*Mengenlehre*

*Abb.: Schloss (Fragment), Fulda*

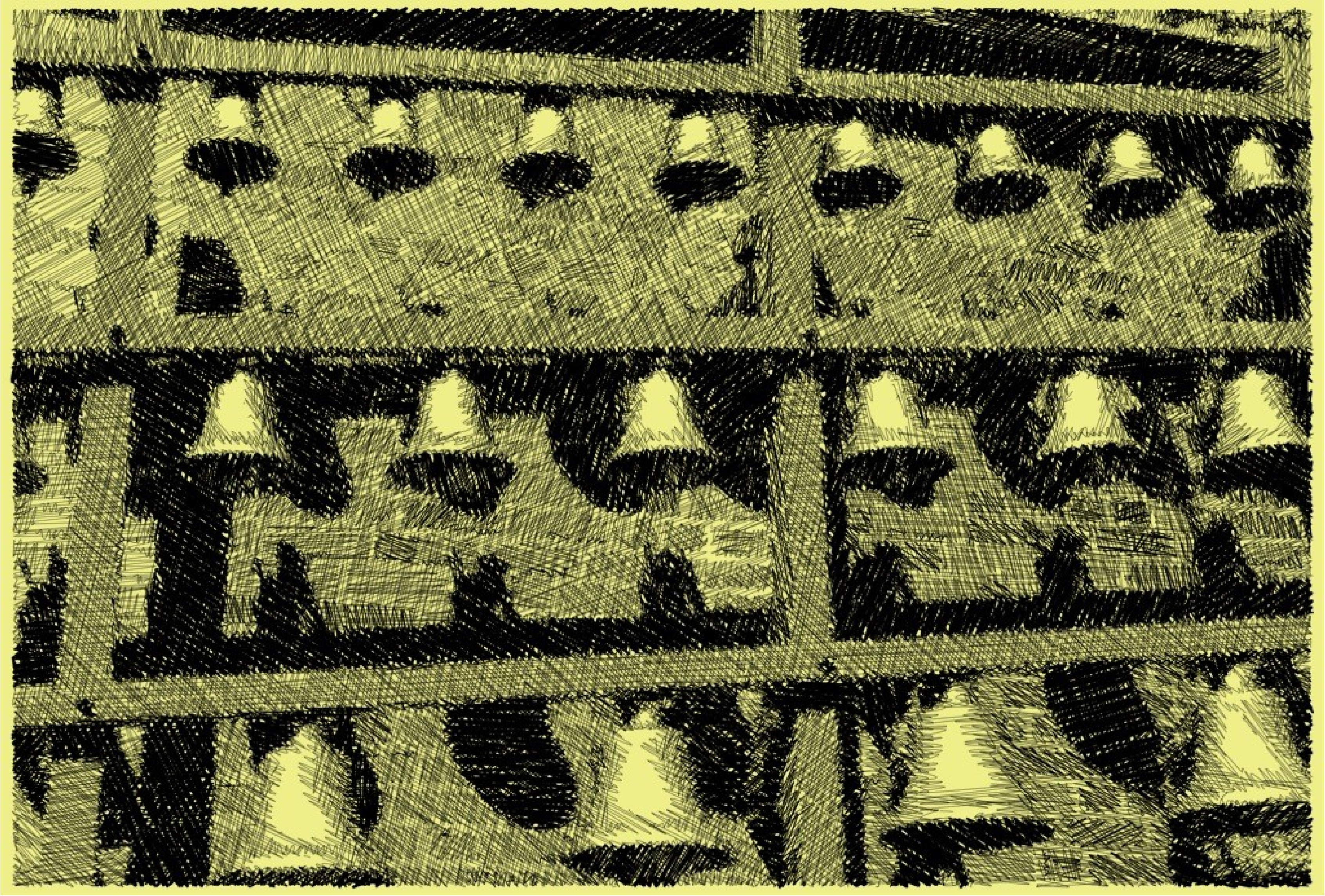


*Abb.: Glöcken, Darstellung einer Menge*

Ohne es zu wissen begegnet jedes Kleinkind dem Prinzip der Menge. Das Kind beginnt schon früh zu selektieren und bildet Einheiten aus Dingen oder Menschen, die ihm zusammengehörig erscheinen.

*Abb.: Bleistifte, Darstellung einer Menge*

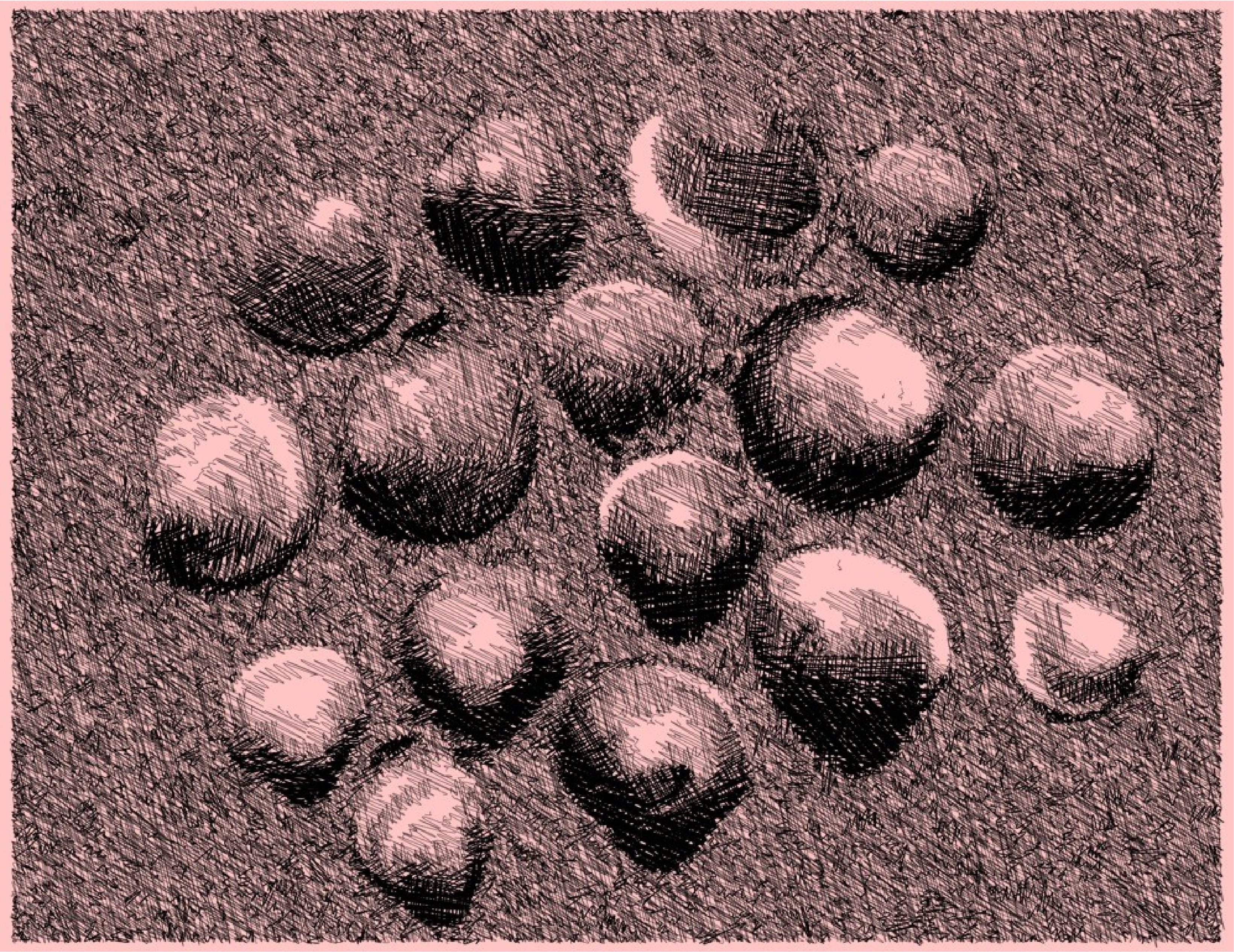
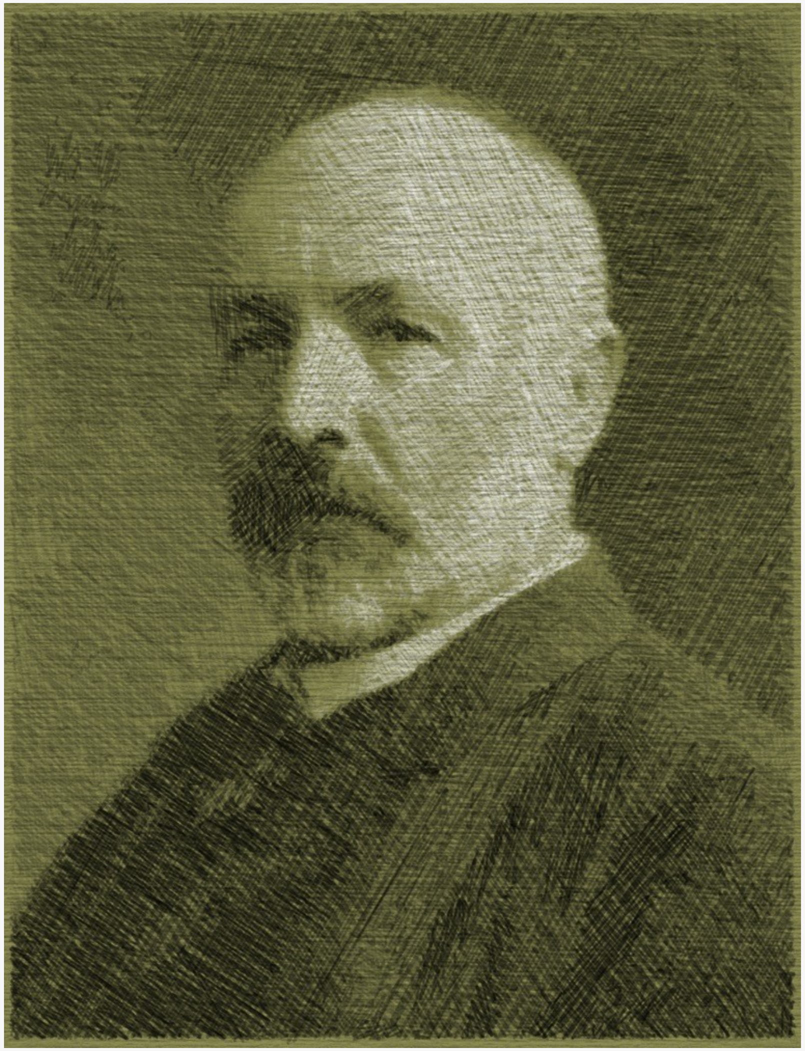


*Abb.: Muscheln, Darstellung einer Menge*

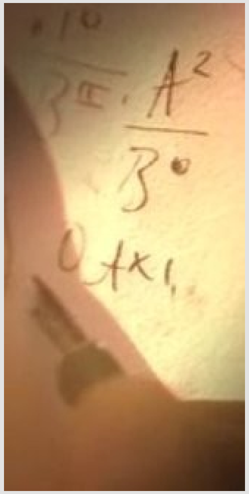


*Georg Cantor (1845-1918)*

Georg Cantor begründete Ende des *19.* Jahrhunderts die Mengenlehre. Es war eine fast lückenlose Theorie. Deswegen sprach David Hilbert von einem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat. Die Mengenlehre nennt man auch Cantor-Mengenlehre.

Wie sonst selten, kann man auch ein Datum des Auftretens der Mengenlehre in der Mathematik festlegen, nämlich den *29.* November *1873*, als Cantor in einem Brief an Richard Dedekind das Problem formulierte, ob die Menge der natürlichen Zahlen eineindeutig auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet werden kann. Einen Beweis veröffentlichte er in seiner Arbeit, die *1874* erschien. In dieser Arbeit betrachtet Cantor mindestens 2 verschiedene Arten des Unendlichen. Er stellt unter anderem fest, dass es keine bijektive (eineindeutige) Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der reellen Zahlen geben kann.

# Cantor-Mengenlehre



Cantor hat uns zum ersten Mal gesagt, was eine Menge eigentlich ist. Diese Beschreibung ist zwar keine Definition, aber die bestmögliche Beschreibung der intuitiven Vorstellung des Begriffs einer Menge:

“Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente“ von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.”

bestimmte Objekte:

Es soll unterscheidbar sein, ob ein Objekt Element der Menge ist oder nicht. Dazu gehört ein klares Kriterium für die Objekte, die zu einer Menge zusammengefasst werden. Z.B. kann man nicht die “Menge der großen Tiere” bilden, da es keine Definition eines großen Tieres gibt.

Andere Beschreibungen einer Menge:

- Unter einer Menge verstehen wir die Zusammenfassung gewisser Objekte, Elemente genannt, zu einer Einheit.
- Eine Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.
- Durch Mengenbildung wird aus mehreren Objekten ein neues Objekt gemacht, die Menge.

Eine Menge, die kein Element besitzt, heißt leere Menge.

Eine Veranschaulichung des Mengenbegriffs, die Richard Dedekind zugeschrieben wird, ist das Bild eines Sackes, der gewisse Dinge enthält. Anschaulich ist folgende Vorstellung für die leere Menge: ein leerer Sack. Die leere Menge ist also nicht “nichts”, sondern ein Behältnis, das nichts enthält.

Dedekind prägte den synonymen Begriff System, in welchem er Elemente zusammenfasste. Diese Bezeichnung ist heute noch teilweise üblich, z.B. nennt man eine “Menge von Vektoren” auch kurz ein Vektorsystem.

Was ist ein Objekt ?

Wie unterscheidet man Objekte und Mengen ?

Weder der Begriff Menge noch der Begriff Element werden im mathematischen Sinn definiert.

# *Darstellungsformen einer Menge: Aufzählende Form*

Mengen werden mit Hilfe der Mengenklammern (geschweifte Klammern) dargestellt, in denen die Elemente aufgezählt werden.

Symbole für Mengen sind große Buchstaben, z.B. *A, B, M.*

Symbole für Elemente sind z.B. kleine Buchstaben oder auch Zahlen: *a, b, c, 1, 7, 19, 22.*

Mengenschreibweise in aufzählender Form: $A = \{ a, b, c, d \}$

Man spricht: "$A$ ist die Menge mit den Elementen $a$, $b$, $c$, $d$."

Beispiele:

$M_1 = \{ -2, -1, 0, \ldots, 6, 7 \}, \qquad M_2 = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

Mengenschreibweise in beschreibender Form:

$M = \{\, x \mid x$ besitzt die Eigenschaften $E_1, E_2, \dots, E_n \,\}$

Beispiel 1: $A = \{\, x \mid x$ ist eine natürliche Zahl mit $2 \leqslant x \leqslant 5 \,\}$

Die aufzählende Form der Menge $A$ ist: $A = \{2, 3, 4, 5\}$

Wichtig:

- Ein Element kann in einer Menge nur *einmal* auftreten.
- Die Reihenfolge der Elementen spielt *keine Rolle*.

$\boxed{a \in A}$ – $a$ ist ein Element von $A$

$\boxed{b \notin A}$ – $b$ ist kein Element von $A$

Beispiel 2: $W = \{ x \mid x \text{ ist Augenzahl eines Würfels} \}$

Die aufzählende Form der Menge $W$ ist: $W = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Man könnte die Menge $W$ auch in folgender Form darstellen:

$W = \{ 5, 2, 6, 4, 1, 3 \}$

Beispiel 3: $B = \{ x \mid x \text{ Buchstaben des Wortes `Mathematik'} \}$

$B = \{ m, a, t, h, e, i, k \} = \{ a, e, h, i, k, m, t \}$

Wichtig:

Theoretisch kann jede Menge mit endlich vielen Elementen durch Aufzählen ihrer Elemente beschrieben werden. Bei einigen Mengen kann das schon umständlich sein.

Bei Mengen mit unendlich vielen Elementen ist die aufzählende Beschreibung der Menge in einzelnen Fällen möglich, wie z.B. in Darstellung der Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

Mit Punkten beschreibt man die Elemente, die eindeutig interpretiert werden können. Im Fall der Menge der natürlichen Zahlen folgt nach 4 ein Element (eine Zahl) 5 usw. Man sollte so viele Elemente in den Mengenklammern aufschreiben, dass weitere Elemente problemlos dazugefügt werden können. Ein schlechtes Beispiel wäre die Menge $C$:

$$C = \{ 1, 4, \ldots \}$$

Durch die Elemente 1 und 4 werden die Eigenschaften der weiteren Elemente der Menge nicht eindeutig charakterisiert. Wir geben hier einige Interpretationen:

$a$) Das folgende Element ist 3 Einheiten größer

$$C_1 = \{ 1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots \}$$

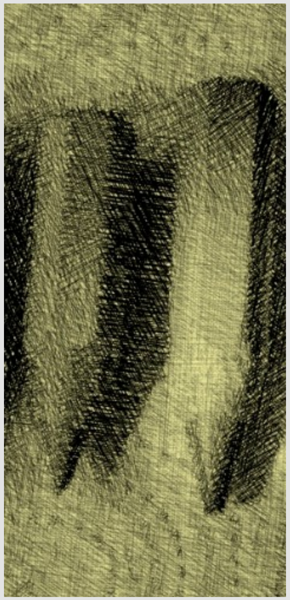
$b$) Das folgende Element ist 4 mal größer

$$C_2 = \{ 1, 4, 16, 64, 256, 1024, \ldots \}$$

$c$) Die Menge $C$ besteht aus Quadraten von natürlichen Zahlen $n > 0$:

$$C_3 = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots \}$$

# *Darstellungsformen einer Menge: Aufgaben 1, 2*



## Aufgabe 1:

Bestimmen Sie, ob $A$, $B$, $C$ und $D$ Mengen sind.

$A = \{ 10, 100, 1000, 10000, \dots \}$

$B$ = Menge der guten Ärzte

$C$ = Menge der Buchstaben des Wortes “Universität”

$D$ = Menge der kleinen Zahlen

## Aufgabe 2:

Geben Sie eine beschreibende Form folgender Menge

$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots \}$

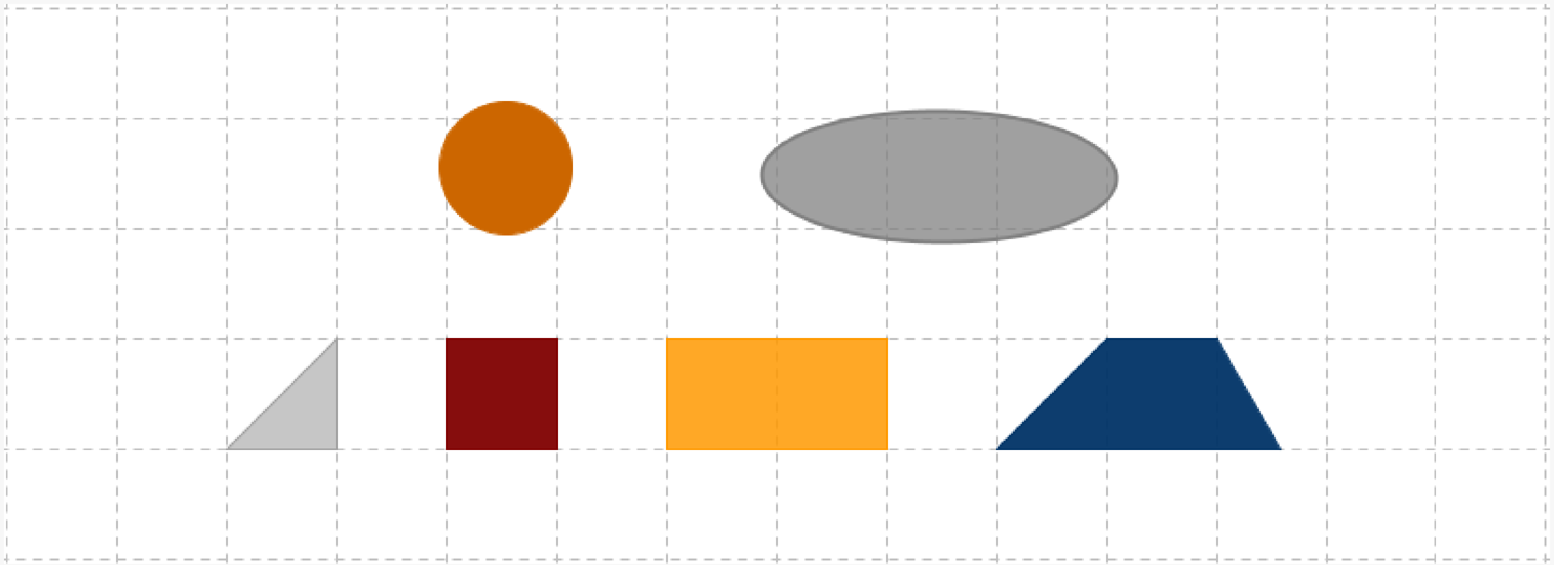


*Abb. A3-1: Die Menge der Aufgabe*

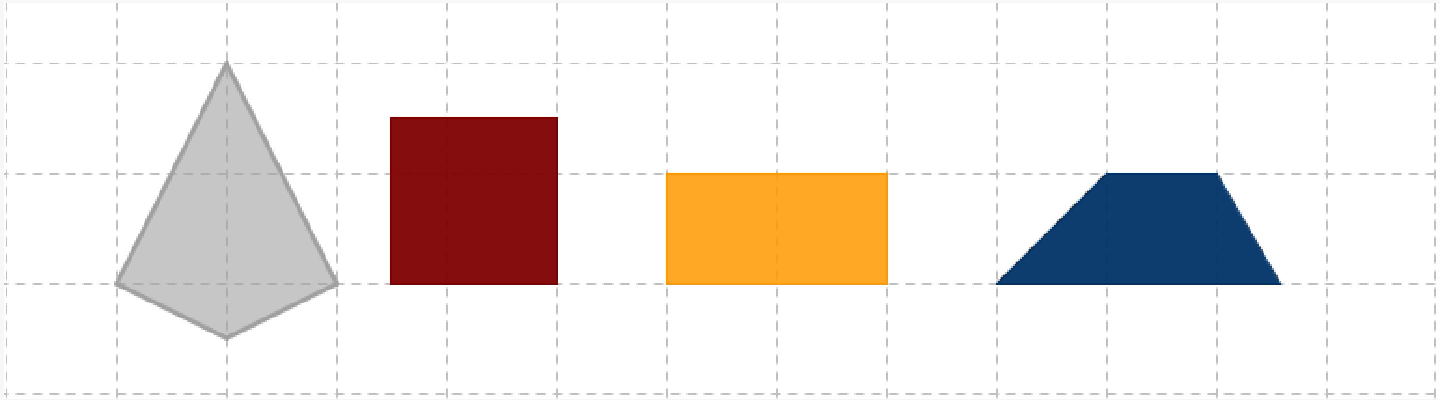


*Abb. A3-2: Die Menge der Aufgabe*

Geben Sie eine beschreibende Form der Mengen in Abb. A3-1 und A3-2.

$A$ und $C$ sind Mengen. Die Menge $A$ ist eine unendliche Menge. Ihre Elemente sind Potenzen von 10, z.B. sind die Zahlen 100 000 und 100 000 000 auch Elemente von A:

$$100\ 000,\ 100\ 000\ 000 \in A$$

Die Menge $C$ ist eine endliche Menge, sie besteht aus 9 Elementen, den Buchstaben des Wortes “Universität”. Man kann sagen, dass z.B. $i$ ein Element der Menge $C$ ist:

$$i \in C$$

$B$ und $D$ sind keine Mengen. Es gibt kein Kriterium, das einen guten Arzt oder eine kleine Zahl bestimmt.

Lösung 2:

$$P = \{\, 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \ldots \,\}$$

$a)\ P = \{\, x \mid x \text{ ist Primzahl} \,\}$

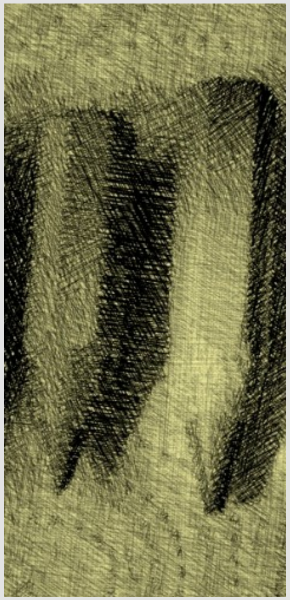
$b)\ P = \{\, x \mid x \text{ ist die Zahl, die genau zwei natürliche Zahlen als Teiler hat} \,\}$

Eine Primzahl ist also eine natürliche Zahl größer als eins, die nur durch sich selbst und durch 1 ganzzahlig teilbar ist.

Lösung 3: Mögliche Beschreibung der Mengen:

*Abb. A3-1:* Flache geometrische Figuren: Kreis, Ellipse, Dreieck, Quadrat, rechtwinkliges Viereck, Trapez.

*Abb. A3-2:* Flache geometrische Figuren mit vier Ecken.



## Aufgabe 4:

Geben Sie für die Menge $M$ eine Beschreibung durch eine definierende Eigenschaft an:

$$M = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

## Aufgabe 5:

Stellen Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Form dar:

$a)\quad M_1 = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \quad |x| \leqslant 4 \}$

$b)\quad M_2 = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 8x = 0 \}$

$c)\quad M_3 = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 + 3x = 2 \}$

$d)\quad M_4 = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 = 0 \}$

Die aufzählende Form der Menge $M$ lautet:

$$M = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \,\}$$

Mögliche Beschreibungen der Menge $M$ durch eine definierende Eigenschaft sind:

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } 0 \leqslant x < 5 \,\}$$

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } 0 \leqslant x \leqslant 4 \,\}$$

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl mit } -1 < x < 5 \,\}$$

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } x^2 < 25 \,\}$$

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } x^3 \leqslant 64 \,\}$$

$a)\quad M_1 = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z}, \quad |x| \leqslant 4 \,\}, \qquad L_1 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$b)\quad M_2 = \{\, x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 8x = 0 \,\}, \qquad L_2 = \{0, 4\}$

$$2x^2 - 8x = 0, \qquad x\,(x - 4) = 0$$

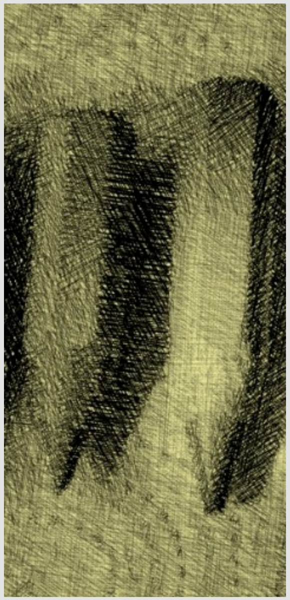
$c)\quad M_3 = \{\, x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 + 3x = 2 \,\}, \qquad L_3 = \{-2, 0.5\}$

$$2x^2 + 3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)\,(2x - 1) = 0$$

$d)\quad M_4 = \{\, x \mid x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 = 0 \,\}, \qquad L_4 = \{\, \emptyset \,\}$

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine leere Menge.

# *Darstellungsformen einer Menge: Aufgabe 6*



Skizzieren Sie die folgenden Zahlenmengen auf der Zahlengerade:

$a)\ M = \{-1, 2, 4\}$

$b)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ x > 1\}$

$c)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ x \leqslant 3\}$

$d)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -2 < x \leqslant 4\}$

$e)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -5 < x < 1\}$

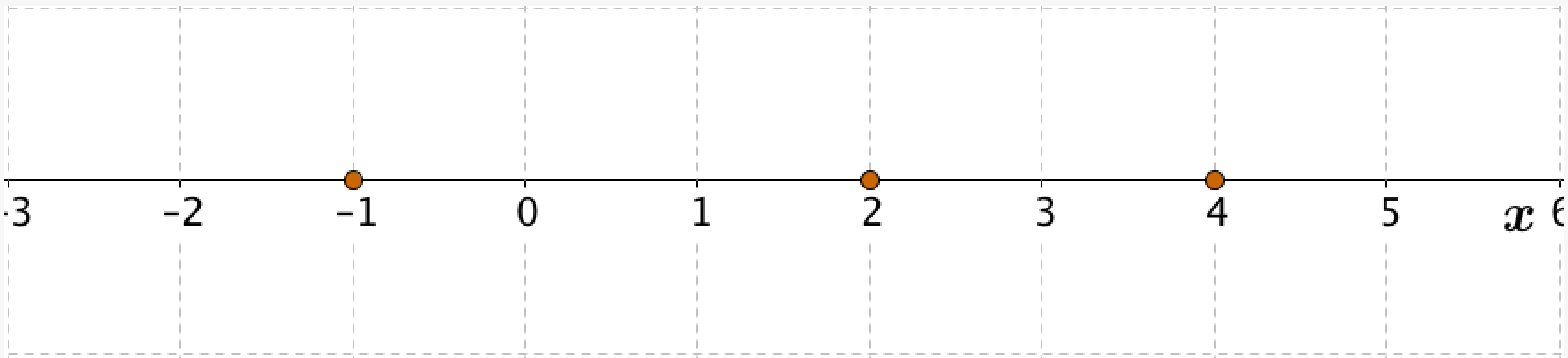
$f)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ x \neq -2,\ x \neq 1\}$

$g)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -2 < x \leqslant 6,\ \ x \neq 3\}$

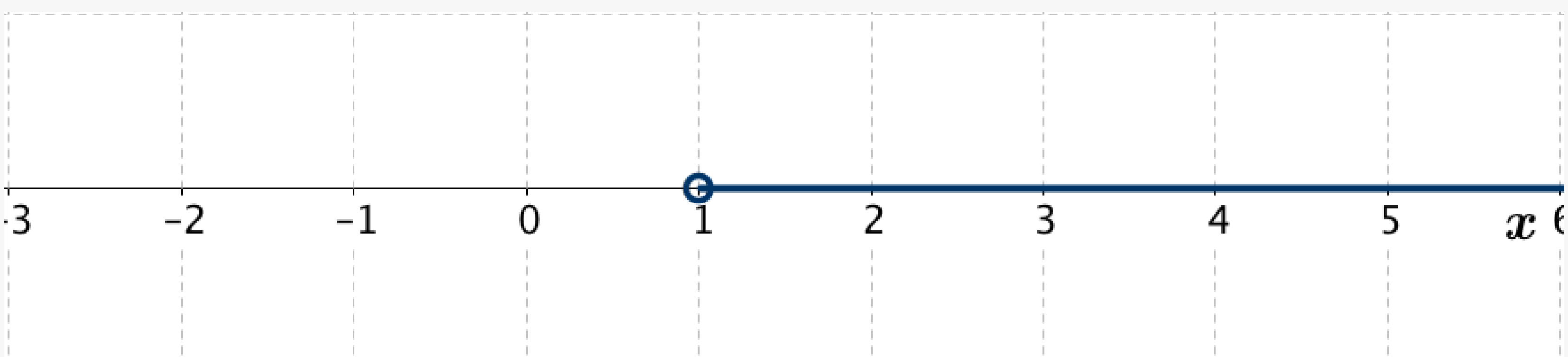
$h)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ 2 \leqslant x \leqslant 7,\ \ x \neq 5\}$

$i)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ |x| \leqslant 2\}$

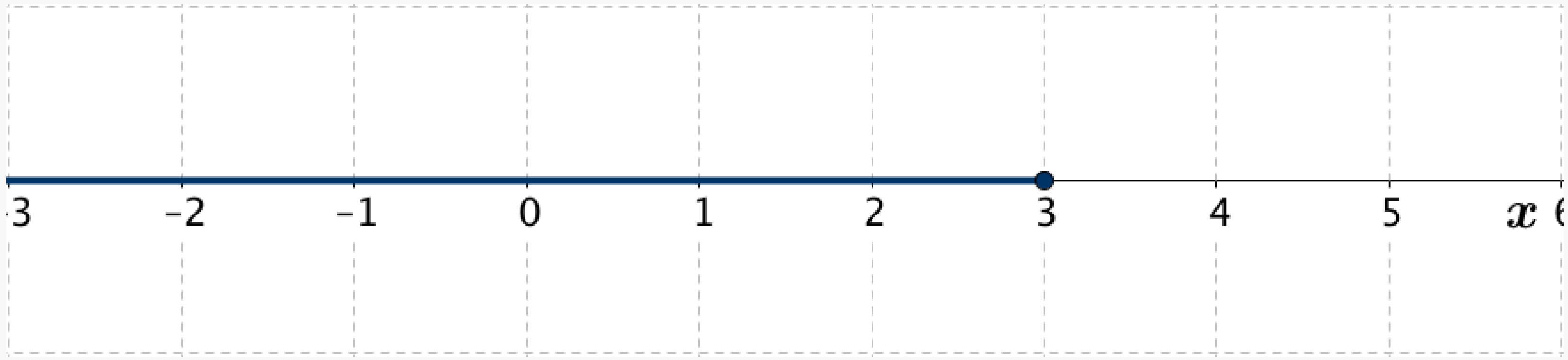
$j)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ |x| < 4\}$



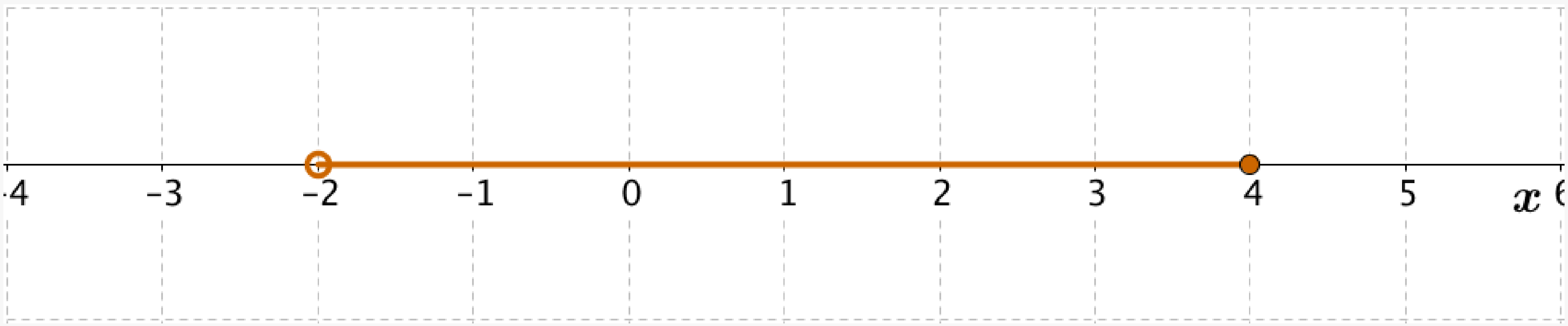

a) $M = \{-1,\ 2,\ 4\}$



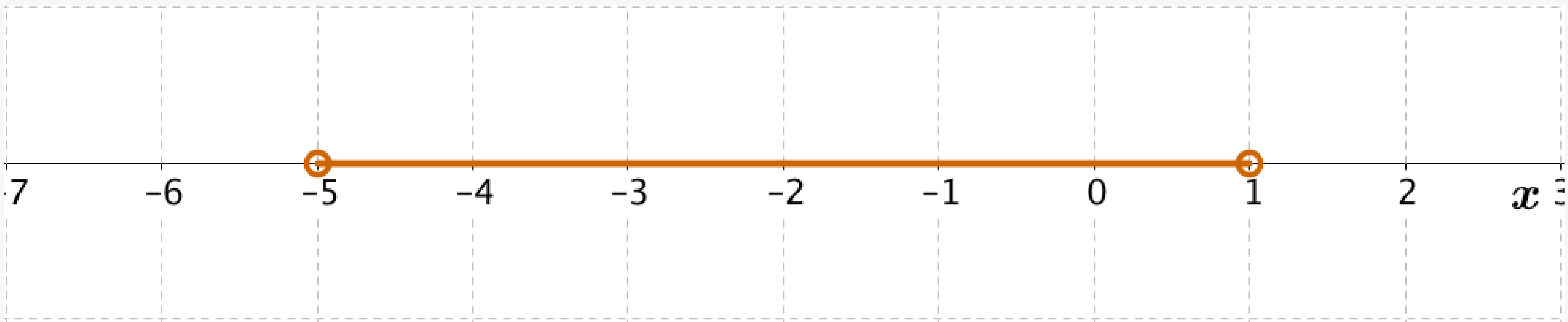

b) $M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\quad x > 1 \,\}$



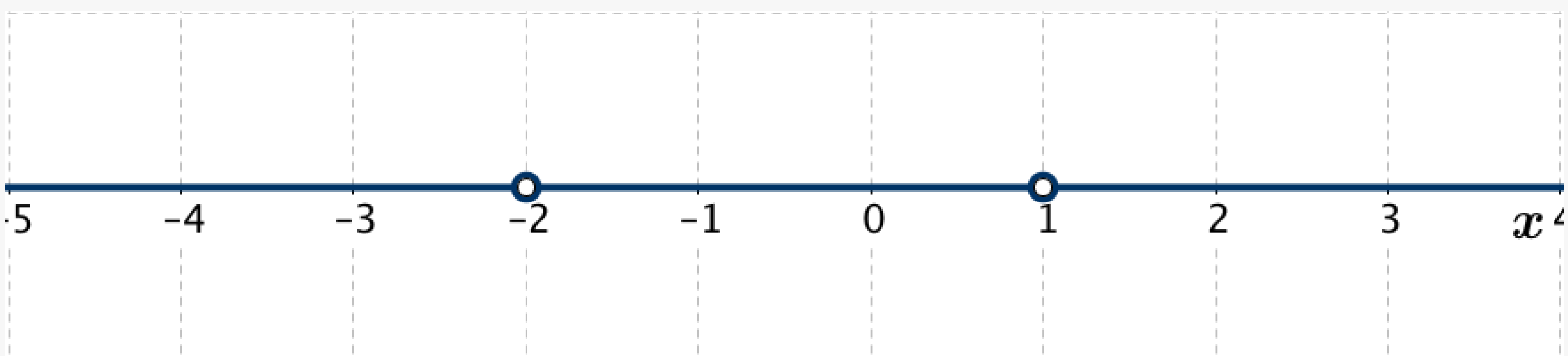

$c)\ M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant 3 \,\}$




$d)\ M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\quad -2 < x \leqslant 4 \,\}$

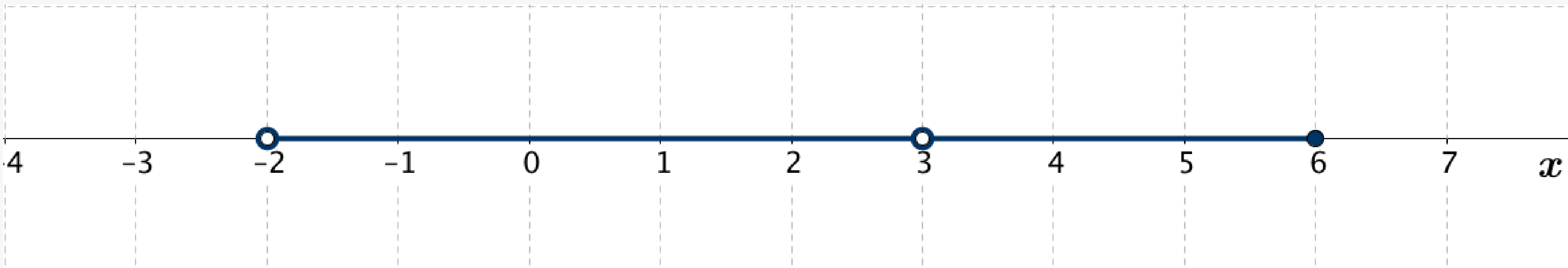



e) $M = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \ -5 < x < 1 \}$

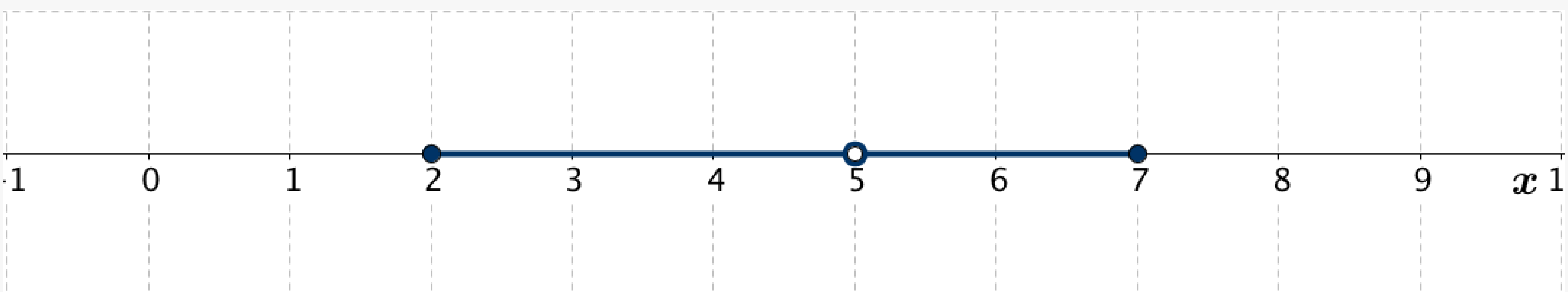



f) $M = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \ x \neq -2, \ x \neq 1 \}$

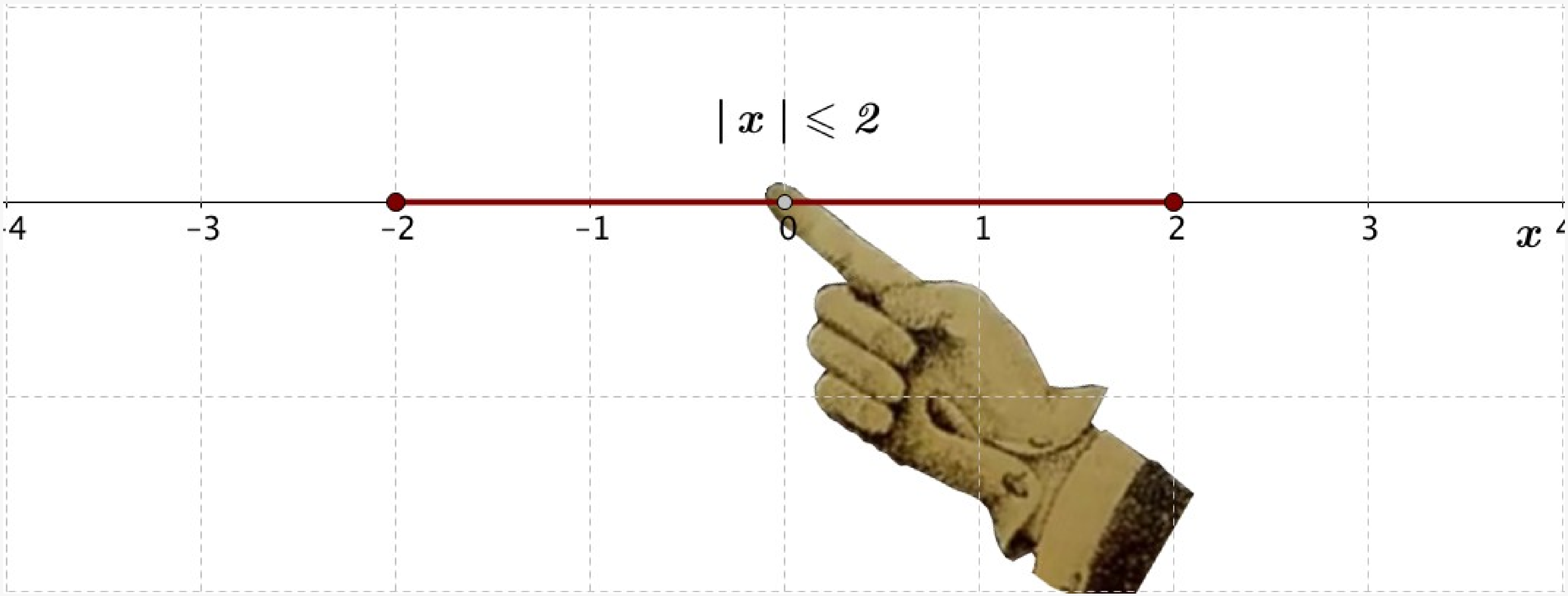
# Graphische Darstellung einer Menge: Lösung 6



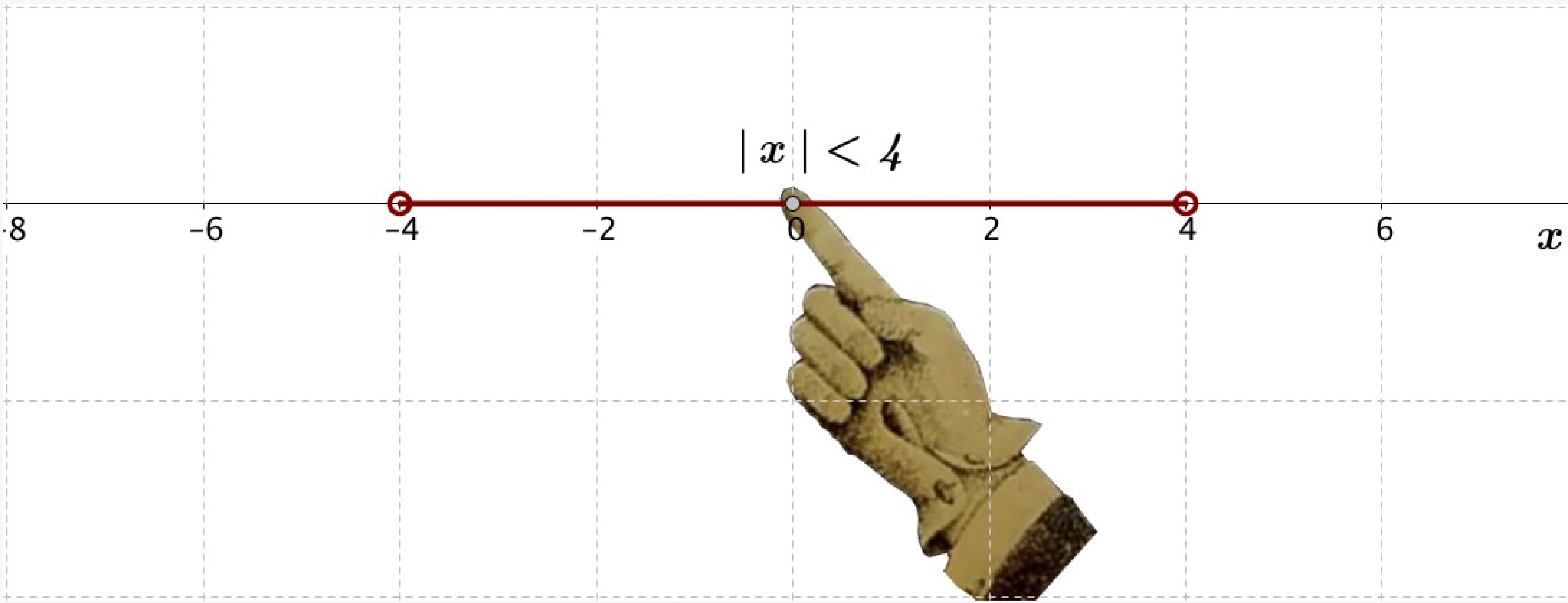

$$g)\ M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\quad -2 < x \leqslant 6,\quad x \neq 3 \,\}$$




$$h)\ M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\quad 2 \leqslant x \leqslant 7,\quad x \neq 5 \,\}$$

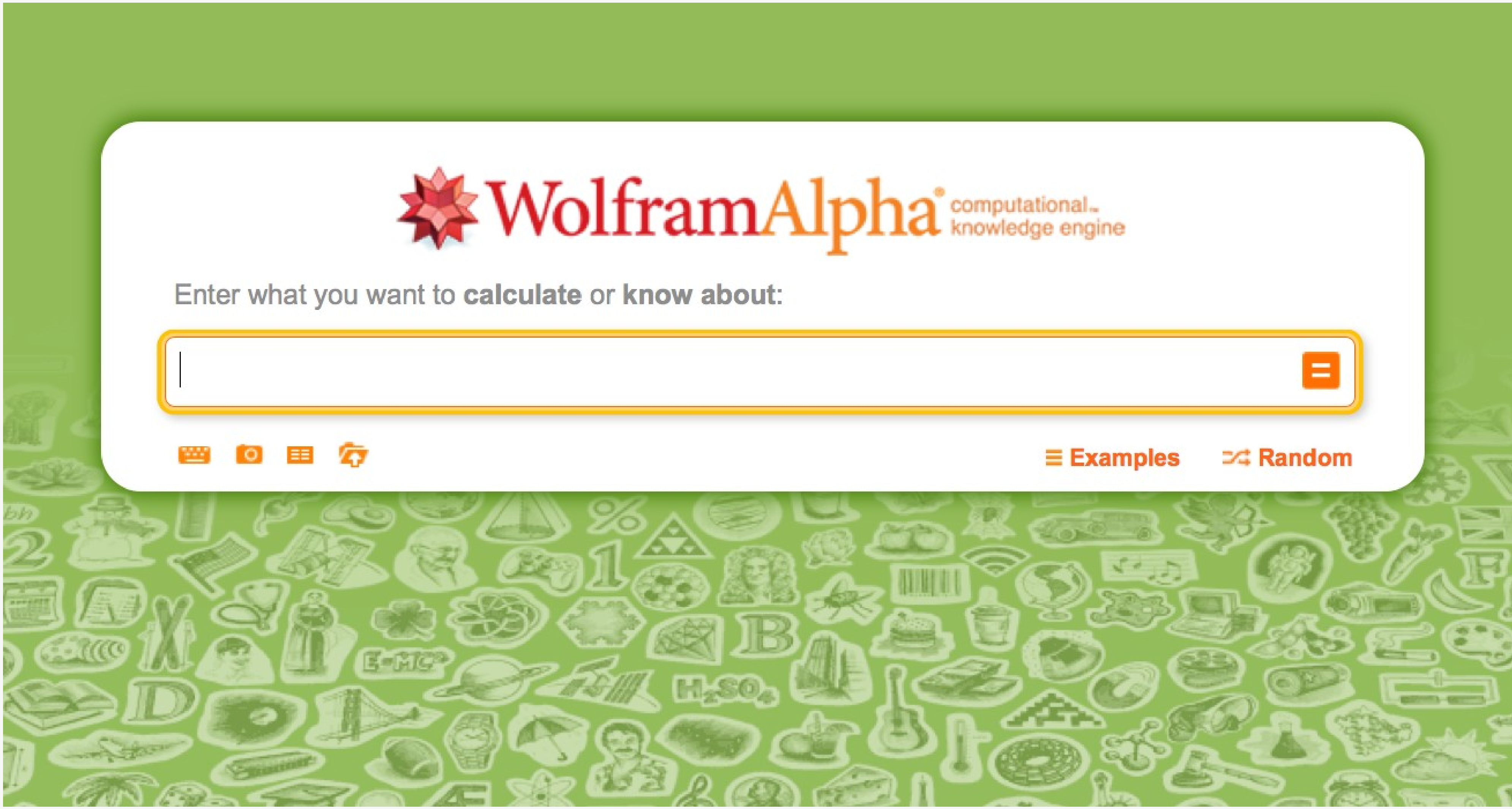



$$i)\ M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ |x| \leqslant 2 \,\}$$



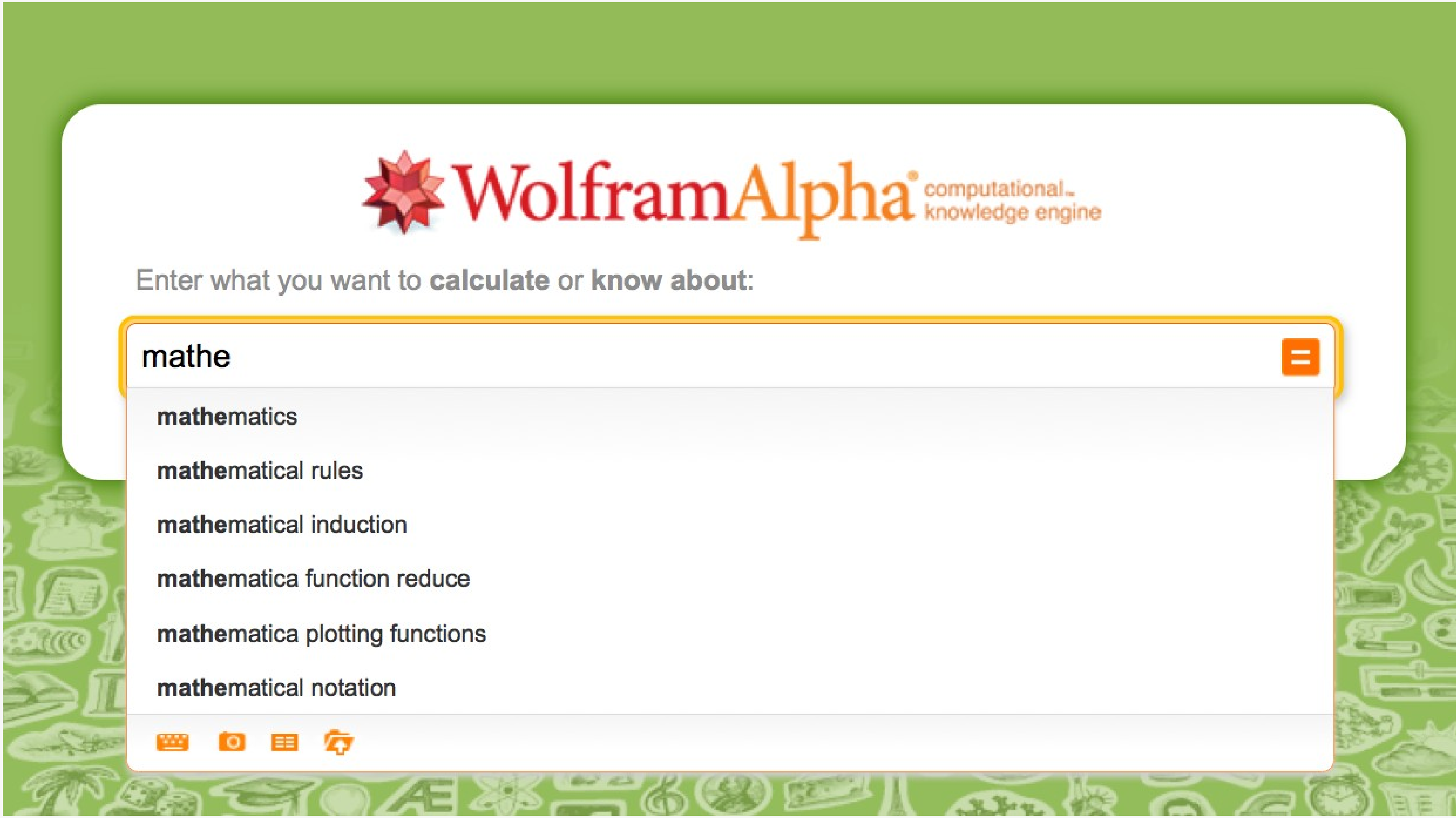

$j)\ M = \{ x \mid x \in \mathbb{R},\ |x| < 4 \}$

Im Folgenden wird gezeigt, wie man einige Mengen mit Wolfram Alpha darstellen kann.




*http://www.wolframalpha.com/*

# Wolfram Alpha



$2 < x < 8, x \neq 4$

Input:

$\{2 < x < 8, x \neq 4\}$

Alternate form:

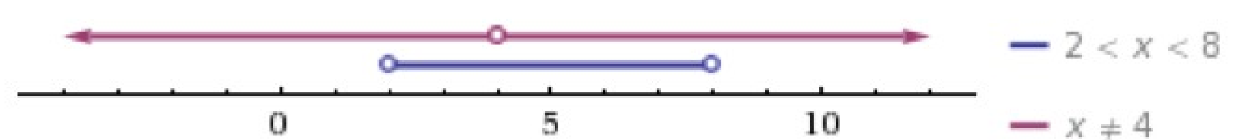
$\{x < 8 \land x > 2, x \neq 4\}$

Solutions:

$2 < x < 4$

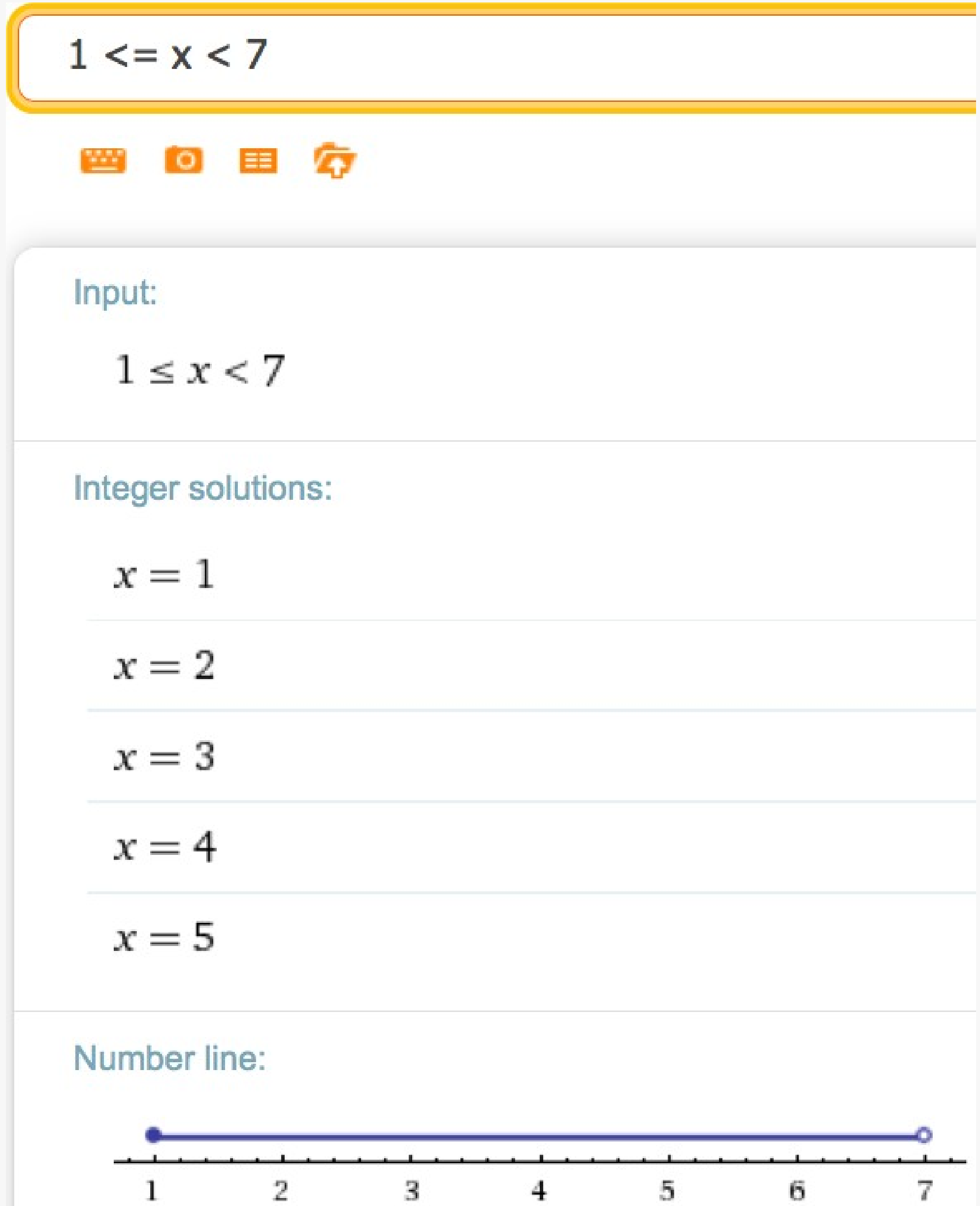
$4 < x < 8$

Number line:




$$M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\quad 2 < x < 8,\quad x \neq 4 \,\}$$

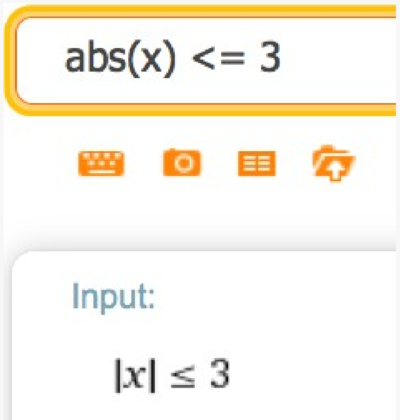
# Graphische Darstellung einer Menge mit Wolfram Alpha

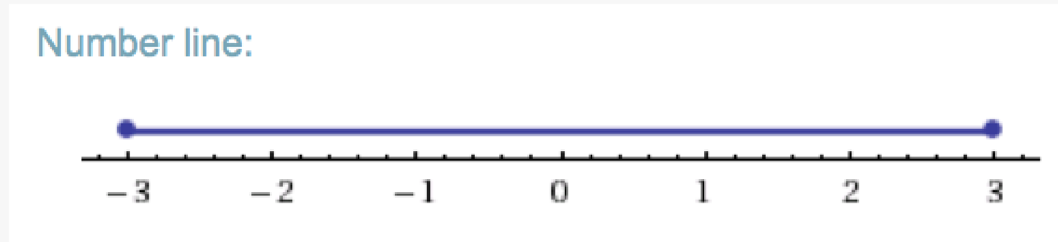



$$M = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant x < 7 \}$$

# *Graphische Darstellung einer Menge mit Wolfram Alpha*

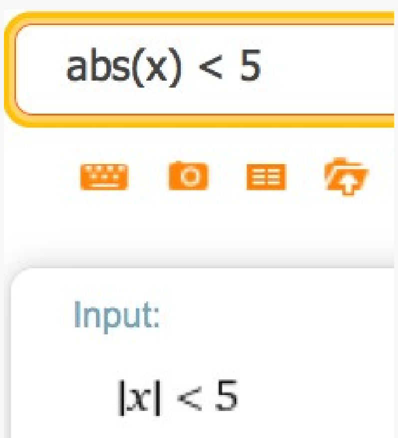
*a)*

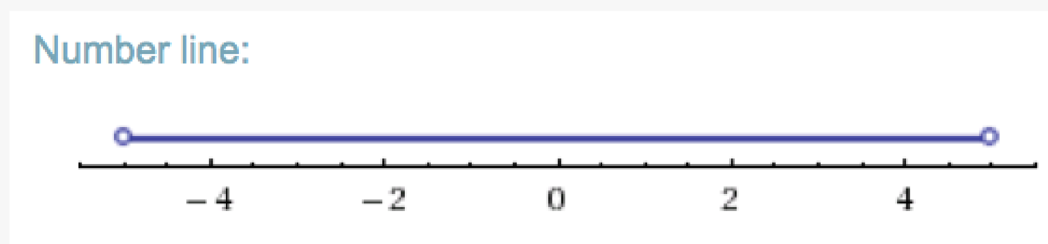



$$a)\; M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ |x| \leqslant 3 \,\}$$

*b)*




$$b)\; M = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ |x| < 5 \,\}$$