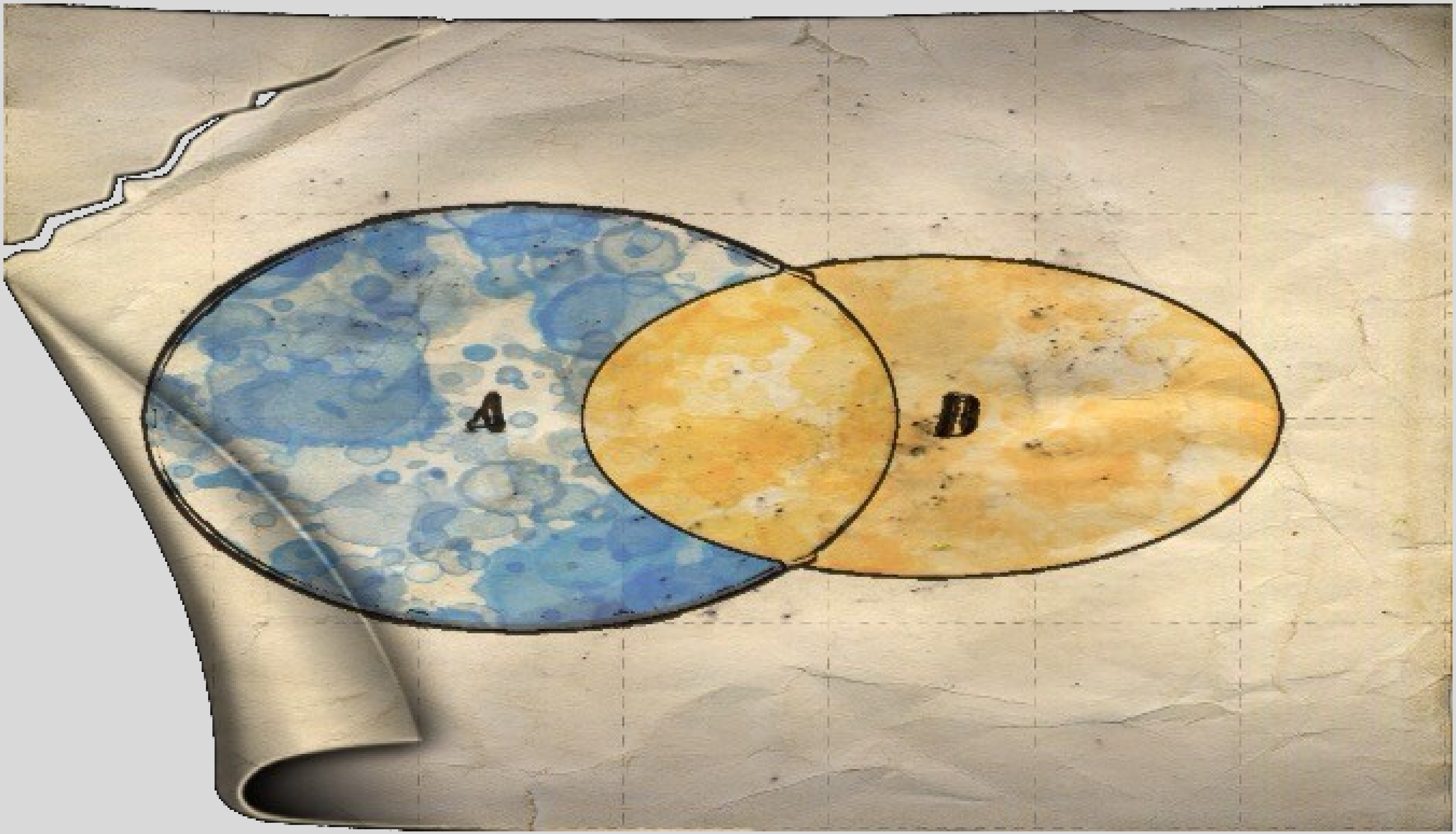
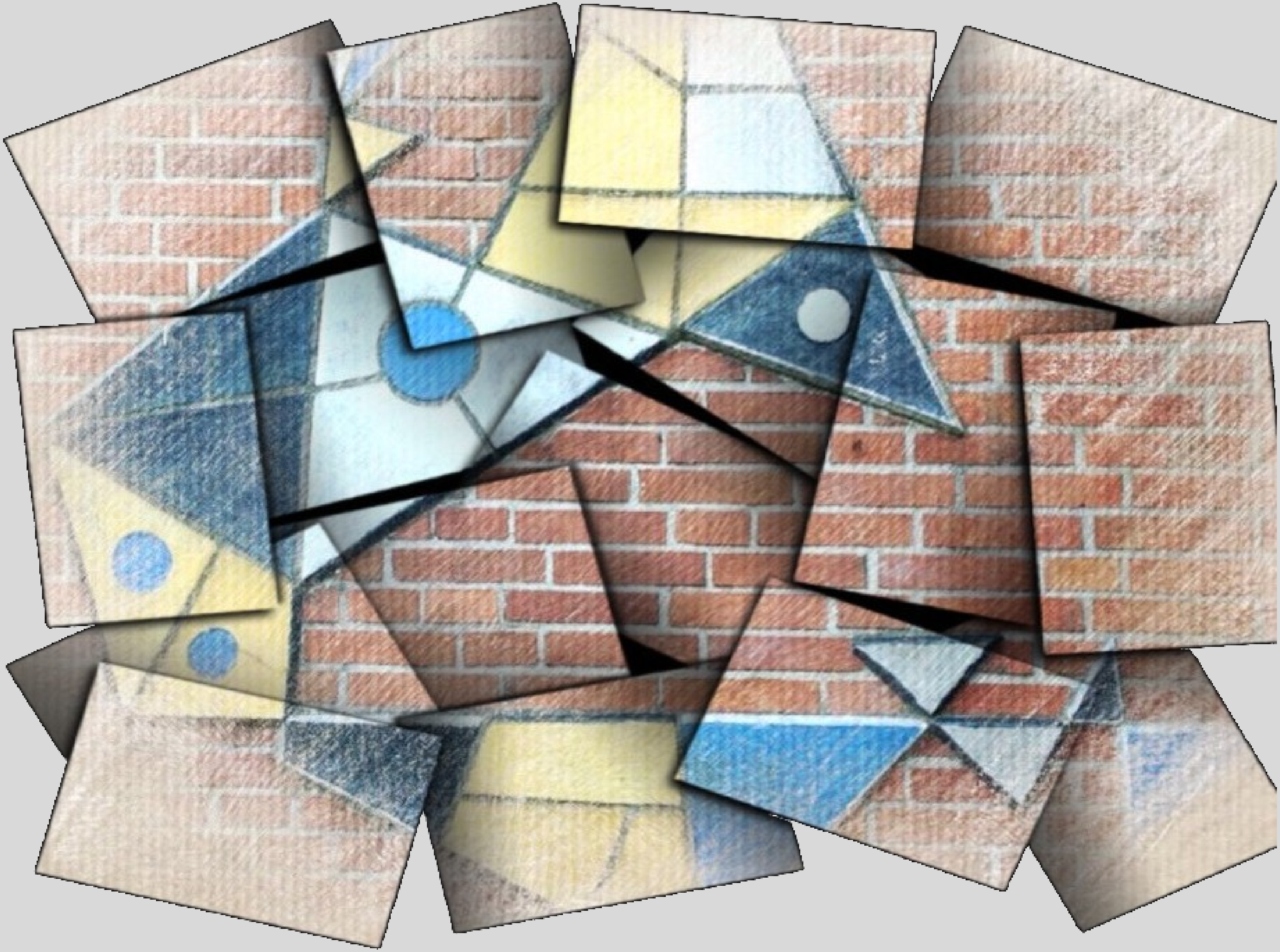


Euler-Venn-Diagramme

Mengendiagramme dienen der graphischen Veranschaulichung der Mengenlehre.

M-1, Lubov Vassilevskaya



Mathematische Symbole

$\varnothing$ – leere Menge

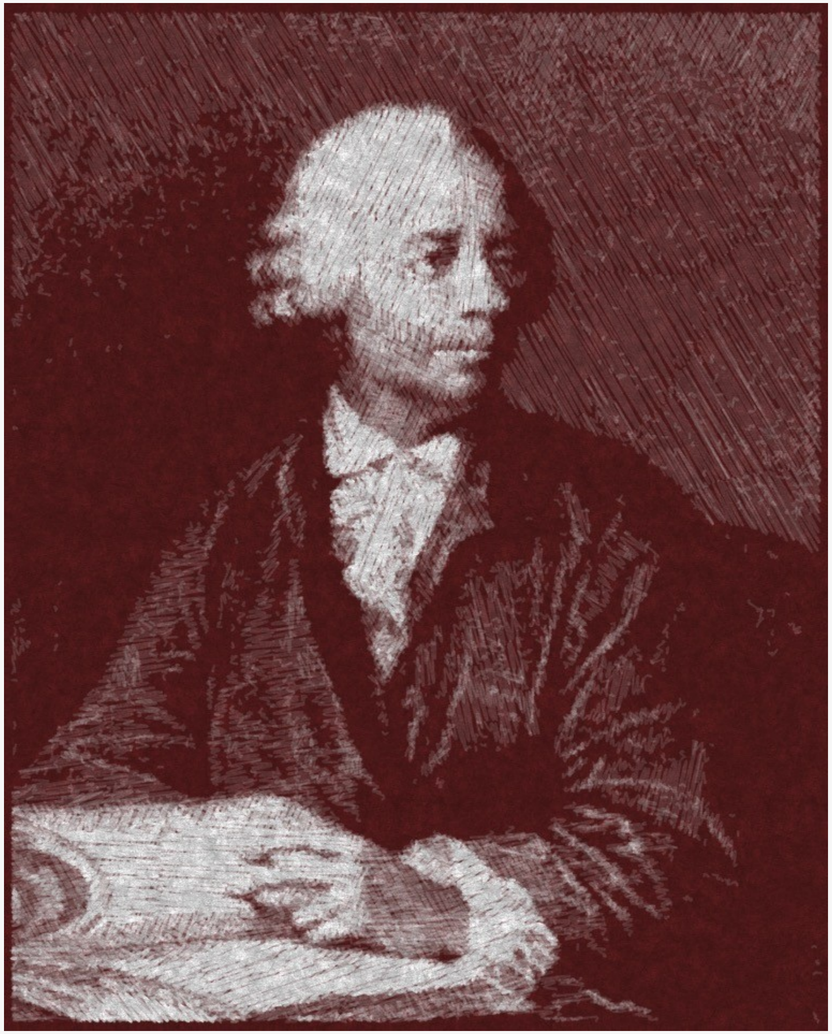
$\Rightarrow$ – Folge-Pfeil

$\Leftrightarrow$ – Äquivalenz-Pfeil

$\exists$ – Existenzquantor, $\exists x$ – für (mindestens) ein x gilt

$\forall$ – Allquantor, $\forall x$ – für alle x gilt

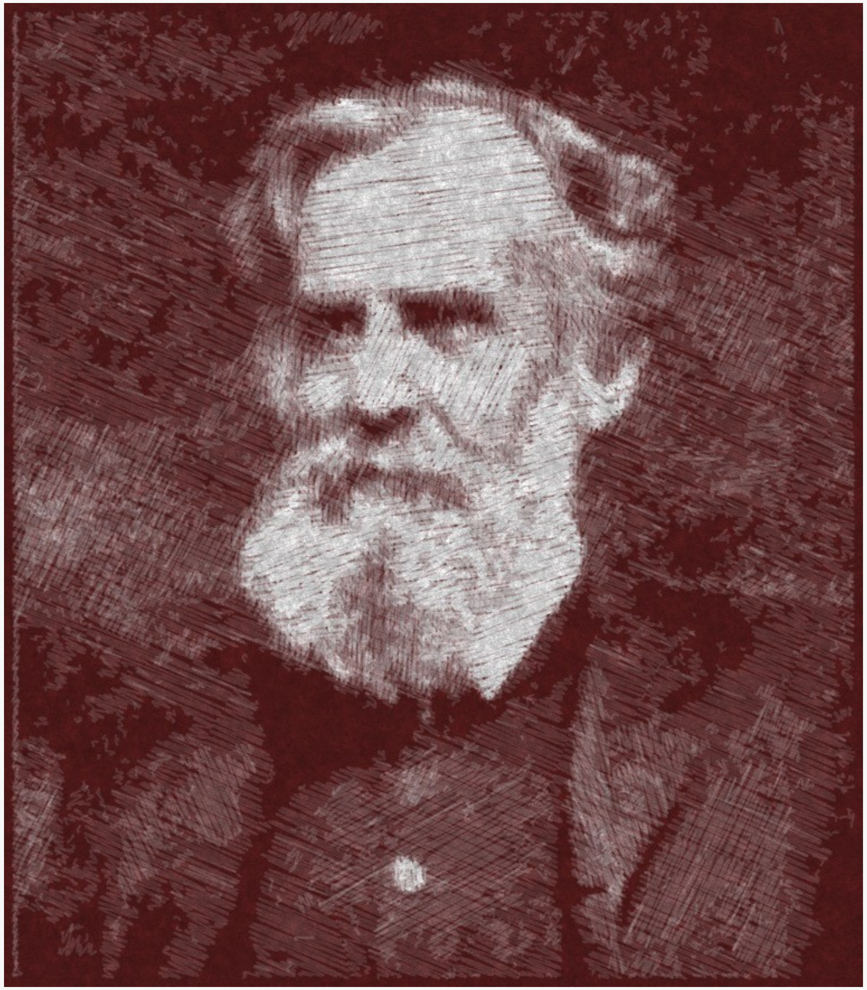
$a \wedge b$ – a und b, $a \vee b$ – a oder b,



Leonard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler war einer der größten Mathematiker aller Zeiten. Seine zahlreichen Werke in vielen Bereichen hatten einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik.

John Venn



John Venn (1834-1923)

John Venn war ein englischer Mathematiker. Als Professor für Logik und Naturphilosophie lehrte er in Cambridge mehr als *30* Jahre. Im Anschluss an Leonhard Euler führte er die graphische Darstellung der kategorischen Aussagen der Klassenlogik weiter (Venn-Diagramme). Er prägte den Begriff der symbolischen Logik.

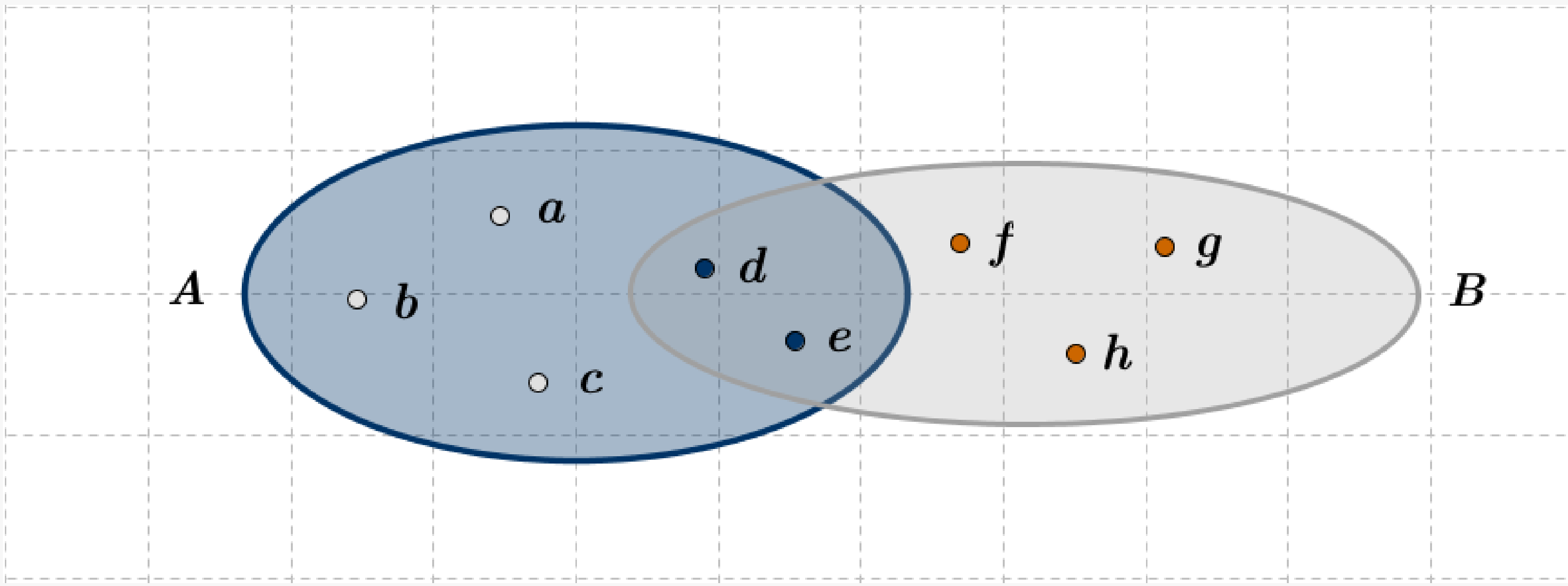


Abb. 1-1: Darstellung eines Euler-Venn-Diagramms

$$A = \{ a, b, c, d, e \}, \quad B = \{ d, e, f, g, h \}$$

$$a \in A, \quad a \notin B, \quad g \in B, \quad g \notin A, \quad e \in A, \quad e \in B$$

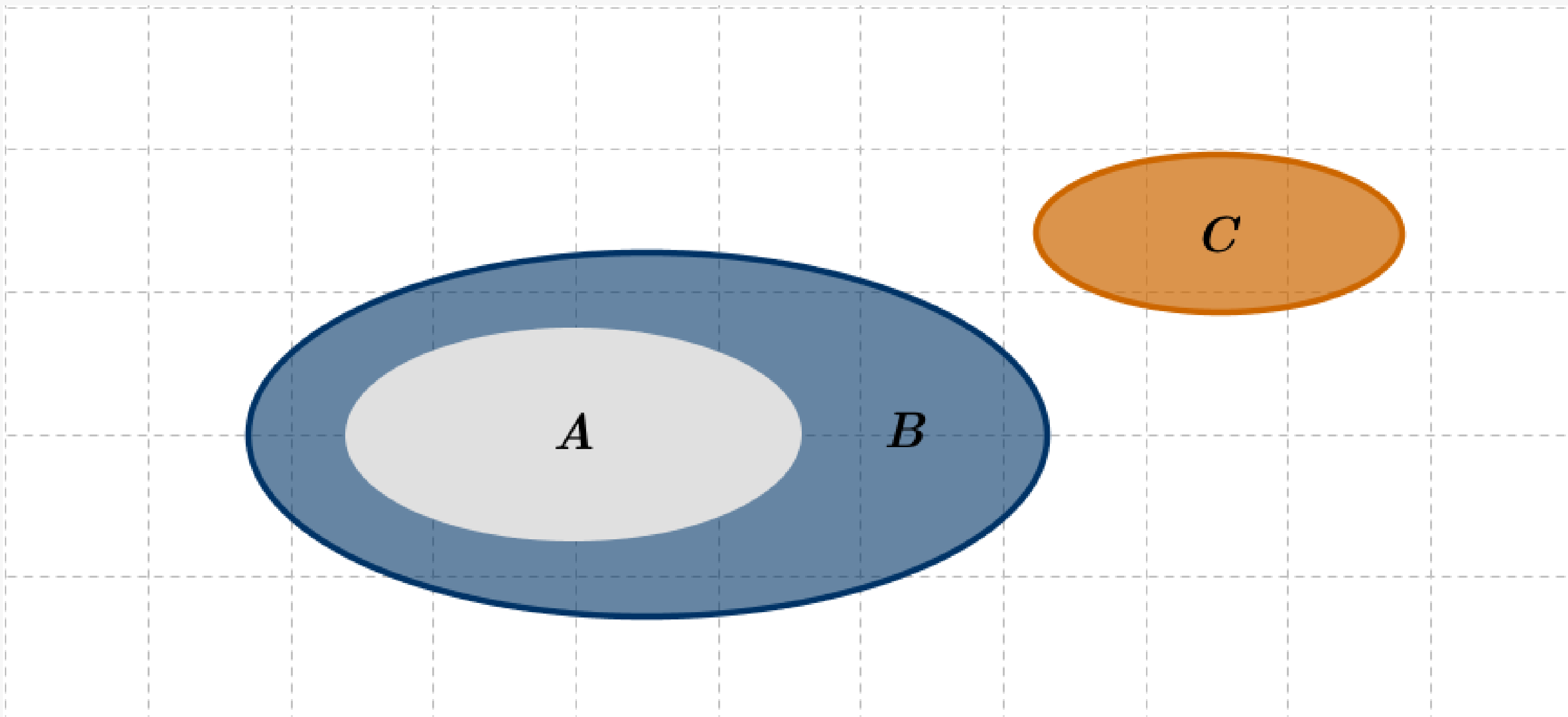


Abb. 1-2: Die Menge A ist Teilmenge der Menge B, die Menge C ist nicht Teilmenge der Menge B

$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \;\Rightarrow\; a \in B$ – A ist eine Teilmenge von B

$A \subset A, \quad \emptyset \subset A$ – für jede Menge

$A \subset B, \quad A \neq B$ – A ist echte Teilmenge von B

$C \not\subset A, \quad C \not\subset B$ – C ist nicht Teilmenge von A und B

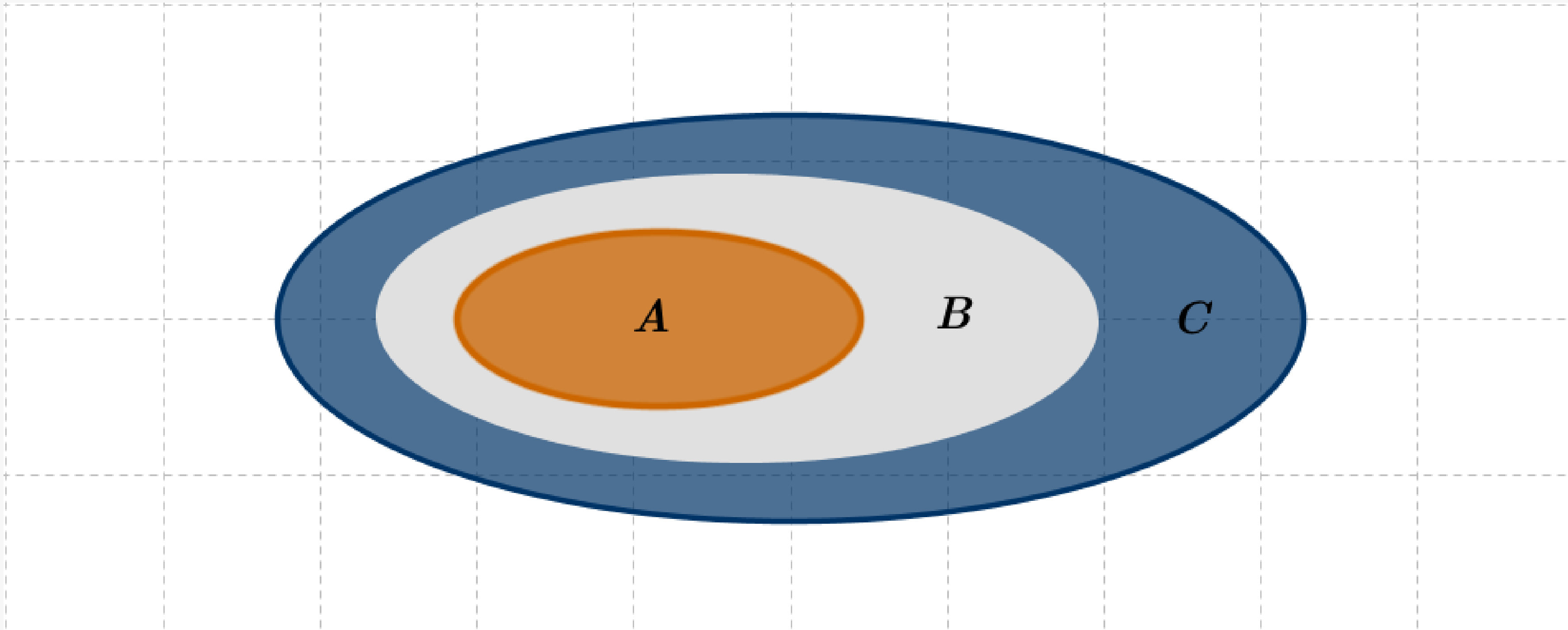


Abb. 1-3: Die Menge A ist die Teilmenge der Menge B und der Menge C, die Menge B ist die Teilmenge der Menge C

Transitive Eigenschaft der Teilmengen: $A \subset B\,,\quad B \subset C \quad \Rightarrow \quad A \subset C$

Beispiel:

$$A = \{1,\ 3\}\,,\qquad B = \{0,\ 1,\ 3\}\,,\qquad C = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

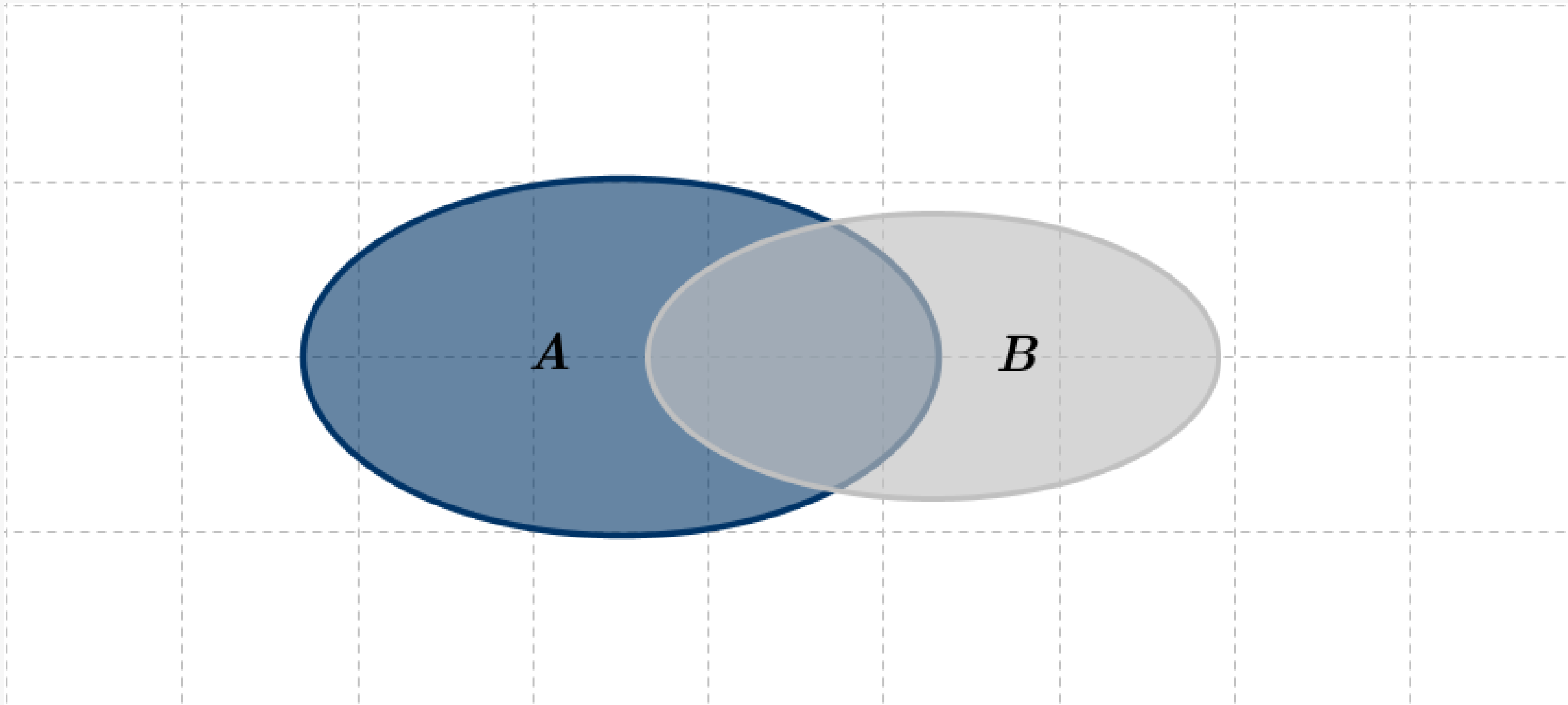


Abb. 1-4: Schnittmenge zweier Mengen A und B

Die Schnittmenge (der Durchschnitt) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

$$A \cap B = \{ \, x \mid x \in A , \quad x \in B \, \}$$ (gelesen: A geschnitten mit B)

$$A \cap B = \{ \, x \mid x \in A \underbrace{\wedge}_{und} x \in B \, \}$$

Beispiel: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$

Disjunkte Mengen

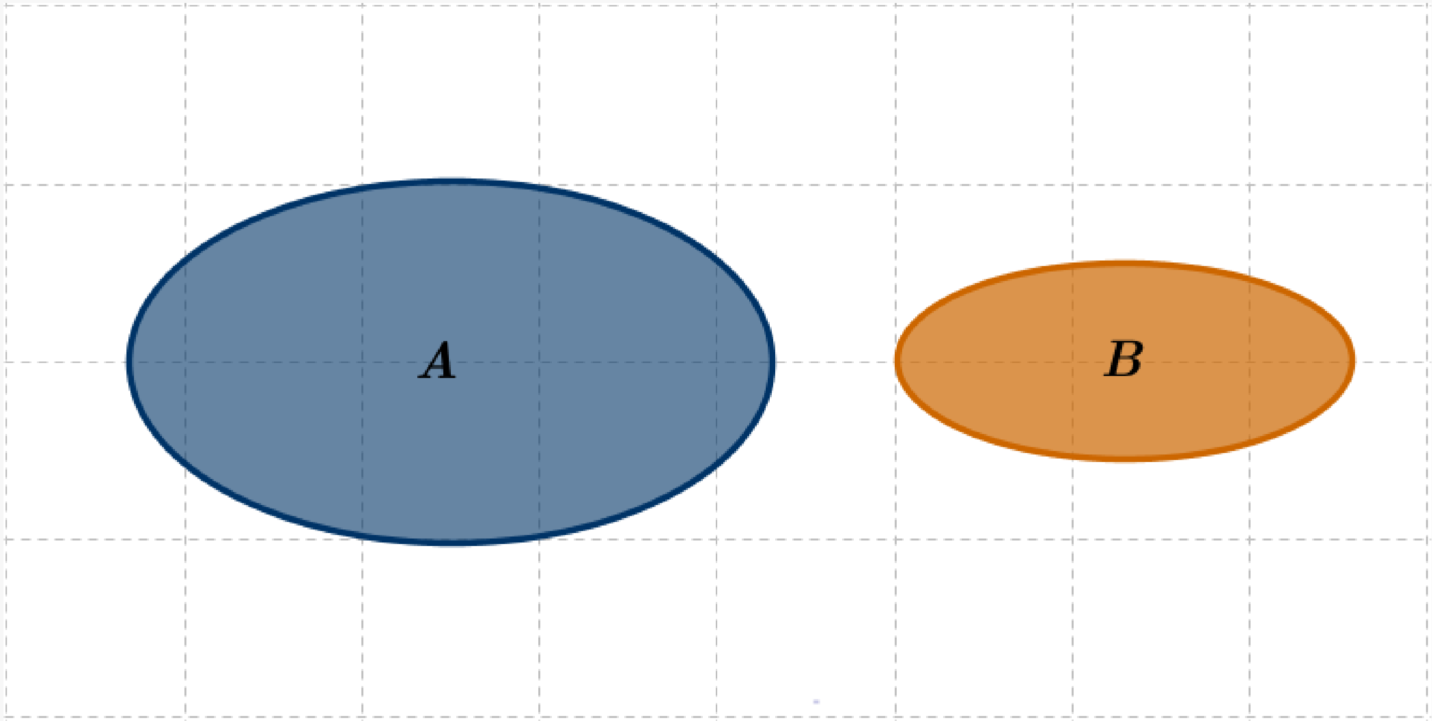


Abb. 1-5: Disjunkte Mengen A und B

Mengen A und B heißen disjunkt (elementfremd), falls $A \cap B = \emptyset$.

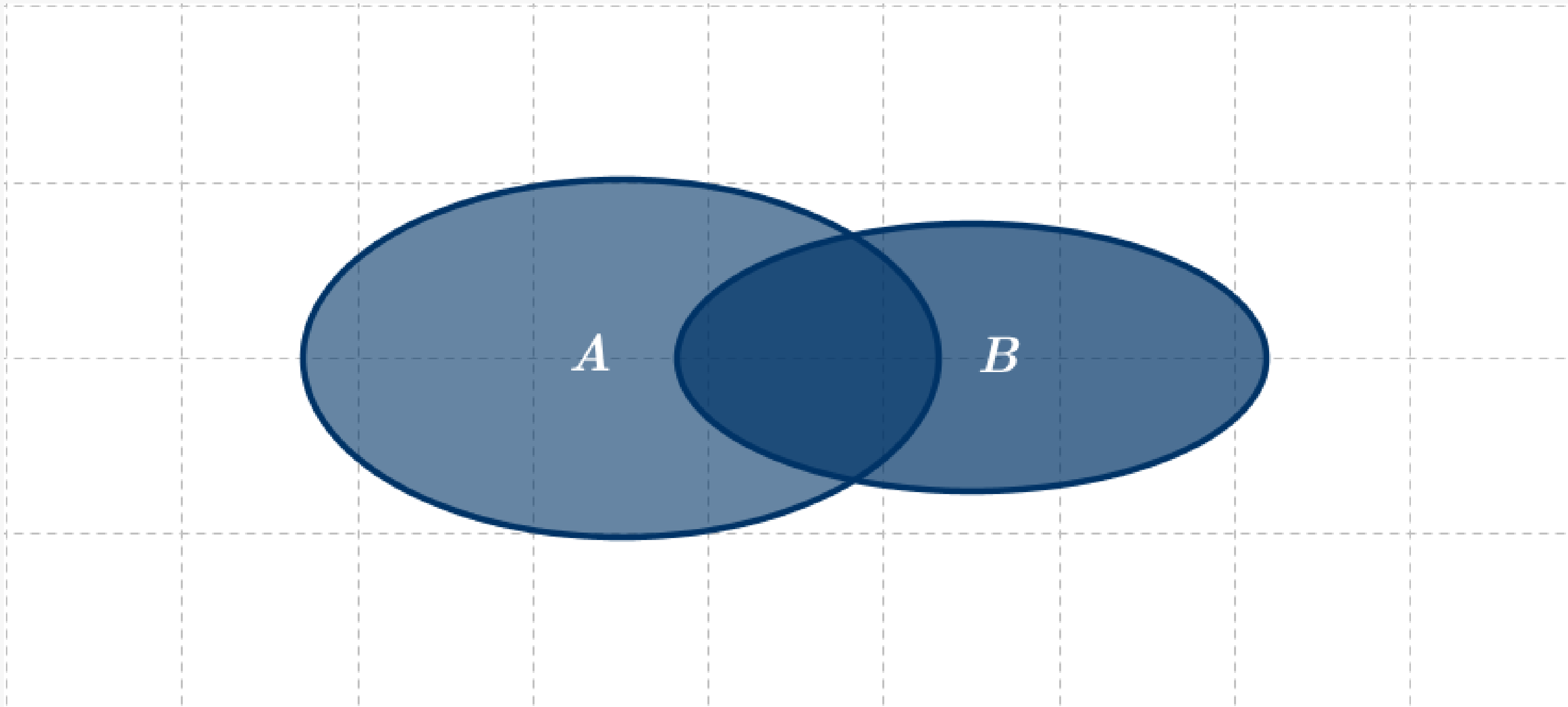


Abb. 1-6: Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören.

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \quad \text{oder} \ x \in B \}$ (gelesen: A vereinigt mit B)

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \underbrace{\vee}_{oder} x \in B \}$$

Beispiel:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

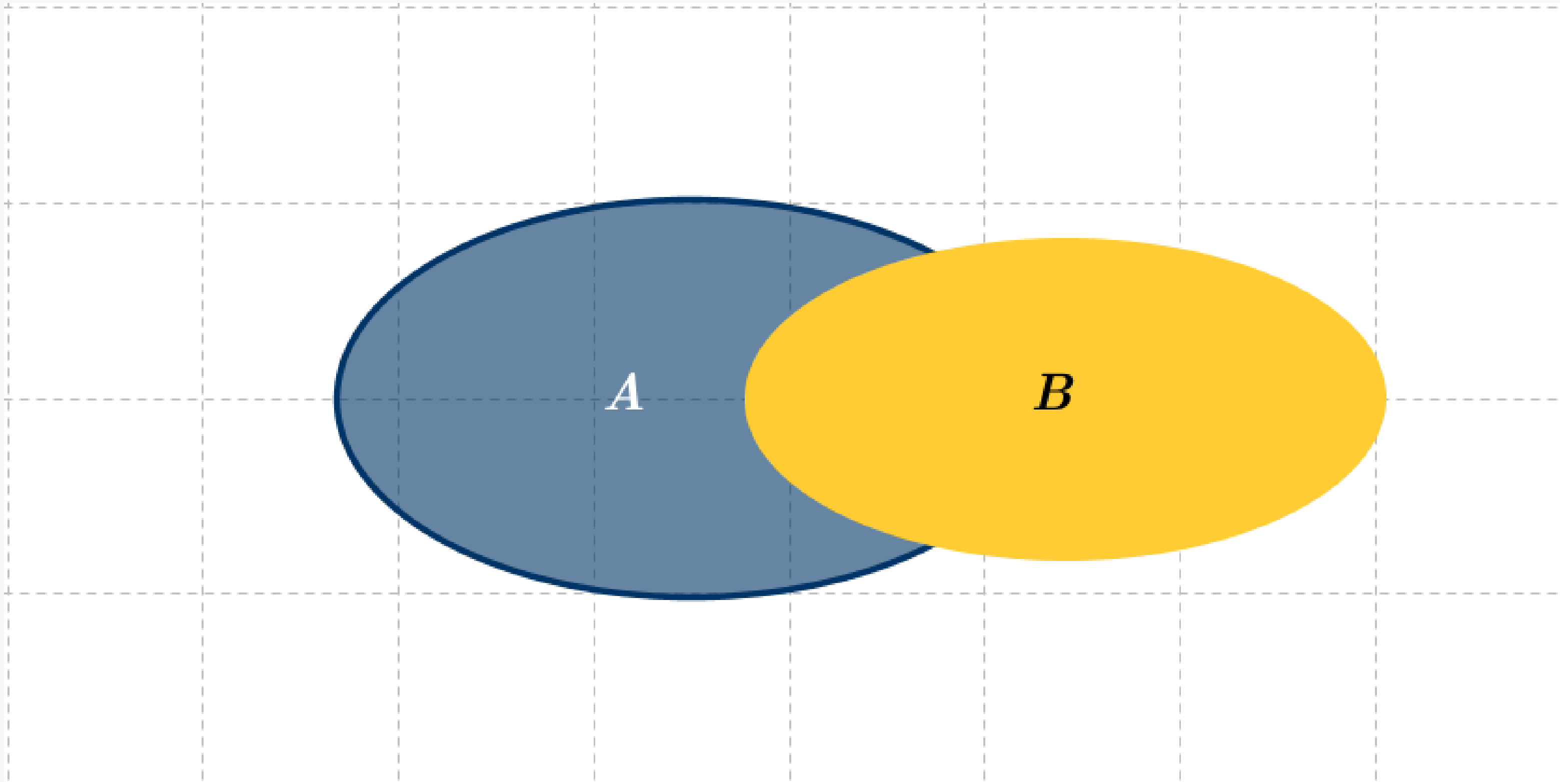


Abb. 1-7: Differenzmenge $A \setminus B$: Elemente Menge A ohne Elemente Menge B. In der Abbildung ist die Menge $A \setminus B$ blau dargestellt

Die Differenzmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A, nicht aber zu B gehören.

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A, \quad x \notin B \} \qquad \text{(gelesen: } A \text{ ohne } B\text{)}$$

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \underbrace{\wedge}_{und} x \notin B \}$$

Beispiel: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \setminus B = \{5, 7, 9\}$

Cantor legte nicht nur Operationen mit Mengen fest (z.B. Vereinigung und Durchschnitt), sondern suchte nach Maßstäben für den Vergleich von Mengen. Dafür schuf er den Begriff der Mächtigkeit. Bei endlichen Mengen bereitet dieser keine Schwierigkeiten: Von zwei solchen Mengen hat diejenige die größere Mächtigkeit, die mehr Elemente enthält, und Mengen mit gleich vielen Elementen sind gleichmächtig.

Definition:

Die Mächtigkeit einer endlichen Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiel:

$$A = \{1,\ 3\}, \qquad B = \{0,\ 1,\ 3\}, \qquad C = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

$$|\,A\,| = 2, \qquad |\,B\,| = 3, \qquad |\,C\,| = 6$$

Wenn die Mengen U und V die gleiche Anzahl von Elementen haben, sind sie gleichmächtig. Symbolisch wird es so geschrieben:

$$|\,U\,| = |\,V\,| \quad \Leftrightarrow \quad U \sim V$$

Definition:

Die Potenzmenge einer gegebenen Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Sie enthält auch die leere Menge und die Menge A als Elemente.

Beispiel:

Wir bestimmen Potenzmengen der folgenden Mengen

$$M_1 = \{a\}, \qquad M_2 = \{a, b\}$$

$$P(M_1) = \{\emptyset, \{a\}\}, \qquad |P(M_1)| = 2$$

$$P(M_2) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \qquad |P(M_2)| = 4$$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Potenzmenge der Menge M

$a)\ M = \{a, b, c\}, \qquad b)\ M = \{x, y, u, z\}$

Lösung 1:

$a)\ M = \{a, b, c\}$

$$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$b)\ M = \{x, y, u, z\}$

$$P(M) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{u\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, u\}, \{x, z\}, \{y, u\}, \{y, z\},$$
$$\{u, z\}, \{x, y, u\}, \{x, y, z\}, \{x, u, z\}, \{y, u, z\}, \{x, y, u, z\}\}$$

Die Mächtigkeit einer Potenzmenge kann man mit Hilfe einer einfachen Formel berechnen:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

$|P(A)|$ – Mächtigkeit der Potenzmenge von A

$|A|$ – Mächtigkeit der Menge A

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Mächtigkeit folgender Potenzmengen:

$A = \{3\}, \quad B = \{6, 9\}, \quad C = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad D = \{a, b, x, y\}$

Aufgabe 3:

Welche Mengen sind gleichmächtig?

$A = \{m, n, p, r\}, \quad B = \{3, 6, 9\}, \quad C = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$

$D = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5\}, \quad F = \{a, b, c\}, \quad G = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$

Lösung 2:

$A = \{ 3 \}, \quad | A | = 1, \quad | P(A) | = 2^{|A|} = 2^1 = 2$

$B = \{ 6, 9 \}, \quad | B | = 2, \quad | P(B) | = 2^{|B|} = 2^2 = 4$

$C = \{ \alpha, \beta, \gamma \}, \quad | C | = 3, \quad | P(C) | = 2^{|C|} = 2^3 = 8$

$D = \{ a, b, x, y \}, \quad | D | = 4, \quad | P(D) | = 2^{|D|} = 2^4 = 16$

Lösung 3:

$A = \{ m, n, p, r \}, \quad | A | = 4, \quad B = \{ 3, 6, 9 \}, \quad | B | = 3$

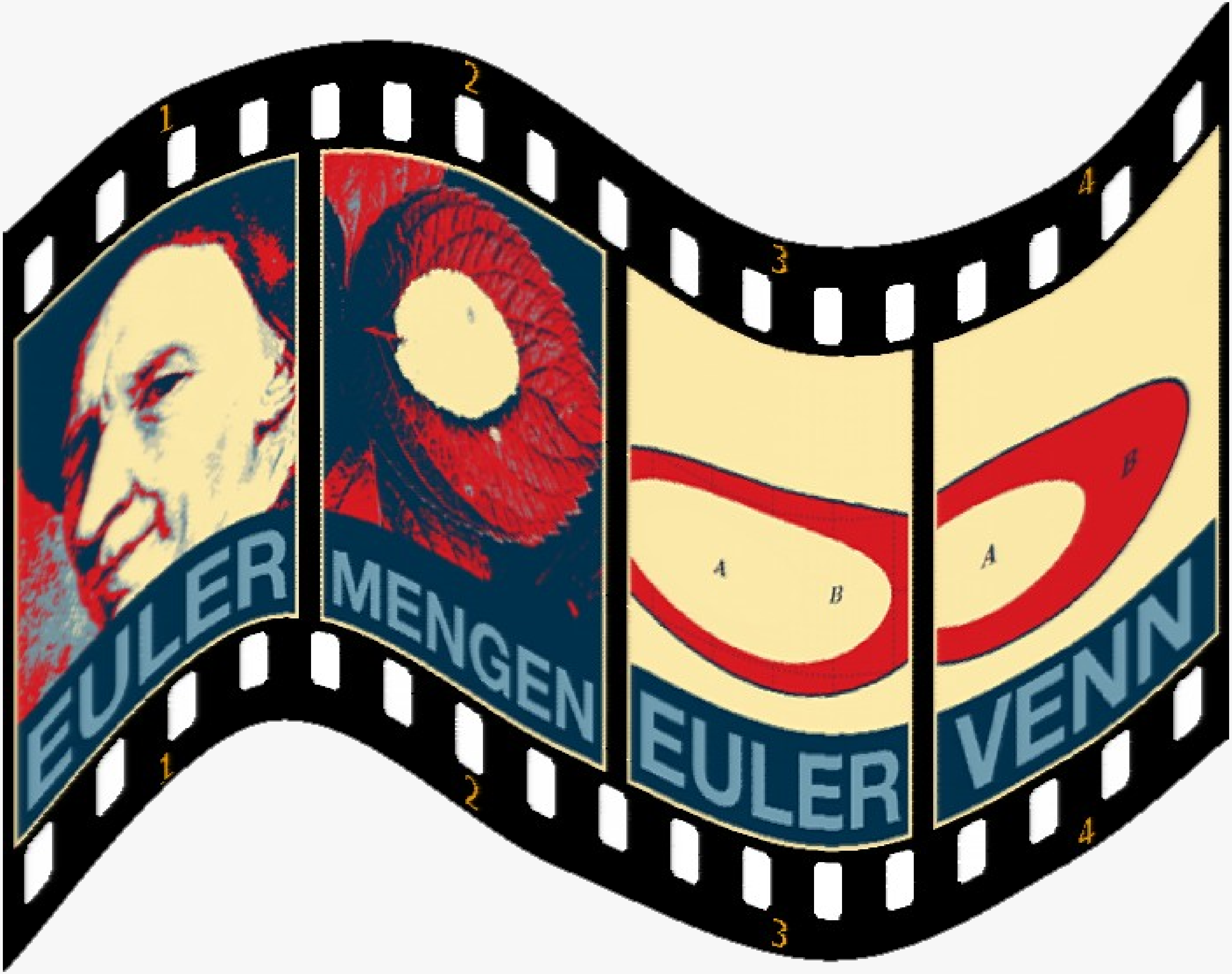
$C = \{ 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \}, \quad | C | = 4, \quad D = \{ x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}, \quad | D | = 5$

$F = \{ a, b, c \}, \quad | F | = 3, \quad G = \{ \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6} \}, \quad | G | = 5$

$| A | = | C |, \quad | B | = | F |, \quad | D | = | G |$

Die Mengen A und C, B und F, D und G sind gleichmächtig.


MENGEN


EULER
MENGEN
EULER
VENN
A
B
A
B