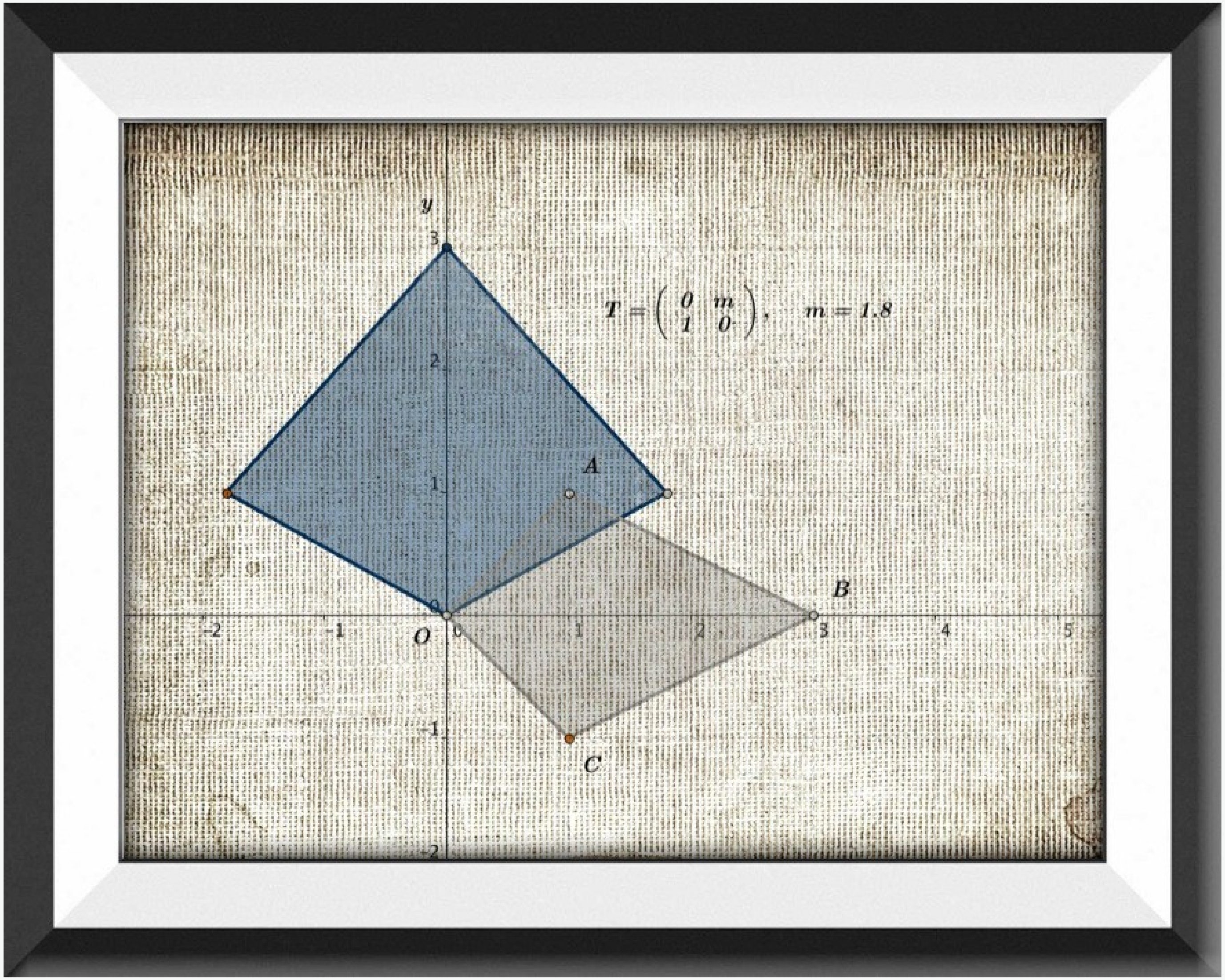
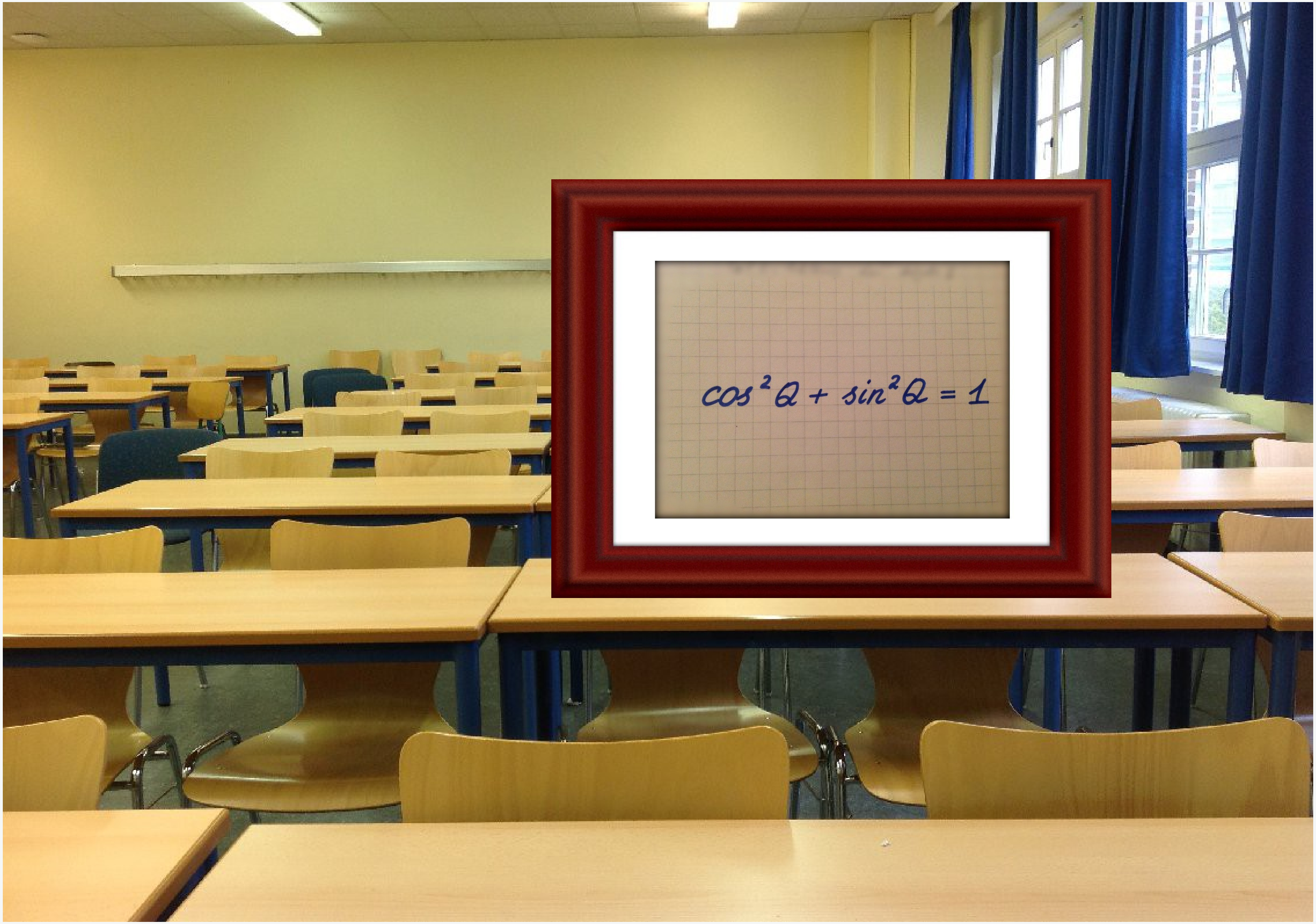
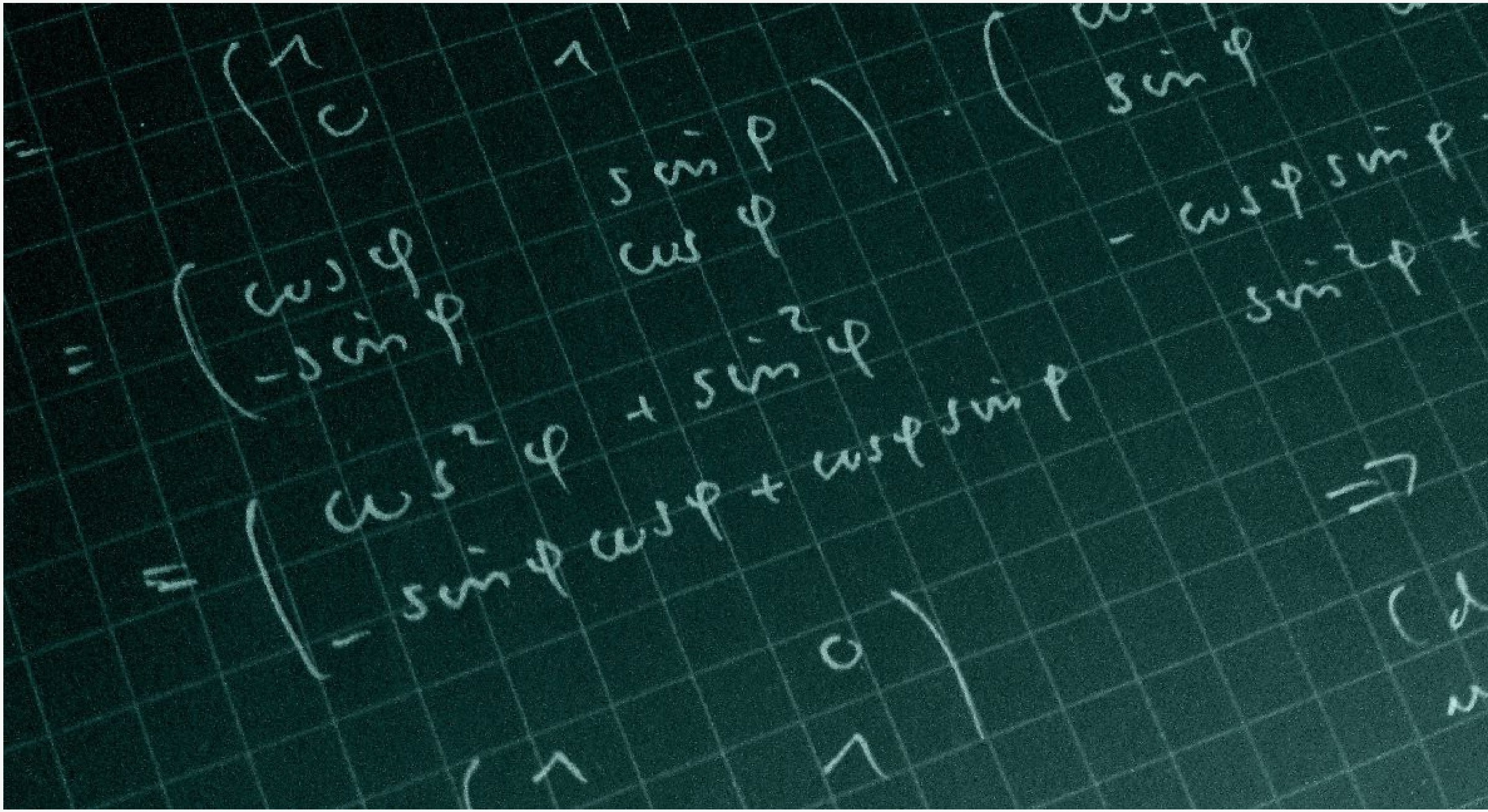


Test 2:

Matrizen, Determinanten und lineare Transformationen


$\cos^2 Q + \sin^2 Q = 1$


2012
January
February
March
April
May
June
July
August
September
October
November
Dezember
A
B
C
O



Aufgabe 1:

Bestimmen Sie ob die Matrizen A und B vertauschbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die zweite Potenz der Matrix M, die Determinante, die Spur, Realteil und Imaginärteil von M^2

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & i^3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Determinante D

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Matrix B die inverse Matrix der Matrix A ist. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

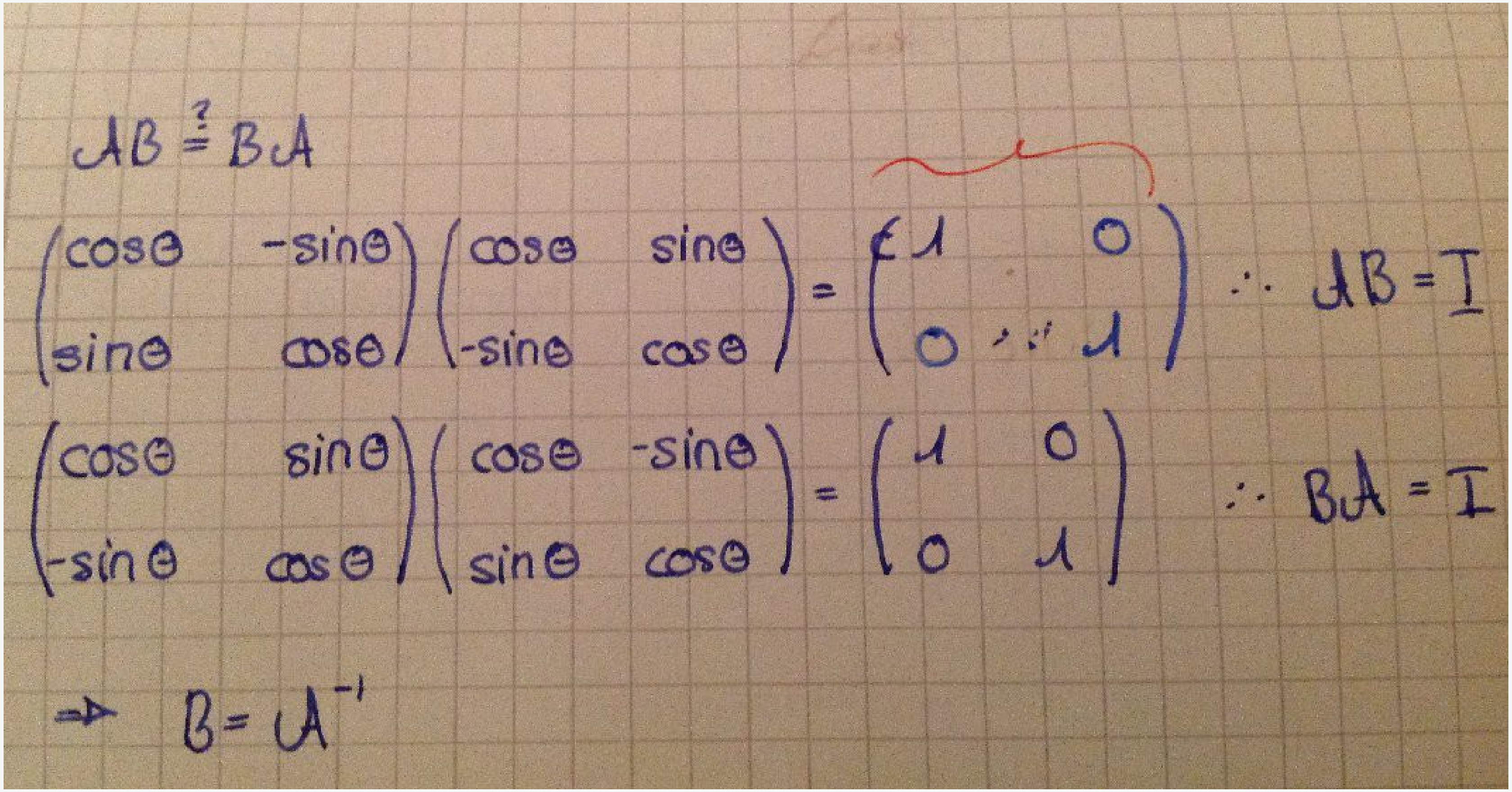
$$A \; X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Eine Fläche sei durch die Eckpunkte Punkte O, A, B und C bestimmt. Wie ändert sich die Fläche durch die Transformation T? Beschreiben Sie diese Transformation.

$O(0, 0), \qquad A(1, 1), \qquad B(3, 0), \qquad C(1, -1)$

$T = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a) \;\; m = [1, 3], \qquad b) \;\; m = [-2, 2]$



Zur Abbildung: Man soll aufschreibenen, dass $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$A \cdot B = B \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \cancel{\cos} + \cos^2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

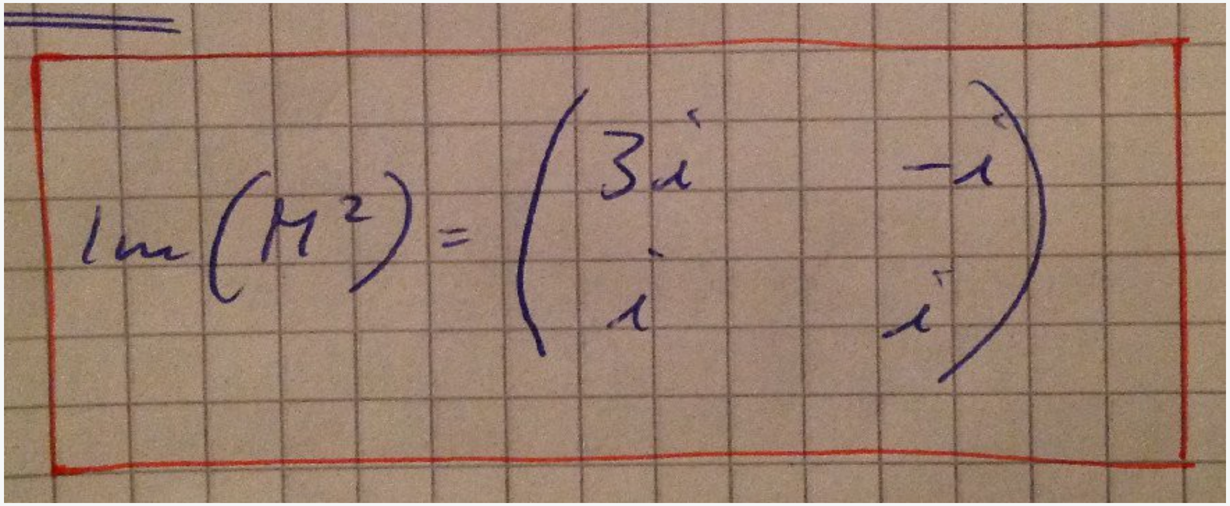
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

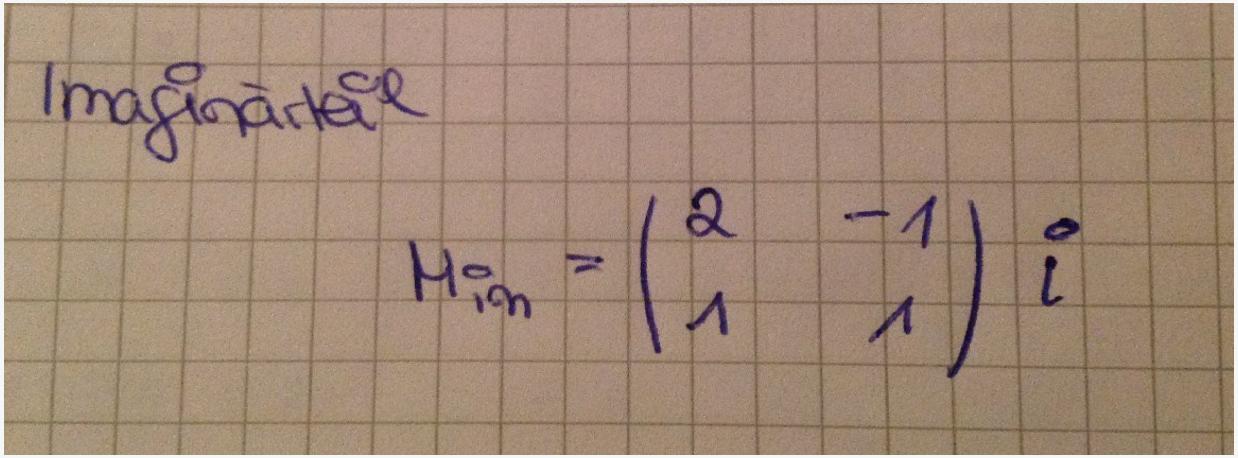
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} =$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ fehlt

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & i^3 \end{pmatrix}, \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 1+3\,i & 1-i \\ i & i \end{pmatrix}, \qquad det\; M^2 = -4$$

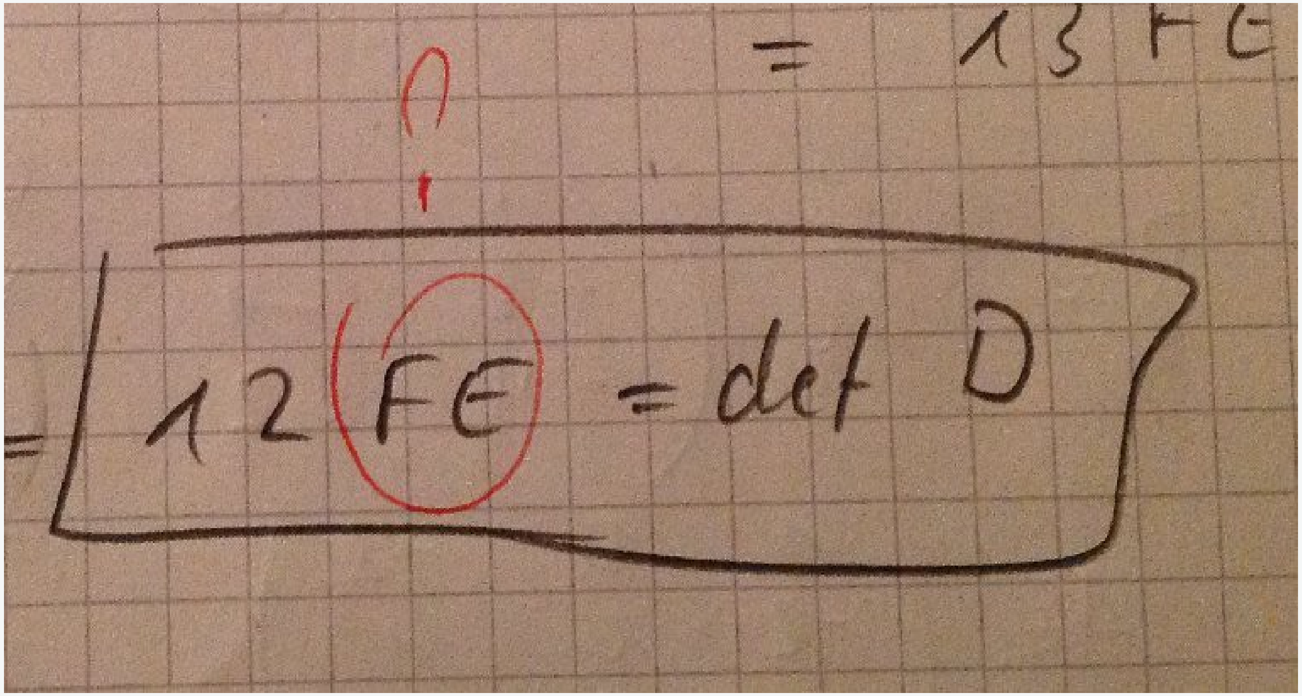
$$\operatorname{Re} M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im} M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Sp\; M^2 = 1 + 4\,i$$





Lösung 3

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = 12$$



Welcher Flächeneinheit ?

$$A\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = E$$

besser in dieser Form: $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Transformation T ändert die Position der Punkte. Dabei ändern sich die Position des Punktes O nicht.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\, y \\ x \end{pmatrix}$$

$$B: \quad T \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_B \end{pmatrix}$$

$$A: \quad T \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\, y_A \\ x_A \end{pmatrix}$$

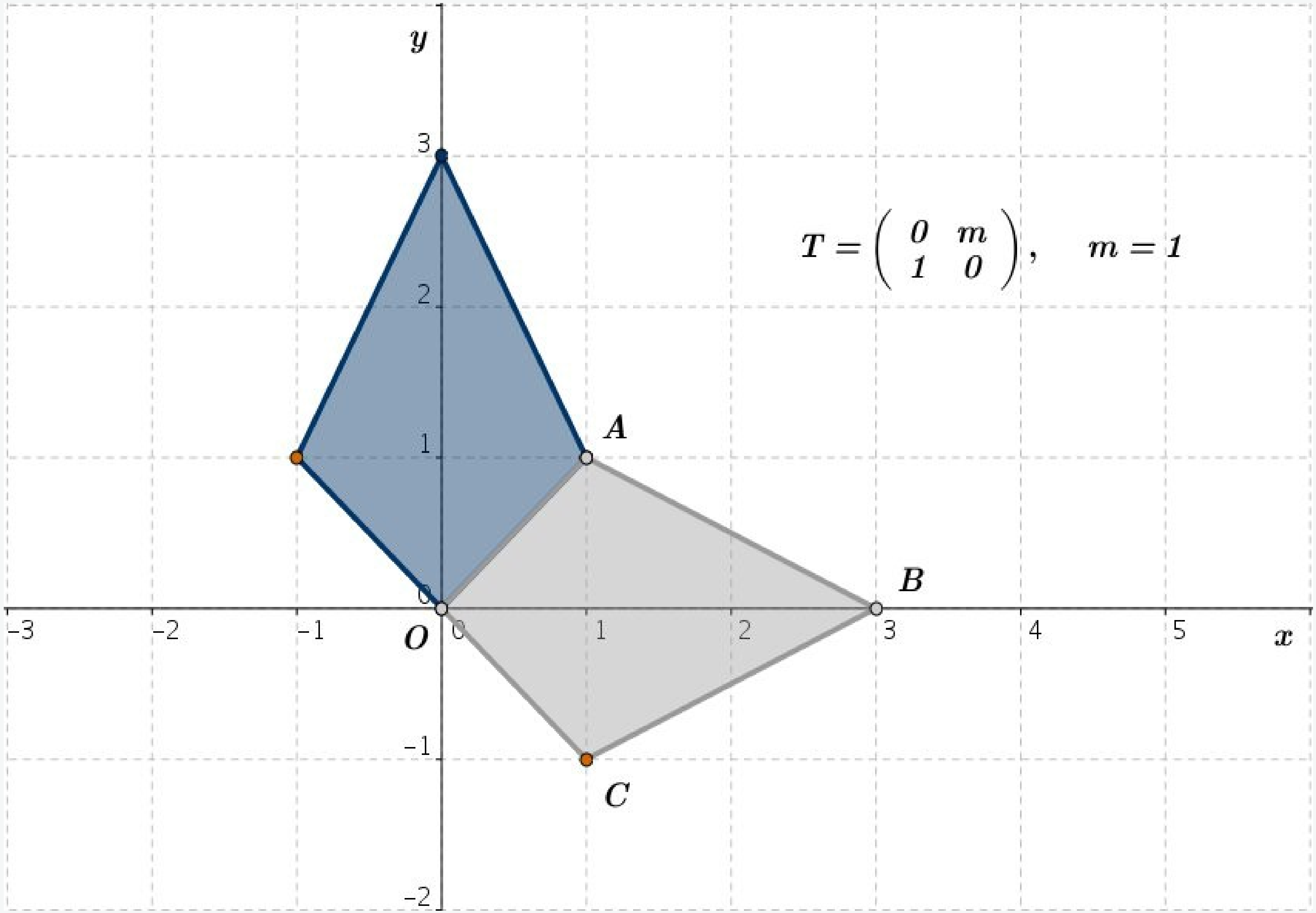


Abb. L5-1: Das Viereck OABC (grau) und das transformierte Viereck (blau), m = 1

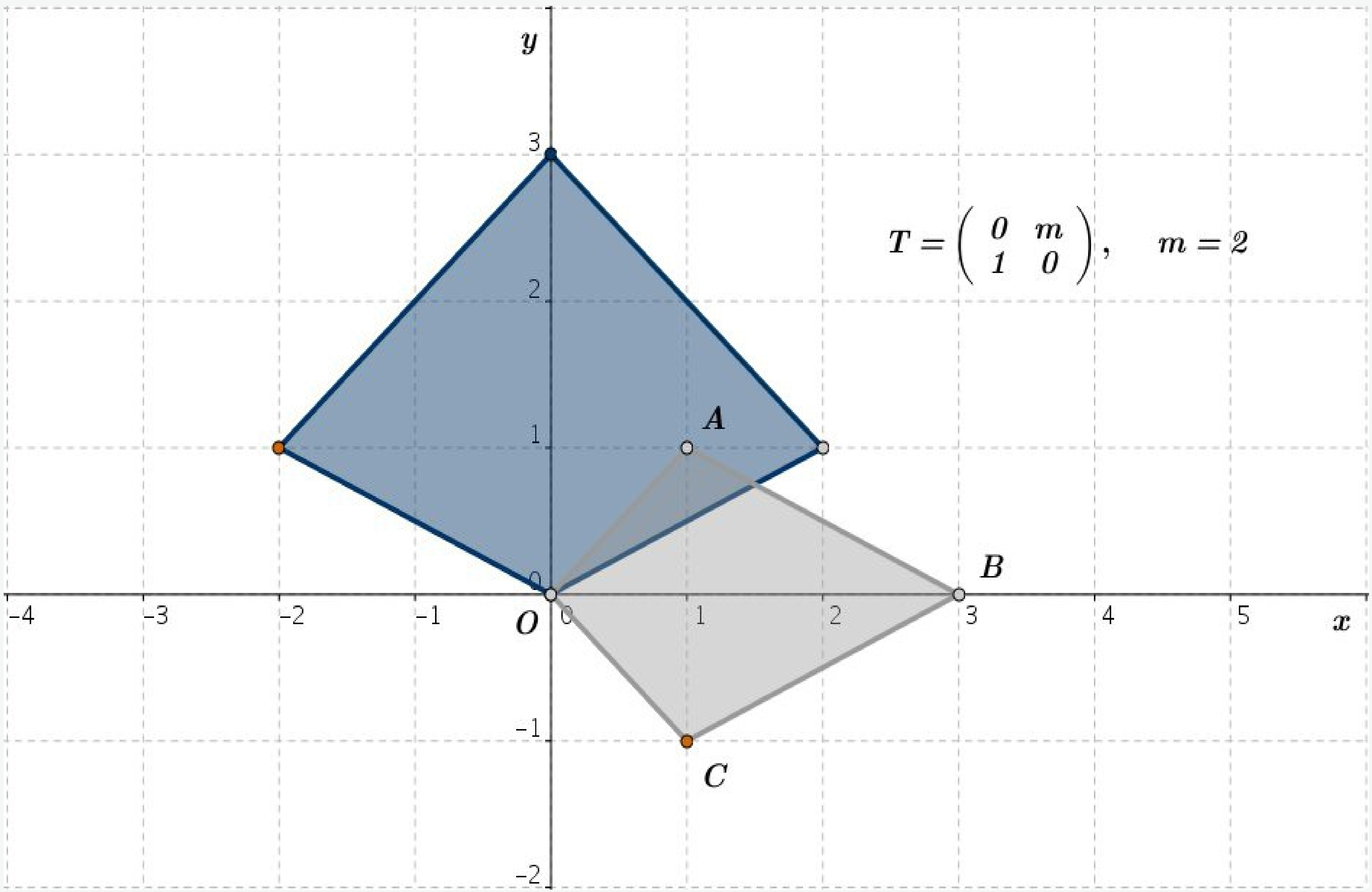


Abb. L5-2: Das Viereck OABC (grau) und das transformierte Viereck (blau), m= 2

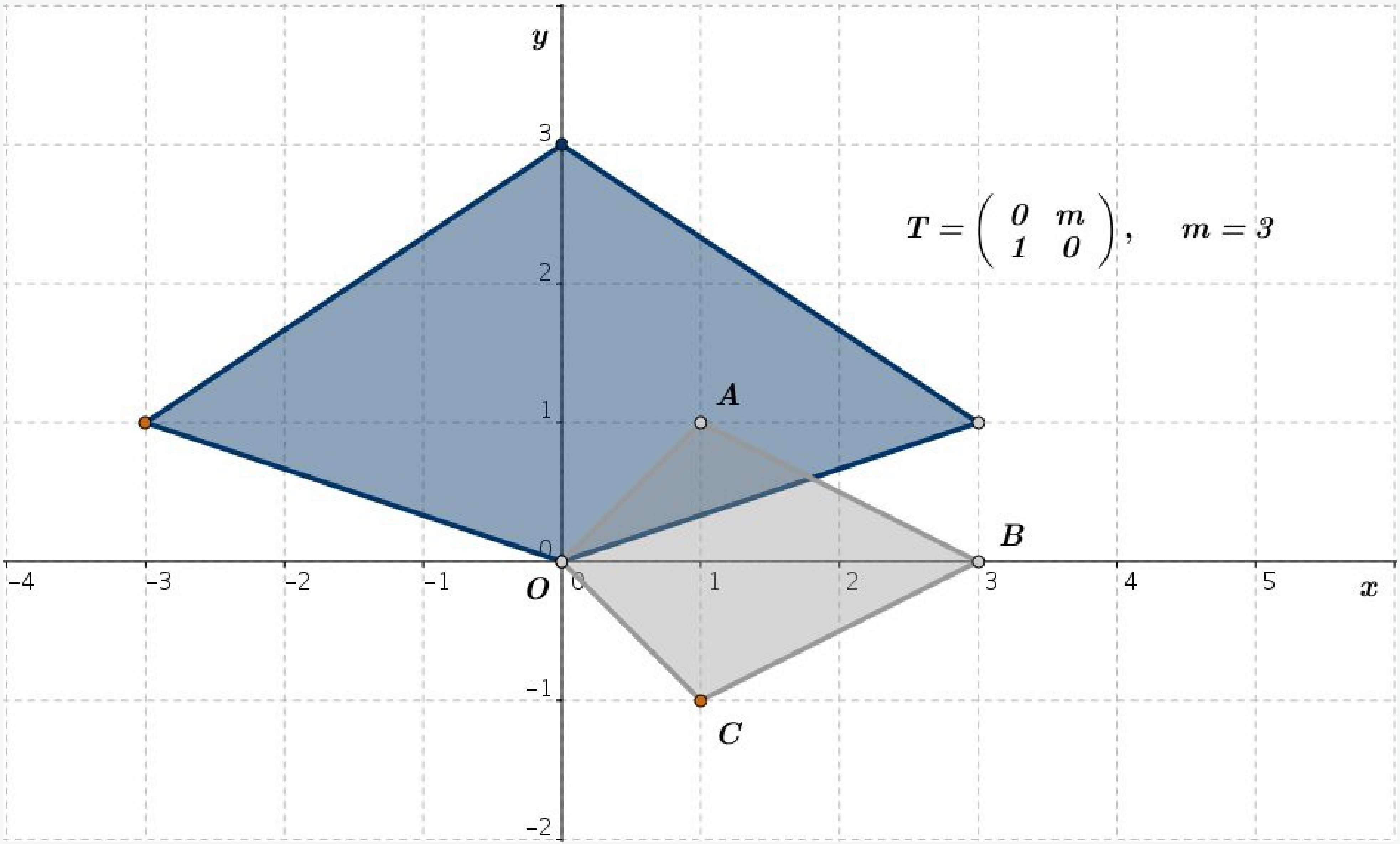


Abb. L5-3: Das Viereck OABC (grau) und das transformierte Viereck (blau), m= 3

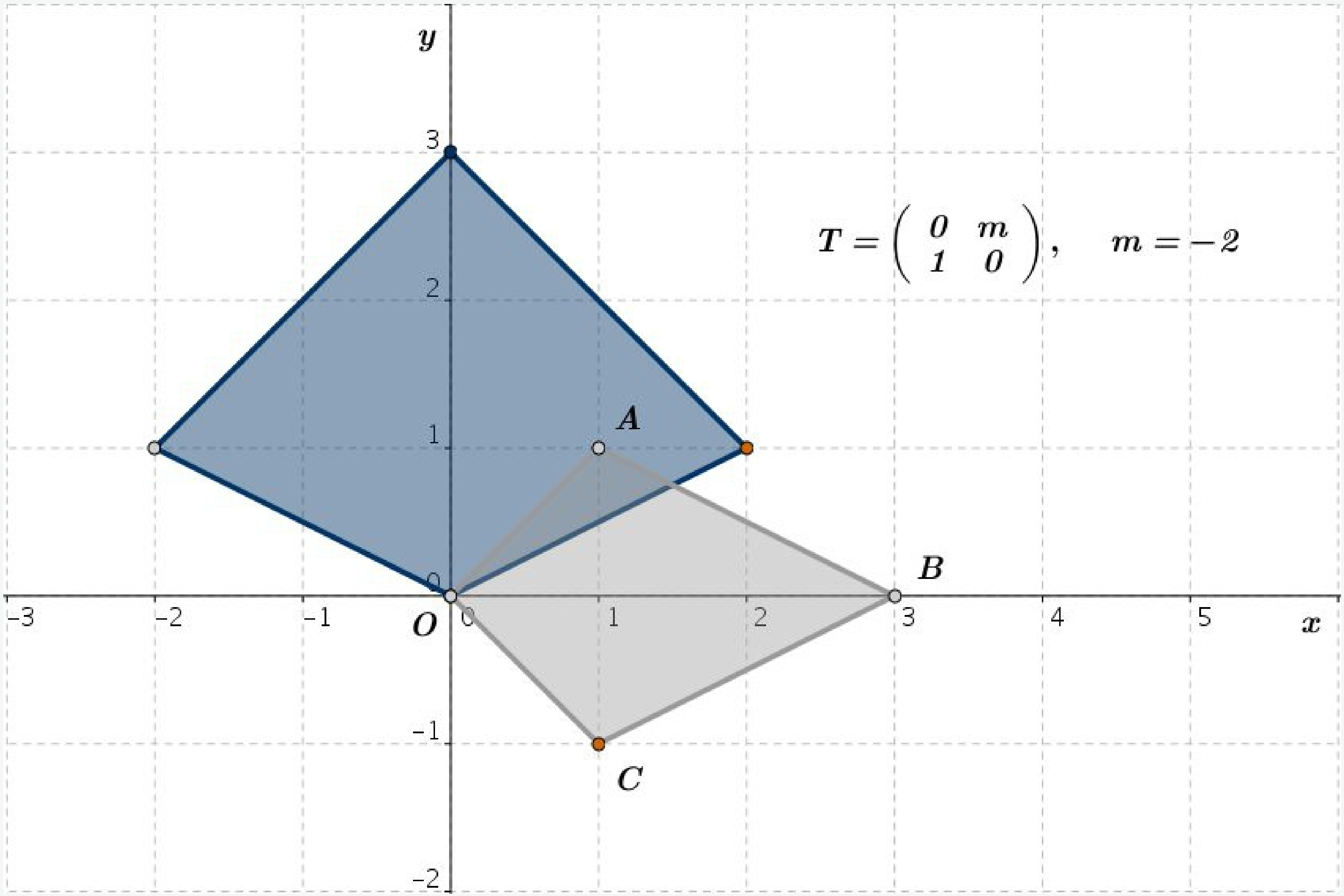
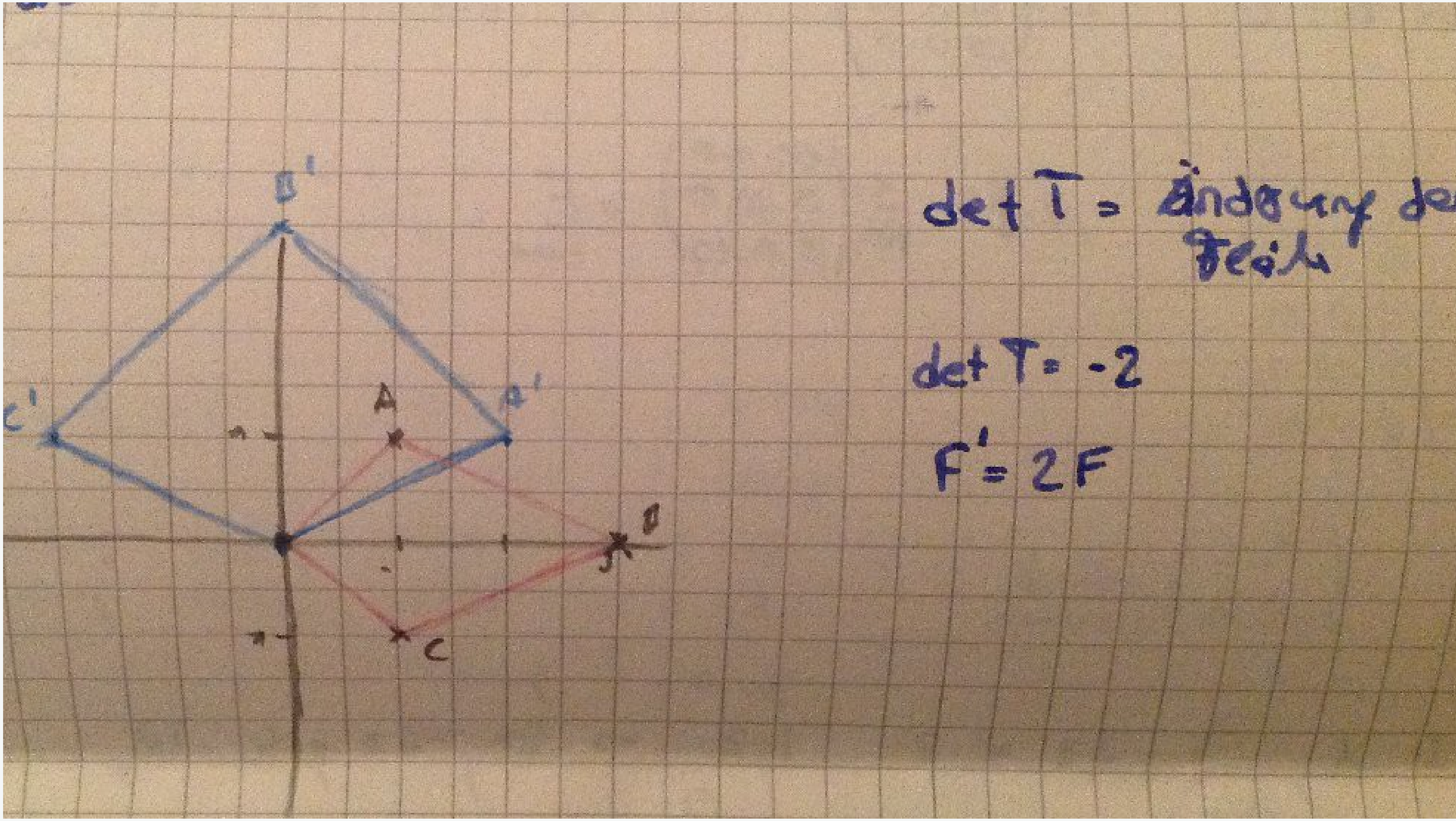


Abb. L5-4: Das Viereck OABC (grau) und das transformierte Viereck (blau), m= - 2


B'
C'
A
A'
B
C
det T = änderung der
fläch
det T = -2
F' = 2F

$$O' = O \cdot T \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = T \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C' = T \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 2F_{OAC} = \det(\overline{OC}, \overline{OA}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$F_{OAC} = 1$

$\overline{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 2F_{BAC} = \det(\overline{BA}, \overline{BC}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2-(-2) = 4$