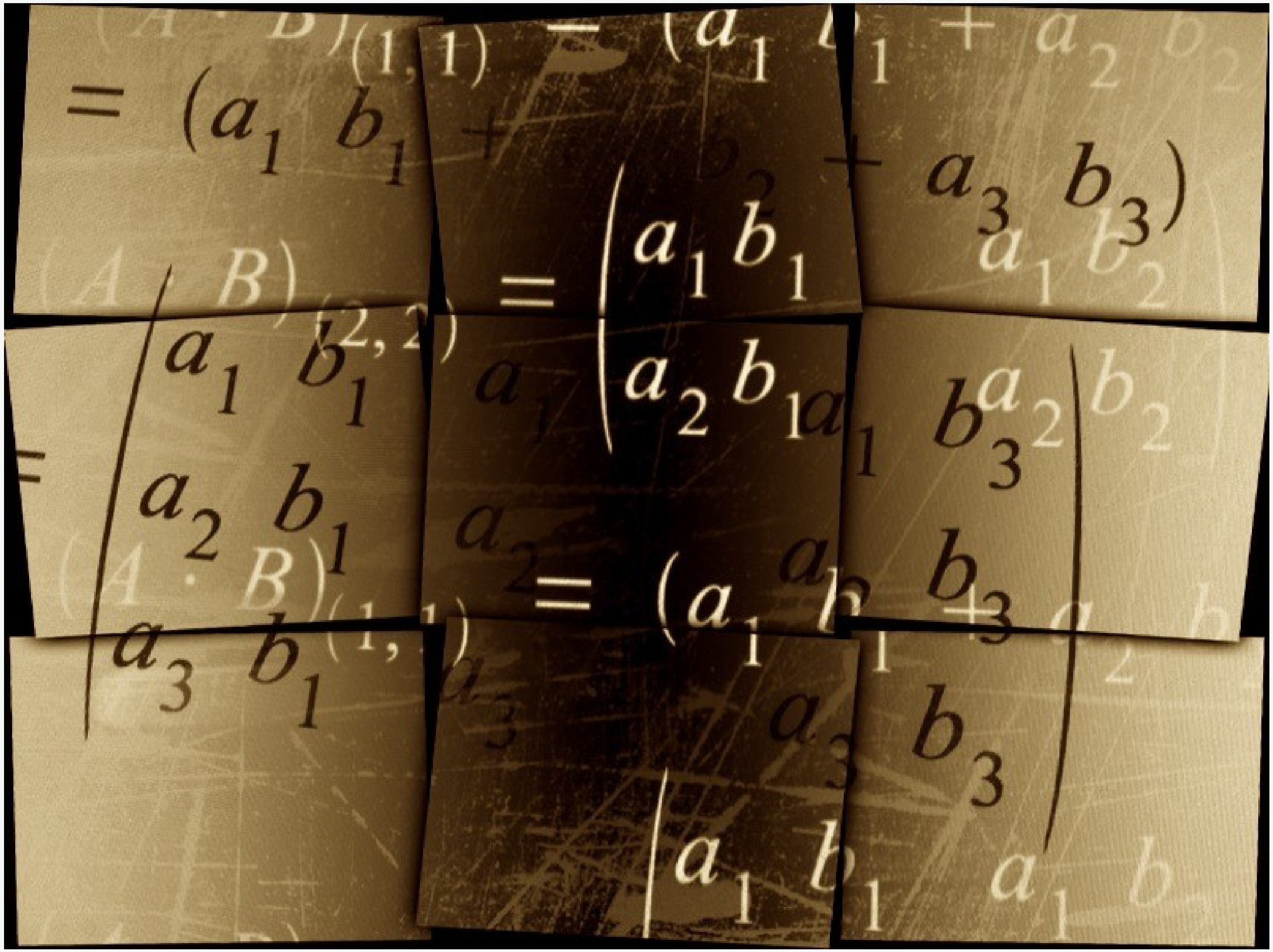
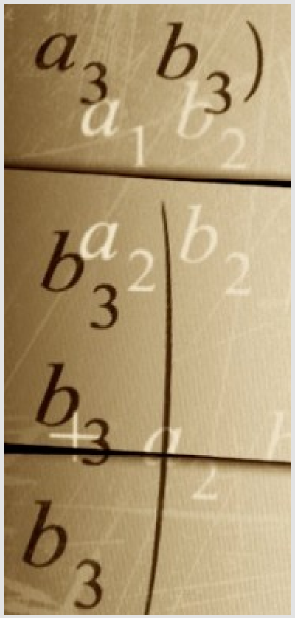


Cramersche Regel

Cramersche Regel: LGS mit zwei Variablen



$$A\,\vec{x} = \vec{c}\;: \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = c_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = c_2 \end{cases}$$

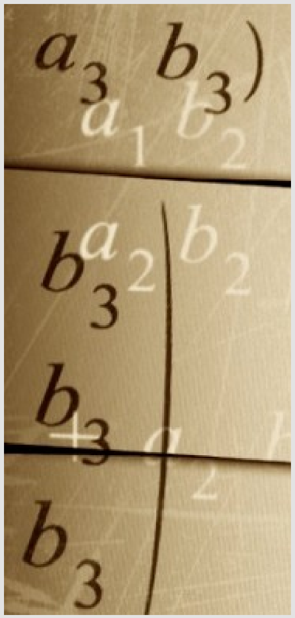
Die Lösung solches linearen Gleichungssystems haben wir in folgender Form bestimmt:

$$x = \frac{1}{D}\,(c_1 a_{22} - c_2 a_{12}), \qquad y = \frac{1}{D}\,(c_2 a_{11} - c_1 a_{21})$$

wobei D die 2-reihige Determinante ist.

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$$

Cramersche Regel: LGS mit zwei Variablen



$$c_1 a_{22} - c_2 a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} \equiv D_1 = \det A_1$$

$$a_{11} c_2 - a_{21} c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} \equiv D_2 = \det A_2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix *A (i)* wird gebildet, indem die *i*-te Spalte der Koeffizientenmatrix *A* durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt wird.

Cramersche Regel: LGS mit zwei Variablen

Die gesuchten x- und y-Werte kann man dann in solcher Form darstellen:

$$x = \frac{1}{D}\left(c_1 a_{22} - c_2 a_{12}\right) = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{1}{D}\left(c_2 a_{11} - c_1 a_{21}\right) = \frac{D_2}{D}$$

Diese Formeln bezeichnet man als Cramersche Regel, benannt nach dem Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer (*1704-1752*).

Für die Berechnung einer Lösung des linearen Gleichungssystems ist der Rechenaufwand in der Regel zu hoch.

$$A\,\vec{x} = \vec{c}\ : \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = c_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = c_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = c_3 \end{cases}$$

$$x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}, \qquad z = \frac{D_3}{D}, \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Beispiel:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -x + y + z = 7 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \qquad A\,\vec{x} = \vec{c} \qquad : \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden werden die Formeln zur Berechnung der Unbekannten mit Hilfe der Gramerschen Regel angewendet:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12, \qquad \det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \qquad \det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 48,$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = -1, \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} = 2, \qquad z = \frac{\det A_3}{\det A} = 4, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Unbekannten mit Hilfe der Gramerschen Regel:

Aufgabe 1:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = -4 \end{cases}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{cases} 4x - 6y - 5z = 10 \\ 2x - 9y + z = -4 \\ 12x + 2z = 2 \end{cases}$$

Cramersche Regel: Lösung 1

$$A\,\vec{x} = \vec{c}\ : \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 26$$

$$x = \frac{D_1}{\det A} = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$y = \frac{D_2}{\det A} = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{D_1}{\det A} = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$