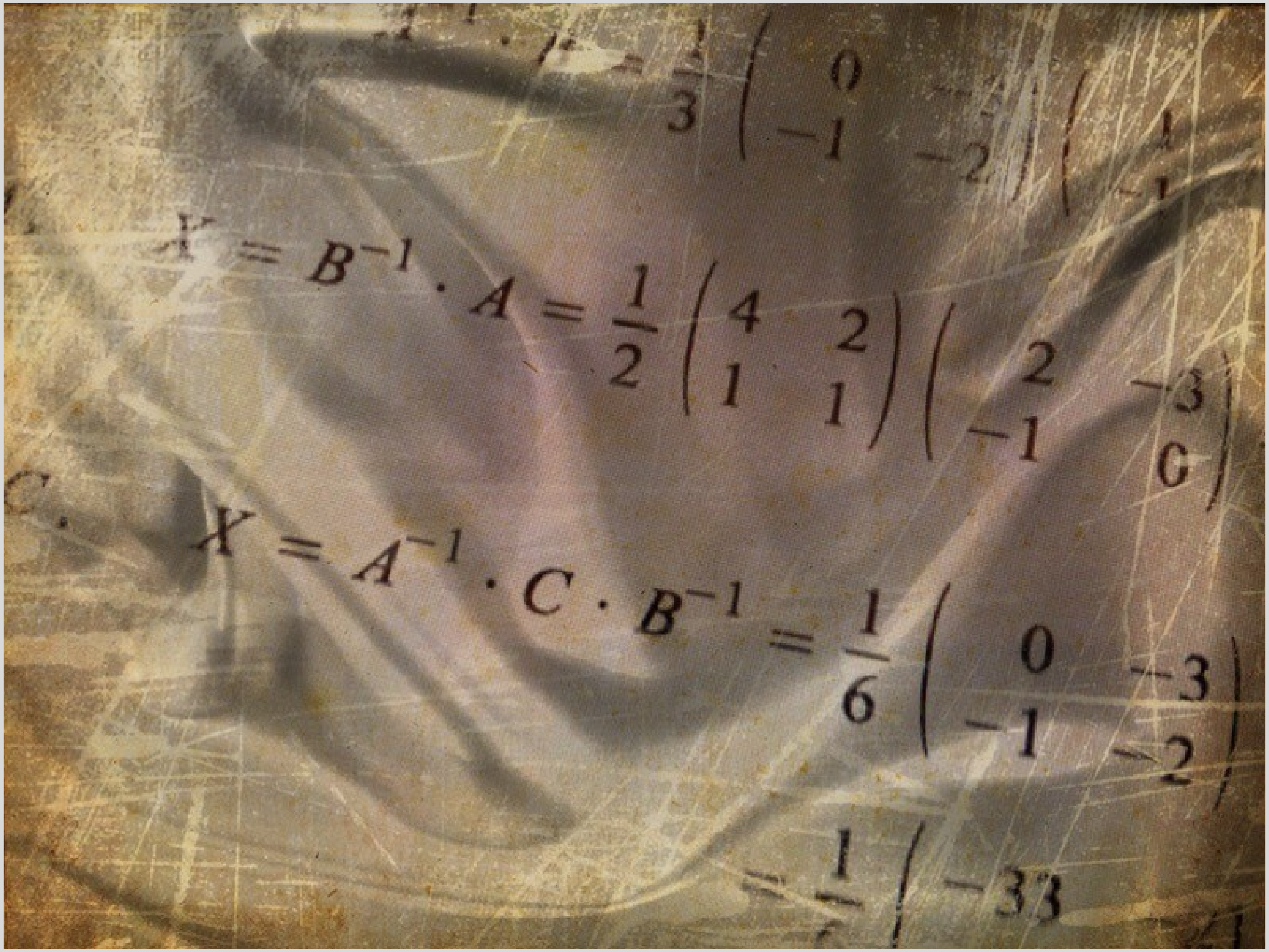

Matrizengleichungen

Aufgabe 1:

Schreiben Sie folgende lineare Gleichungen in Form einer Matrizengleichung. Bestimmen Sie die Unbekannten *x, y* und *z*

$a)\ 2x - 3y = -6, \qquad -x + 2y = 7$

$b)\ 3x - y = -11, \qquad 2x + 3y = 11$

$c)\ y + 4x = 8, \qquad -2x + y = -2$

$d)\ x + 2y + 3z = 12, \qquad -x + 4y + z = 8, \qquad 2x - 2y + 4z = 20$

$a)\; 2x - 3y = -6, \qquad -x + 2y = 7, \qquad x = 9, \quad y = 8$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$b)\; 3x - y = -11, \quad 2x + 3y = 11, \qquad x = -2, \quad y = 5$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$c)\; y + 4x = 8, \qquad -2x + y = -2, \qquad x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{4}{3}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$d)\; x + 2y + 3z = 12, \qquad -x + 4y + z = 8, \qquad 2x - 2y + 4z = 20$

$x = -8, \quad y = -2, \quad z = 8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Eine n-reihige, quadratische Matrix heißt invertierbar (umkehrbar), wenn es eine Matrix A^{-1} gibt mit der Eigenschaft

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E\,, \qquad \det A \neq 0}$$

E ist die n-reihige Einheitsmatrix, z.B. für $n = 2$: $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A^{-1} heißt die zu A inverse Matrix, Kehrmatrix, Umkehrmatrix oder die Inverse von A.

Eine Gleichung, bei der die Elemente einer unbekannten Matrix zu bestimmen sind, heißt Matrizengleichung.

Aufgabe 2:

Formen Sie folgende Matrizengleichungen mit Hilfe einer Umkehrmartix so um, dass eine unbekannte Matrix X auf einer Seite der Gleichung isoliert steht. Die Matrizen A, B, C und D seien invertierbar:

$a)\ A \cdot X = B, \qquad b)\ X \cdot A = B, \qquad c)\ A \cdot X \cdot B = C$

$d)\ A \cdot X \cdot B = C \cdot D, \qquad e)\ A \cdot B \cdot C \cdot X = D,$

$$a)\ A \cdot X = B, \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$b)\ X \cdot A = B, \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}, \quad X \cdot E = B \cdot A^{-1}, \quad X = B \cdot A^{-1}$$

$$c)\ A \cdot X \cdot B = C, \quad A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C, \quad X \cdot B = A^{-1} \cdot C,$$

$$X \cdot B = A^{-1} \cdot C, \quad X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}, \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$d)\ A \cdot X \cdot B = C \cdot D, \quad X \cdot B = A^{-1} \cdot C \cdot D, \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot D \cdot B^{-1},$$

$$e)\ A \cdot B \cdot C \cdot X = D, \quad B \cdot C \cdot X = A^{-1} \cdot D, \quad C \cdot X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot D$$

$$X = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot D$$

$$\boxed{X \cdot E = E \cdot X = X}$$

1) Wenn man eine unbekannte Matrix X ausklammert, muss X nach dem Ausklammern auf der Seite stehen, wo sie vorher stand:

$$A \cdot X + B \cdot X = (A + B) \cdot X$$

2) Die Zahlen beim Ausklammern werden mit einer Einheitsmatrix multipliziert:

$$A \cdot X + 4\,X = (A + 4\,E) \cdot X$$

3) Man kann nicht durch eine Matrix dividieren, man kann aber mit einer inversen Matrix multiplizieren:

$$A \cdot X = B\,, \qquad X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B\,, \qquad X = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot X + B \cdot X = C\,, \qquad (A + B) \cdot X = C\,, \qquad X = C \cdot (A + B)^{-1}$$

$$A \cdot X + 4\,X = C\,, \qquad (A + 4\,E) \cdot X = C\,, \qquad X = C \cdot (A + 4\,E)^{-1}$$

Aufgabe 3:

Formen Sie folgende Matrizengleichungen mit Hilfe einer Umkehrmartix so um, dass eine unbekannte Matrix X auf einer Seite der Gleichung isoliert steht. Die Matrizen A, B und C seien invertierbar.

$a)\ A \cdot X + B = 3X, \qquad b)\ X \cdot A + 6 \cdot X = B$

Aufgabe 4:

Matrizen A, B, C und ihre inversen Matrizen sind gegeben. Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach einer unbekannten Matrix X.

$a)\ A \cdot X = B, \quad b)\ B \cdot X = A, \quad c)\ A \cdot X \cdot B = C, \quad d)\ A \cdot B \cdot X = C$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$a)\ A \cdot X + B = 3\,X$

Schritt 1: Alle X auf eine Seite $A \cdot X - 3\,X = -B$

Schritt 2: X ausklammern und darauf achten, dass X rechts von den Matrizen steht

$$3\,X = 3\,E\,X\,, \qquad \left(A - 3\,E\right) X = -B$$

Schritt 3: Beide Seiten der Gleichung mit einer inversen Matrix zu $(A - 3\,E)$ von links multiplizieren

$$\left(A - 3\,E\right)^{-1}\left(A - 3\,E\right) X = -\left(A - 3\,E\right)^{-1} B$$

$$X = -\left(A - 3\,E\right)^{-1} B$$

$b)\ X \cdot A + 6 \cdot X = B\,, \qquad X \cdot A + X \cdot 6 = B\,, \qquad X \cdot \left(A + 6 \cdot E\right) = B$

$$X = B \cdot \left(A + 6 \cdot E\right)^{-1}$$

a) $A \cdot X = B, \qquad X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot X = A, \qquad X = B^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot X \cdot B = C, \qquad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -33 & -21 \\ -50 & -34 \end{pmatrix}$$

d) $A \cdot B \cdot X = C, \qquad A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot X = A^{-1} \cdot C, \qquad B \cdot X = A^{-1} \cdot C,$

$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C, \qquad X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$

$$X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -40 & -72 \\ -14 & -27 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Formen Sie folgende lineare Gleichungssysteme in entsprechende Matrizengleichungen um, und bestimmen Sie die Unbekannten x und y beim Lösen der Matrizengleichungen:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - 2y = -8, \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - 6y = 10, \\ 2x + 3y = 5, \end{cases} \qquad c) \begin{cases} 5x + 2y = 5, \\ 3x + y = 4, \end{cases}$$

Aufgabe 6: Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach X:

$$a)\ AX = B, \qquad b)\ XA = C, \qquad c)\ AX + 2X = D$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach X:

$$a)\ ABX - 2X = 2C, \qquad b)\ AX + BC = A - 2X$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 5*a*:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - 2y = -8, \end{cases} \qquad A\vec{X} = \vec{C}: \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -7, \quad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 5*b*:

$$\begin{cases} x - 6y = 10, \\ 2x + 3y = 5, \end{cases} \qquad A\vec{X} = \vec{C}: \quad \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5*c*:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 5, \\ 3x + y = 4, \end{cases} \qquad A\vec{X} = \vec{C}: \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung 6:

$a)\ A X = B, \qquad X = A^{-1} B$

$b)\ X A = C, \qquad X = C A^{-1}$

$c)\ A X + 2 X = D, \qquad (A + 2 E) X = D, \qquad X = (A + 2 E)^{-1} D$

Die Lösung dieser Gleichungen ist $\quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung 7:

$a)\ A B X - 2 X = 2 C, \qquad (A B - 2 E) X = 2 C,$

$$X = (A B - 2 E)^{-1} 2 C = 2 (A B - 2 E)^{-1} C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$

$b)\ A X + B C = A - 2 X, \qquad (A + 2 E) X = A - B C,$

$$X = (A + 2 E)^{-1} (A - B C) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 21 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 67 & -23 \end{pmatrix}$$

Als ein *Kryptogramm* bezeichnet man einen Geheimtext, also einen Text, der nach einem geheimen Code geschrieben wird. Das griechische Wort *kryptos* bedeutet *verborgen*, das griechische Wort *gramma* bedeutet Schreiben. Im Folgenden wird eine Methode beschrieben, wie man mit Hilfe von Matrizen Texte kodieren und dekodieren, d.h. verschlüsseln und wieder lesen, kann.

Jedem Buchstaben wird entsprechend (2.115) eine Zahl zugeordnet, eine Null steht für eine Leerstelle zwischen den Wörtern.

$$\begin{array}{ccccccc} A=1 & E=5 & I=9 & M=13 & Q=17 & U=21 & Y=25 \\ B=2 & F=6 & J=10 & N=14 & R=18 & V=22 & Z=26 \\ C=3 & G=7 & K=11 & O=15 & S=19 & W=23 & \_=0 \\ D=4 & H=8 & L=12 & P=16 & T=20 & X=24 & \end{array} \tag{2.115}$$

Aufgabe 8: Kodieren Sie mit Hilfe der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ das Wort: *abbilden*.

Lösung 8:

$$abbilden \to M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & 14 \end{pmatrix}, AM = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 28 & 24 \\ 3 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$