Matrizen: Test 2

a) Transformation berechnen

Drehung um den Winkel $\theta = 180°$

$$T_a = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{pmatrix}$$

b) $$T_b = S_x \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel $\theta = -90°$ und anschließende Spiegelung an der x-Achse

Aufgabe 1:

Beschreiben Sie die Matrix folgender Transformationen:

a) Drehung um den Winkel $\theta = 180°$,

b) Drehung um den Winkel $\theta = -90°$ und anschließende Spiegelung an der x-Achse.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen A und B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die zweite, dritte und weitere Potenzen der Matrix M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Drehung um den Winkel $\theta = 180°$.

Diese Matrix entspricht der Drehung um den Winkel θ.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\pi = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Drehung um den Winkel $\theta = -90°$ und anschließende Spiegelung an der x-Achse.

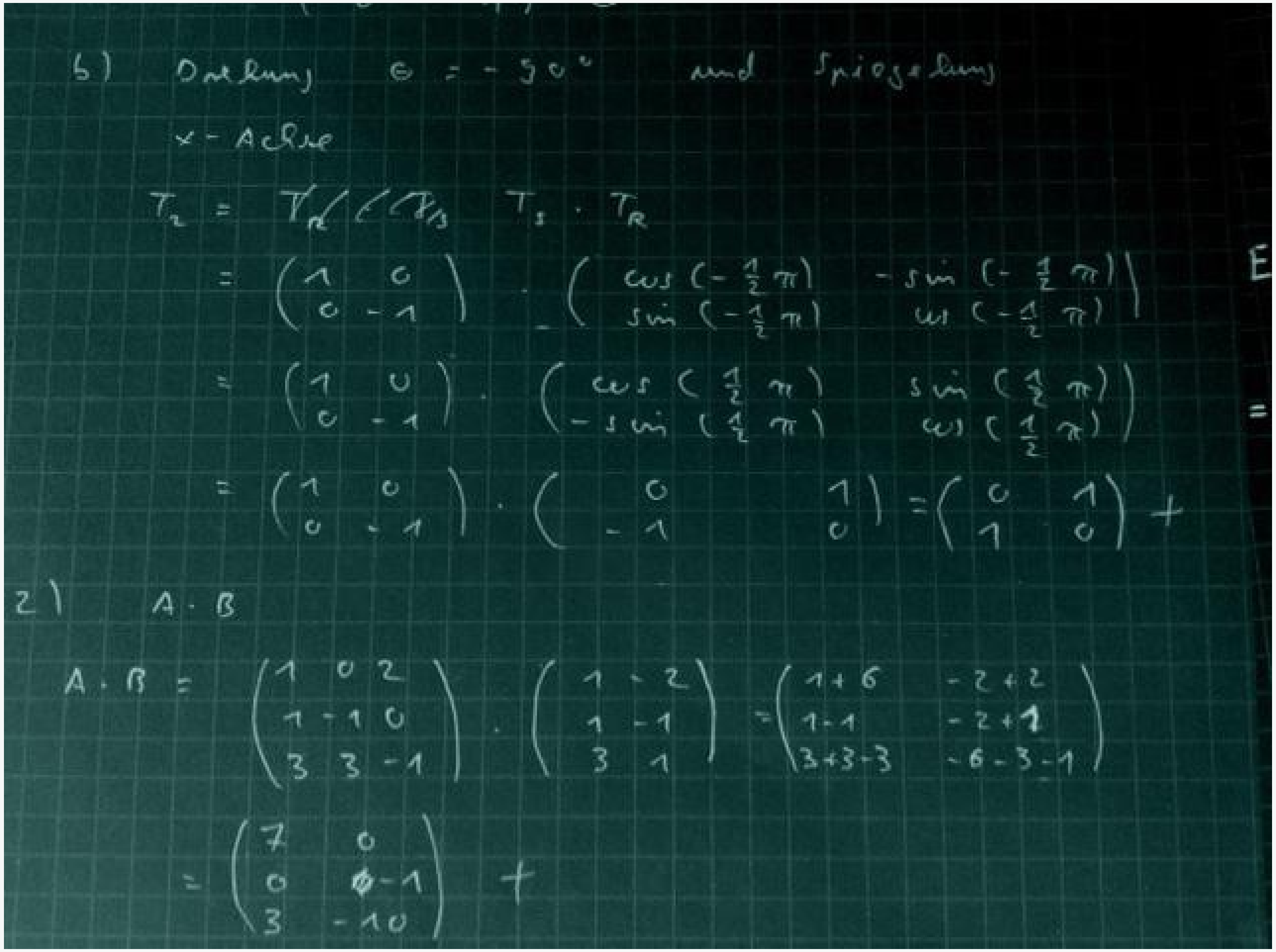
Die Drehungsmatrix um den Winkel $\theta = -90°$:

$$R_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spiegelungsmatrix an der x-Achse: $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Die resultierende Matrix ist:

$$M = S_x \, R_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



b) Drehung $\theta = -90^\circ$ und Spiegelung x-Achse

$$T_2 = \cancel{T_R}\,\cancel{T_S}\quad T_S \cdot T_R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\frac{1}{2}\pi) & -\sin(-\frac{1}{2}\pi) \\ \sin(-\frac{1}{2}\pi) & \cos(-\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix}$$

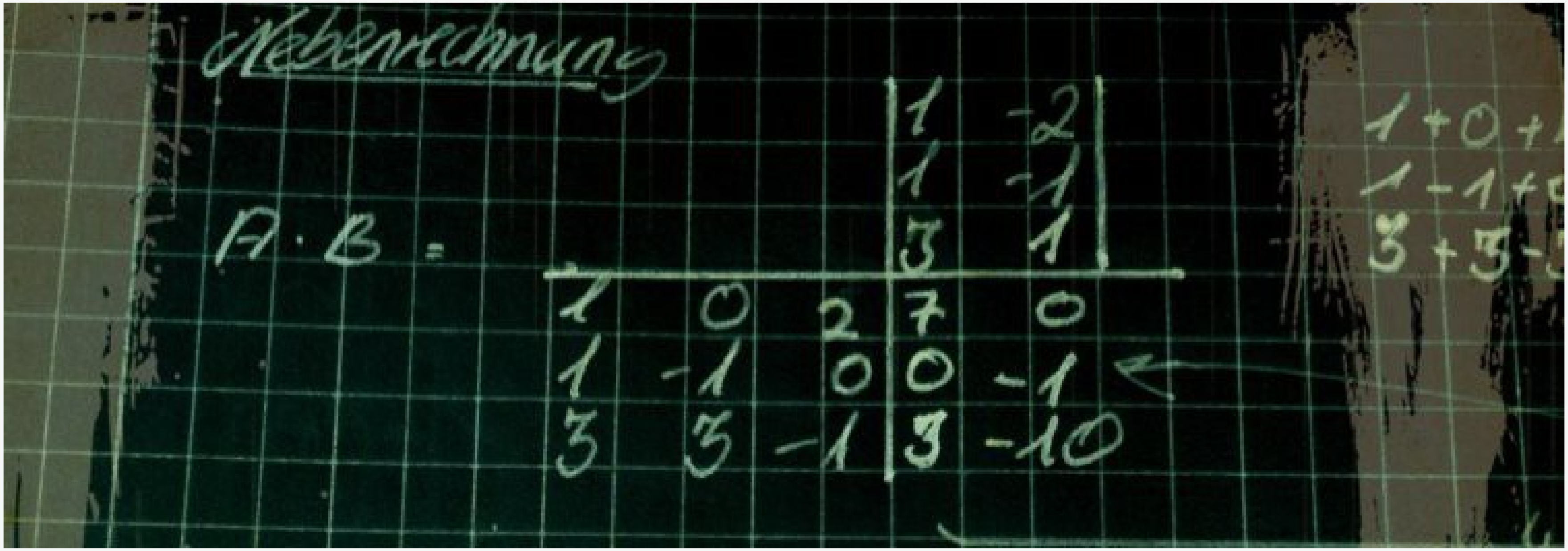
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\pi) & \sin(\frac{1}{2}\pi) \\ -\sin(\frac{1}{2}\pi) & \cos(\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

2) $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & -2+2 \\ 1-1 & -2+1 \\ 3+3-3 & -6-3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & \cancel{0}-1 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} +$$



$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 2} = M_{3\times 2}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$M^5 = M^3 = M\,, \qquad M^6 = M^4 = M^2 = E$$

Variante 1: $$M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Variante 2: $$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{i}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$


Matrizen, Test