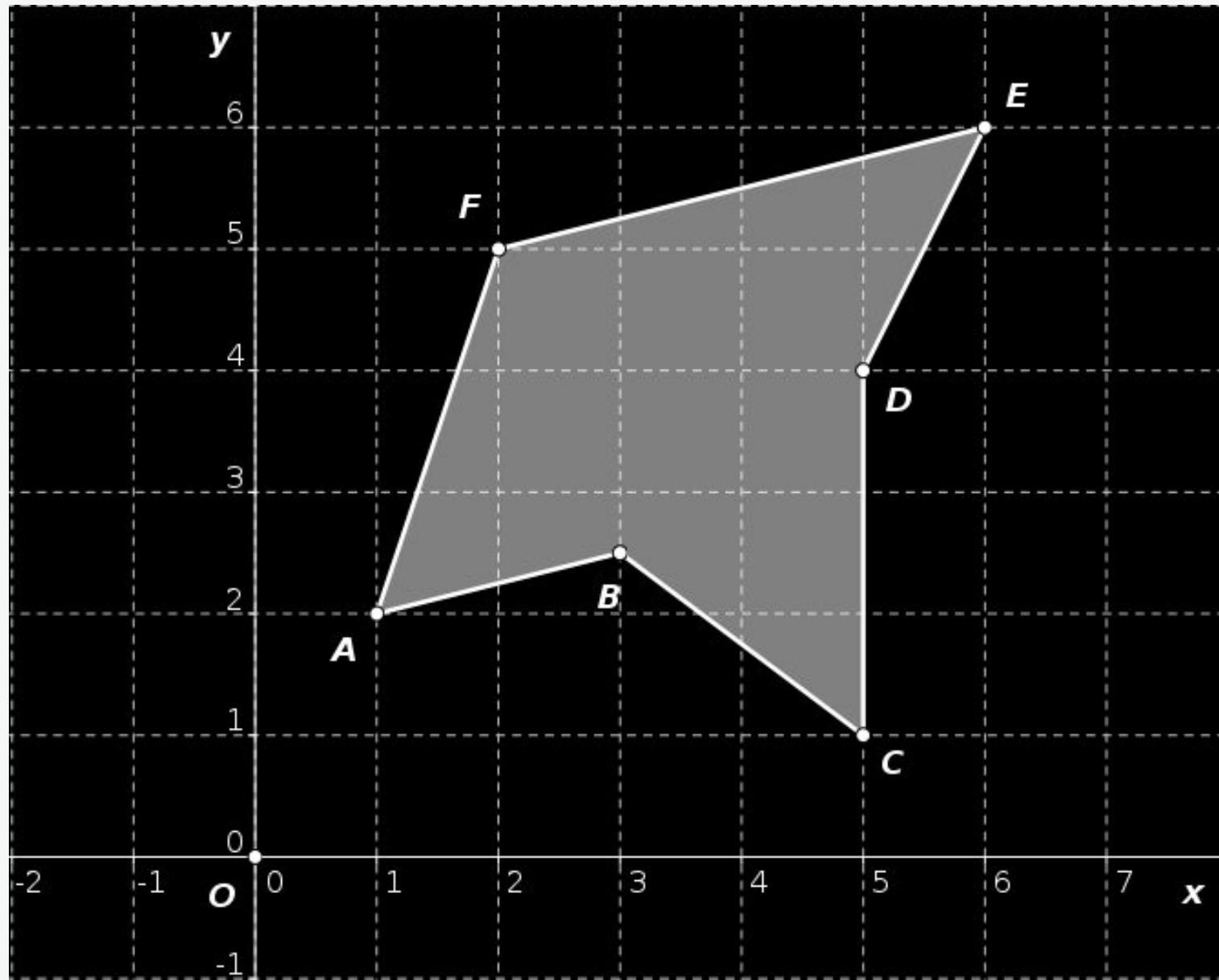


Abb. 7-1: Die Fläche ABCDEF der Aufgabe 4

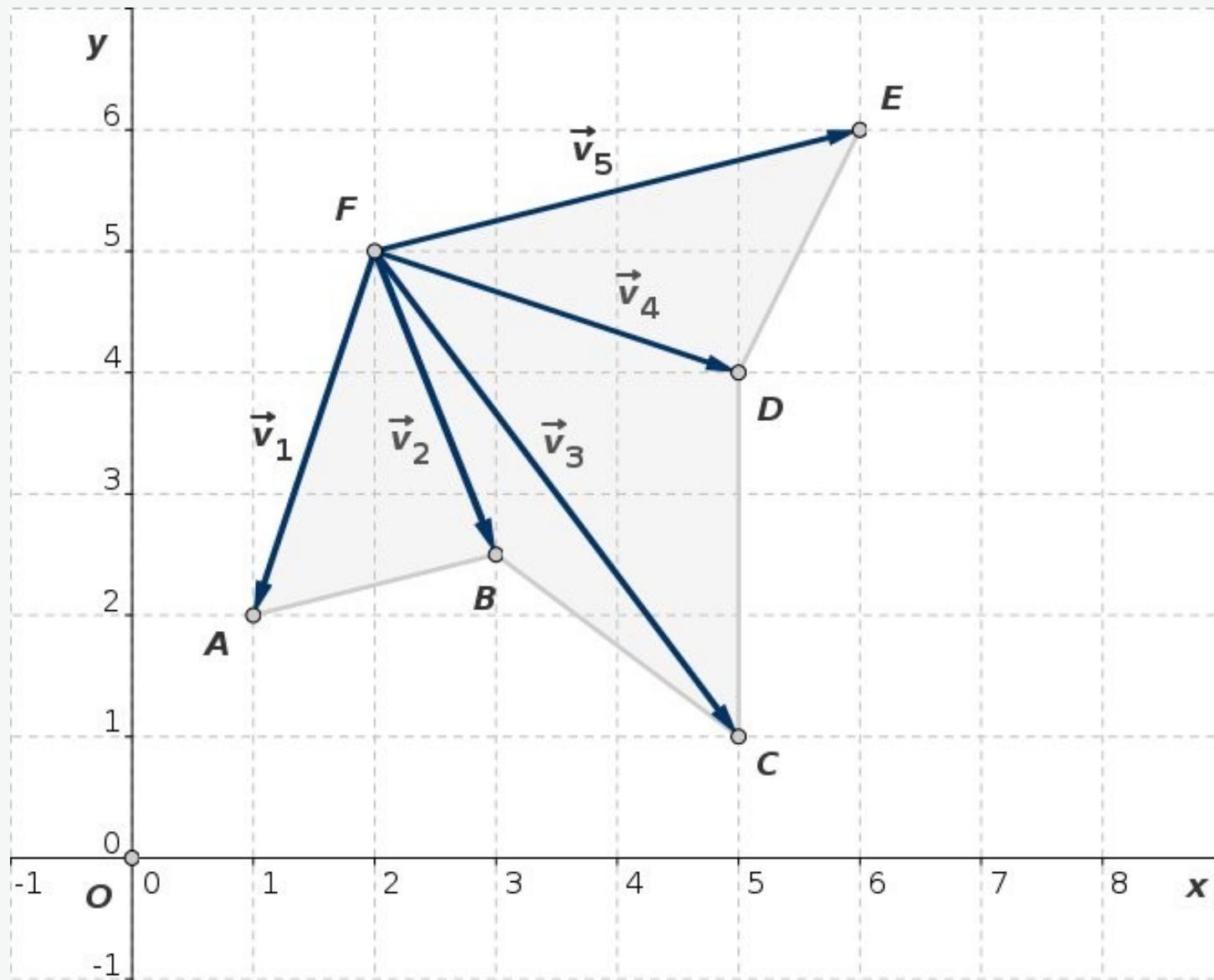


Abb. 7-2: Die Fläche ABCDEF, dargestellt durch Vektoren

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{FA} = (-1, -3), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{FB} = (1, -2.5), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{FC} = (3, -4)$$

$$\vec{v}_4 = \overrightarrow{FD} = (3, -1), \quad \vec{v}_5 = \overrightarrow{FE} = (4, 1)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 4

$$\begin{aligned} 2 F_{ABCDEF} &= \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_4) + \det(\vec{v}_4, \vec{v}_5) = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2.5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2.5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 25 \text{ FE}, \quad F_{ABCDEF} = 12.5 \text{ FE} \end{aligned}$$

## Berechnung einer Fläche: Aufgabe 5

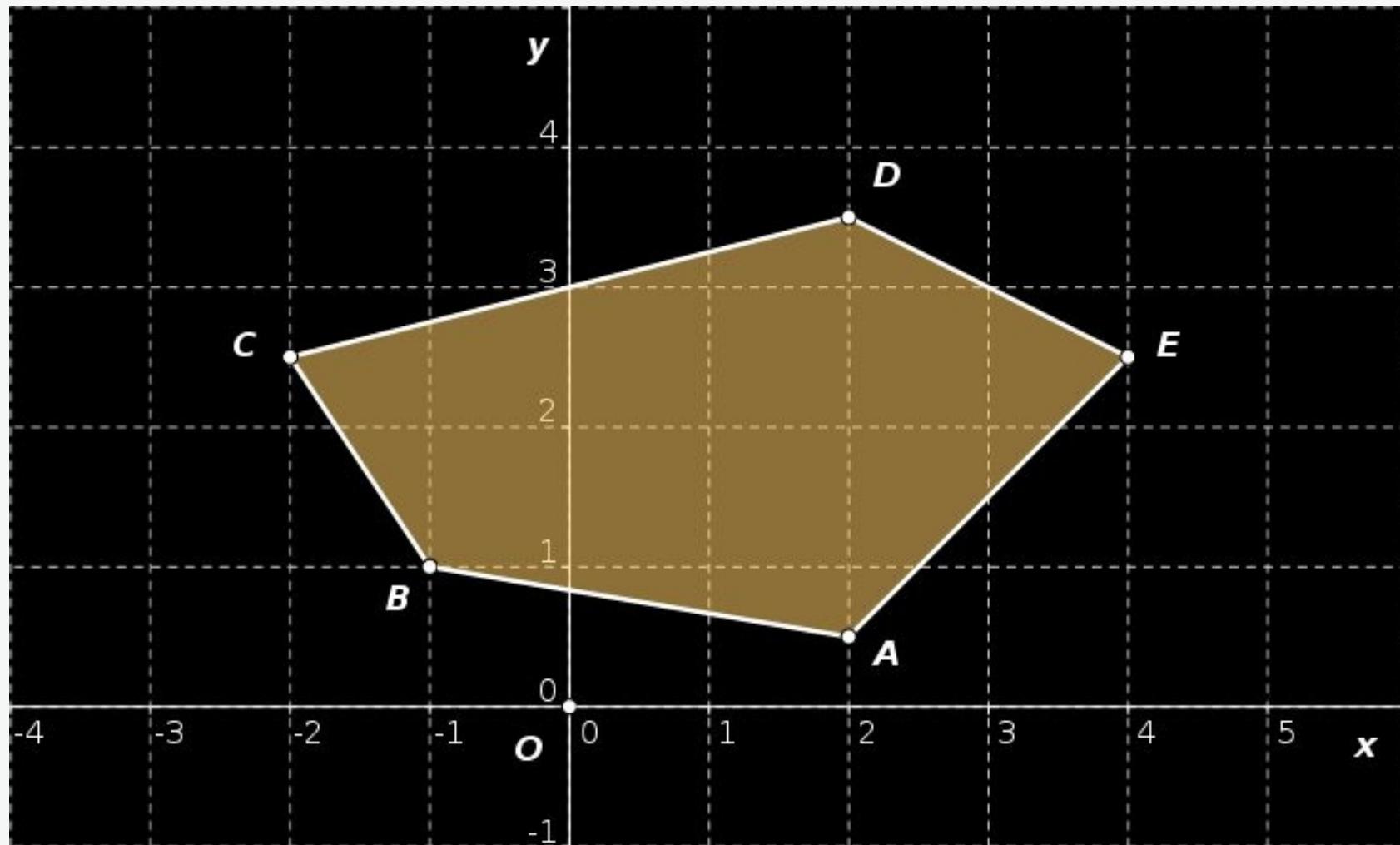


Abb. 8-1: Die Fläche  $ABCDE$  der Aufgabe 5

## Berechnung einer Fläche: Lösung 5

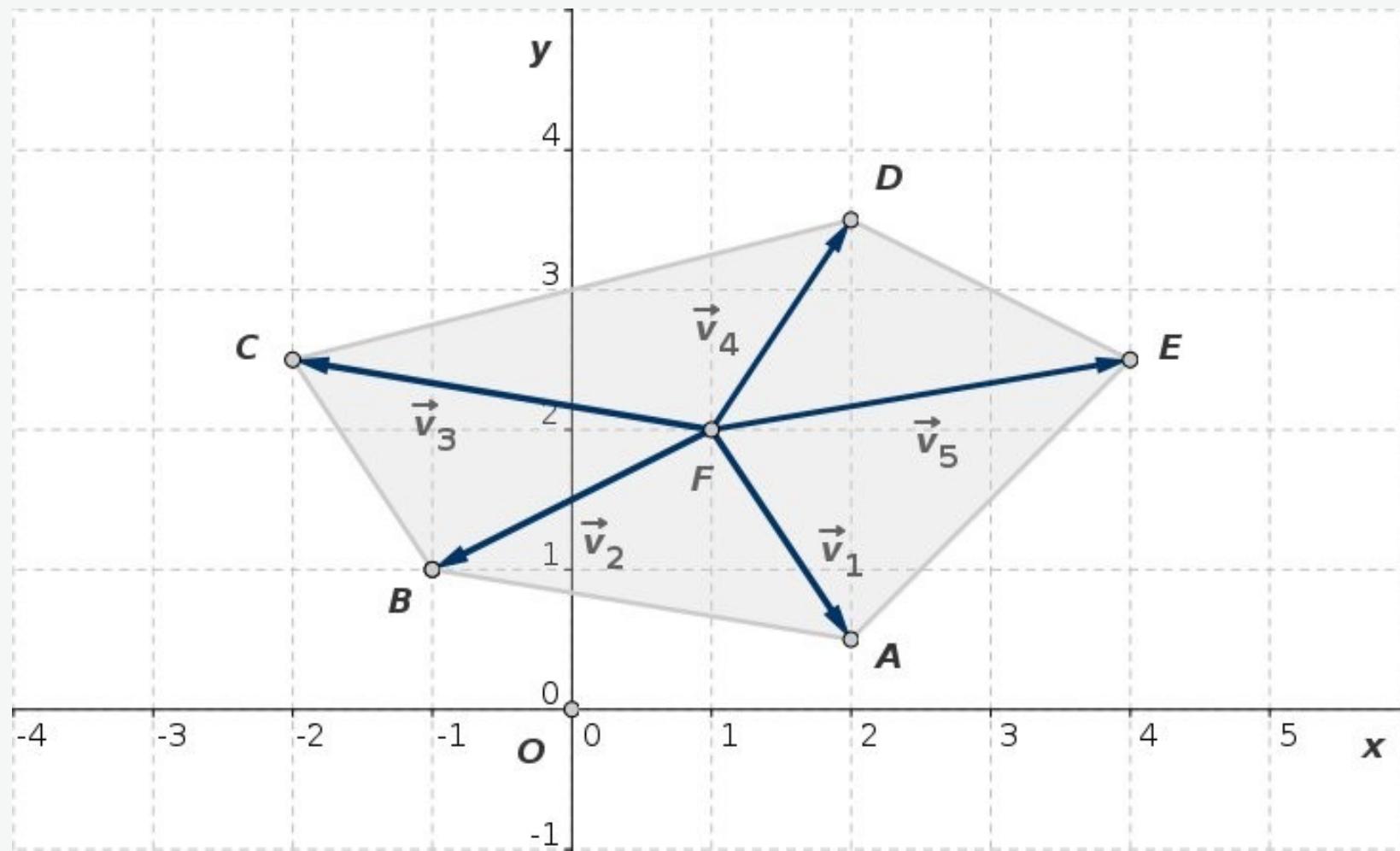


Abb. 8-2: Die Fläche ABCDEF, dargestellt durch Vektoren

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{FA} = (1, -1.5), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{FB} = (-2, -1), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{FC} = (-3, 0.5)$$

$$\vec{v}_4 = \overrightarrow{FD} = (1, 1.5), \quad \vec{v}_5 = \overrightarrow{FE} = (3, 0.5)$$

## Berechnung einer Fläche: Lösung 5

$$2 F_{ABCDE} = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_5) + \det(\vec{v}_5, \vec{v}_4) + \det(\vec{v}_4, \vec{v}_3) + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_2) + \\ + \det(\vec{v}_3, \vec{v}_2) + \det(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = 22 \text{ FE}$$

$$F_{ABCDE} = 11 \text{ FE}$$

### Zur Erinnerung:

Die Determinanten sind positiv, wenn sich die Richtung des zweiten Vektors (2. Zeile der Determinante) aus der Richtung des ersten durch Drehung in positive Richtung, also gegen den Uhrzeigersinn ergibt.