

Relation

Kartesisches Produkt: Aufgabe 1

Stellen Sie eine graphische Veranschaulichung des kartesischen Produktes der Mengen X und Y dar

$$a) \quad X = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \quad Y = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

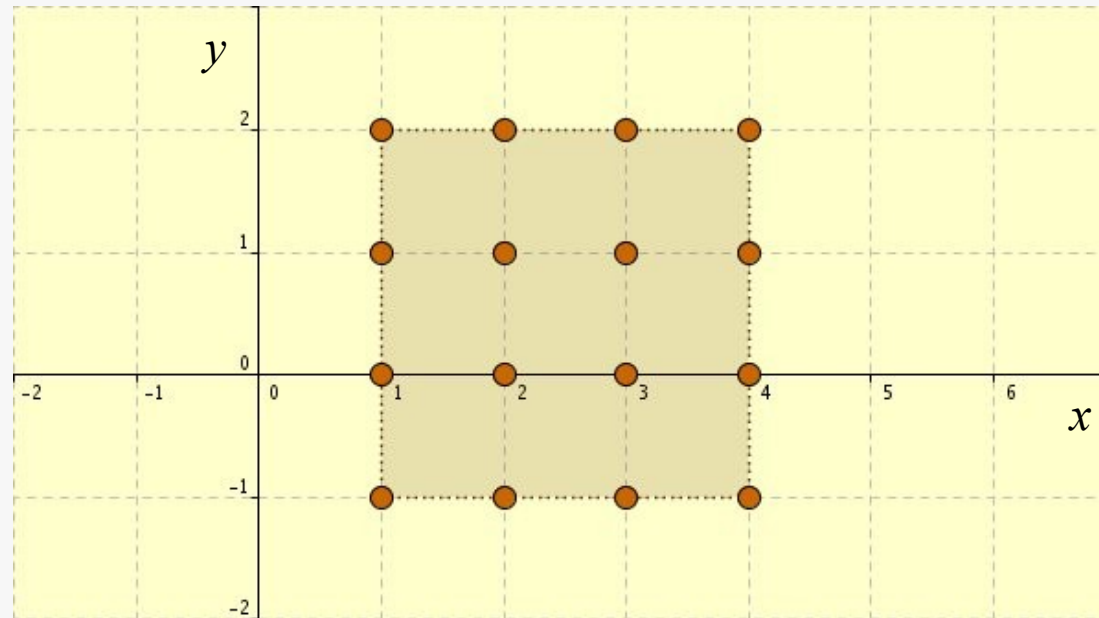
und bestimmen Sie die Elemente der Produktmenge $X \times Y$, die folgende Bedingungen erfüllen

$$b) \quad M_1 = \{ (x, y) \mid x \in X, \quad y \in Y, \quad y < x \}$$

$$c) \quad M_2 = \{ (x, y) \mid x \in X, \quad y \in Y, \quad y = x - 2 \}$$

$$d) \quad M_3 = \{ (x, y) \mid x \in X, \quad y \in Y, \quad |y| = x \}$$

Kartesisches Produkt: Lösung 1a

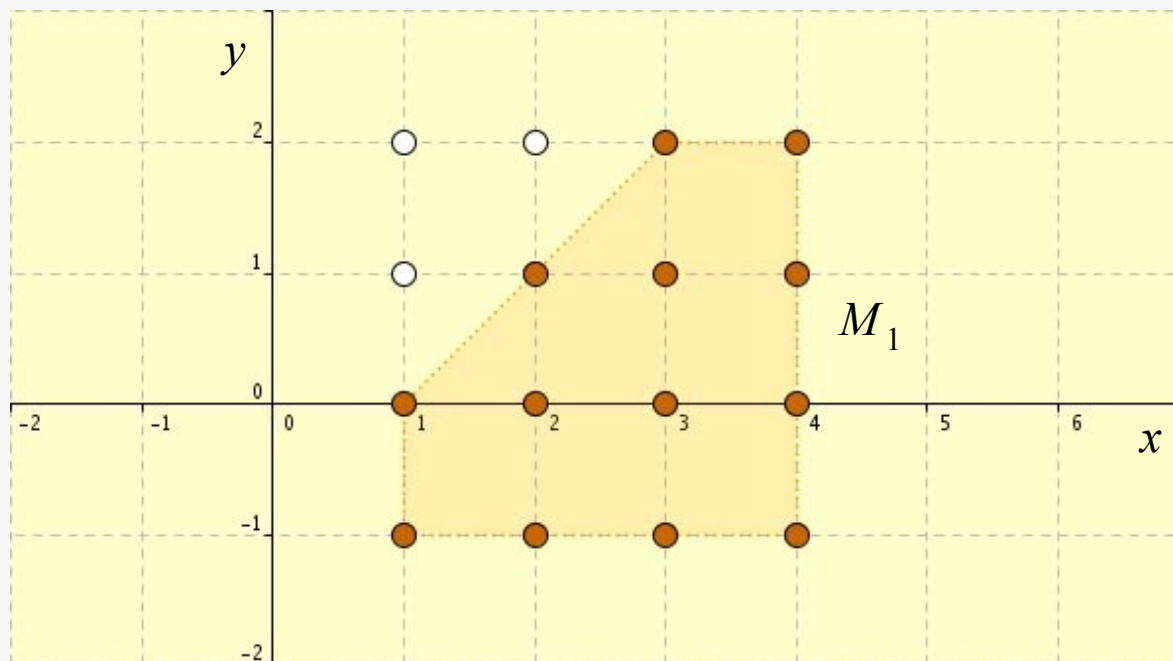


$$X \times Y$$

$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \quad Y = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

$$X \times Y = \{ (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), \\ (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2) \}$$

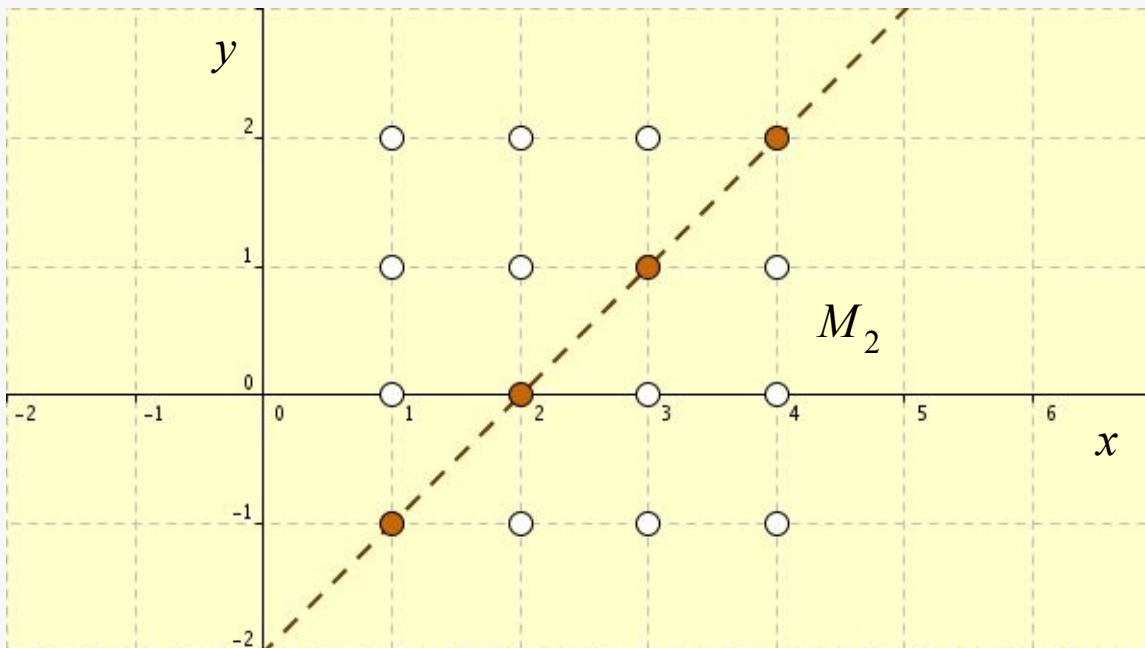
Kartesisches Produkt: Lösung 1



$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \quad Y = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

$$M_1 = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y, y < x \}$$

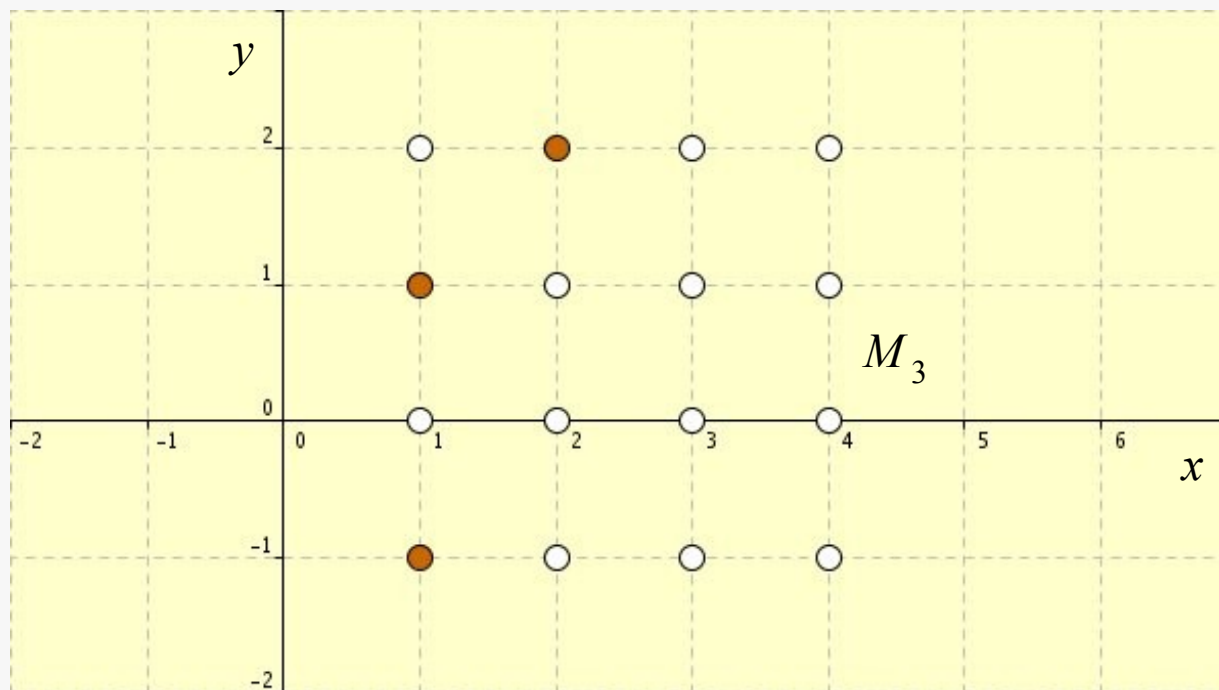
$$M_1 = \{ (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), \\ (4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2) \}$$



$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \quad Y = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

$$M_2 = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y, y = x - 2 \}$$

$$M_2 = \{ (1, -1), (2, 0), (3, 1), (4, 2) \}$$



$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}, \quad Y = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

$$M_3 = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y, |y| = x \}$$

$$M_2 = \{ (1, -1), (1, 1), (2, 2) \}$$

Definition:

X und Y seien zwei Mengen. Eine Teilmenge R des kartesischen Produktes von X und Y heißt eine Relation zwischen den Elementen der Menge X und den Elementen der Menge Y . Ist $X = Y$, so heißt R Relation auf X .

Eine Relation ist eine Vorschrift (Bedingung), welche eine Teilmenge von X und Y beschreibt. Diese kann man festlegen, indem man eine mathematische Bedingung vorschreibt, die zwischen den Elementen aus den beiden Mengen gilt.

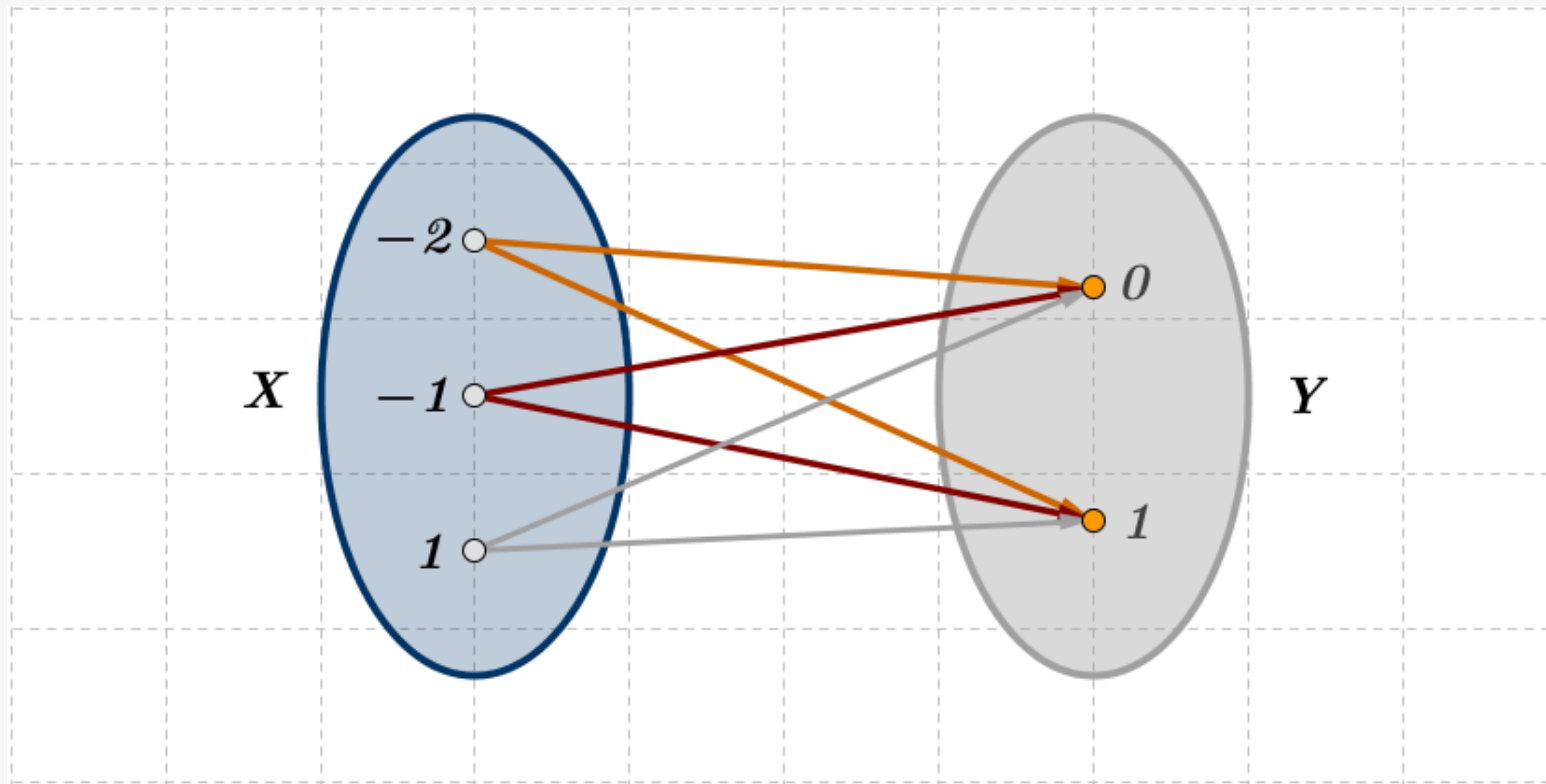


Abb. A2: Graphische Darstellung des Kartesischen Produktes $A \times B$

$$X = \{-2, -1, 1\}, \quad Y = \{0, 1\}$$

Das kartesische Produkt der Mengen A und B besteht aus 6 Elementen, 6 geordneten Paaren.

$$X \times Y = \{(-2, 0), (-2, 1), (-1, 0), (-1, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Bestimmen Sie folgende Relationen zwischen den Elementen der Menge X und den Elementen der Menge Y :

$$X = \{-2, -1, 1\}, \quad Y = \{0, 1\}$$

$$R_1 = \{(-2, 0), (-2, 1), (-1, 0), (-1, 1)\} \subset X \times Y$$

$$R_2 = \{(1, 0), (1, 1)\} \subset X \times Y$$

$$R_3 = \{(1, 1)\} \subset X \times Y$$

$$R_4 = \{(-2, 0), (-1, 1)\} \subset X \times Y$$

$$R_5 = \{(-1, 1), (1, 1)\} \subset X \times Y$$

$$R_6 = \{(-2, 1)\} \subset X \times Y$$

$$X = \{-2, -1, 1\}, \quad x \in X, \quad Y = \{0, 1\}, \quad y \in Y$$

$$R_1 = \{(-2, 0), (-2, 1), (-1, 0), (-1, 1)\}, \quad R_1 : x < y$$

$$R_2 = \{(1, 0), (1, 1)\}, \quad R_2 : x \geq y$$

$$R_3 = \{(1, 1)\}, \quad R_3 : x = y$$

$$R_4 = \{(-2, 0), (-1, 1)\}, \quad R_4 : x + 2 = y$$

$$R_5 = \{(-1, 1), (1, 1)\}, \quad R_5 : |x| = y, \quad x^2 = y$$

$$R_6 = \{(-2, 1)\}, \quad R_6 : x + 3 = y$$

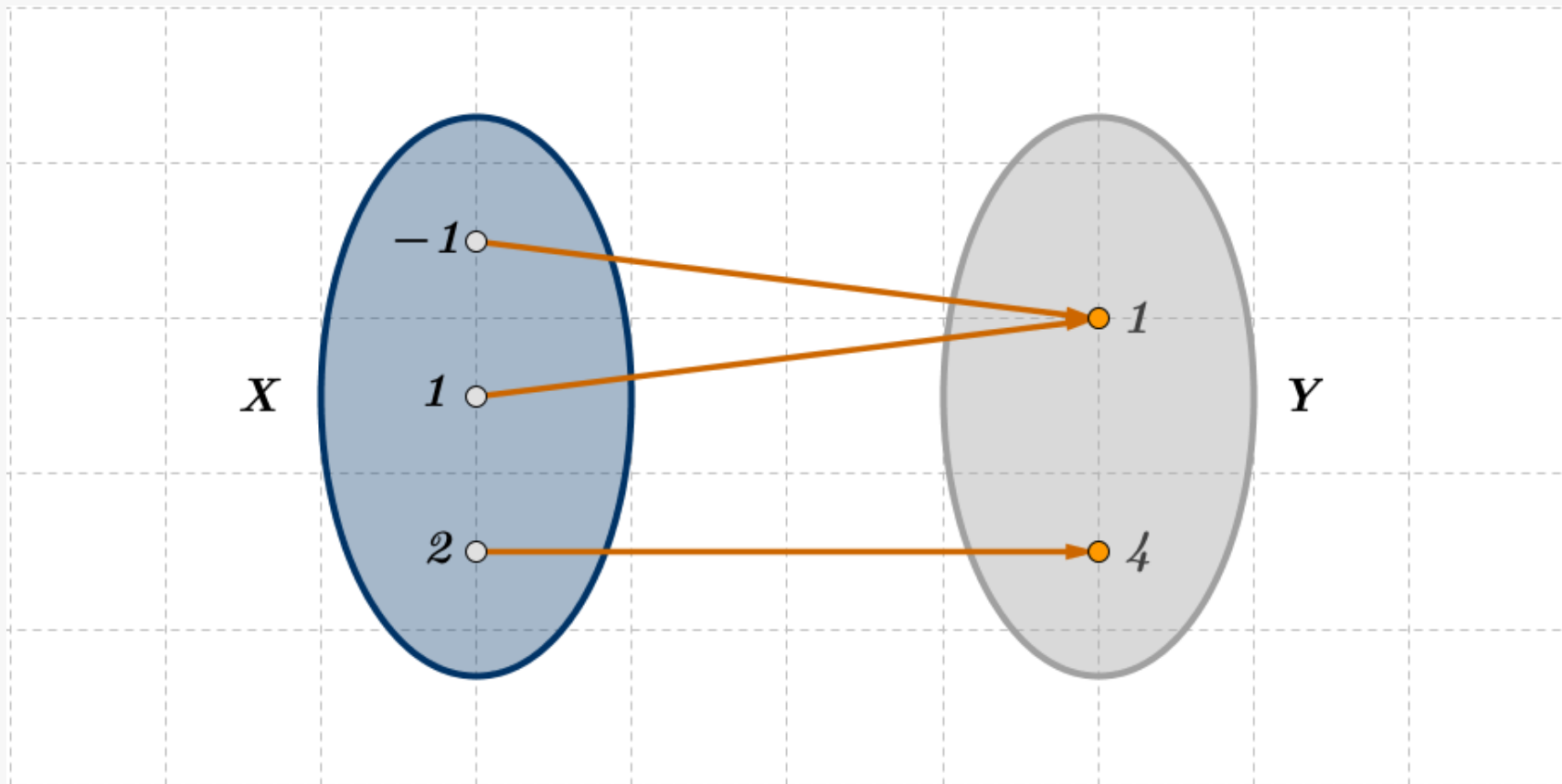


Abb. A3: Eine Relation auf den Menge X und Y

Beschreiben Sie die in der Abbildung dargestellte Relation zwischen den Mengen X und Y

$$X = \{-1, 1, 2\}, \quad Y = \{1, 4\}$$

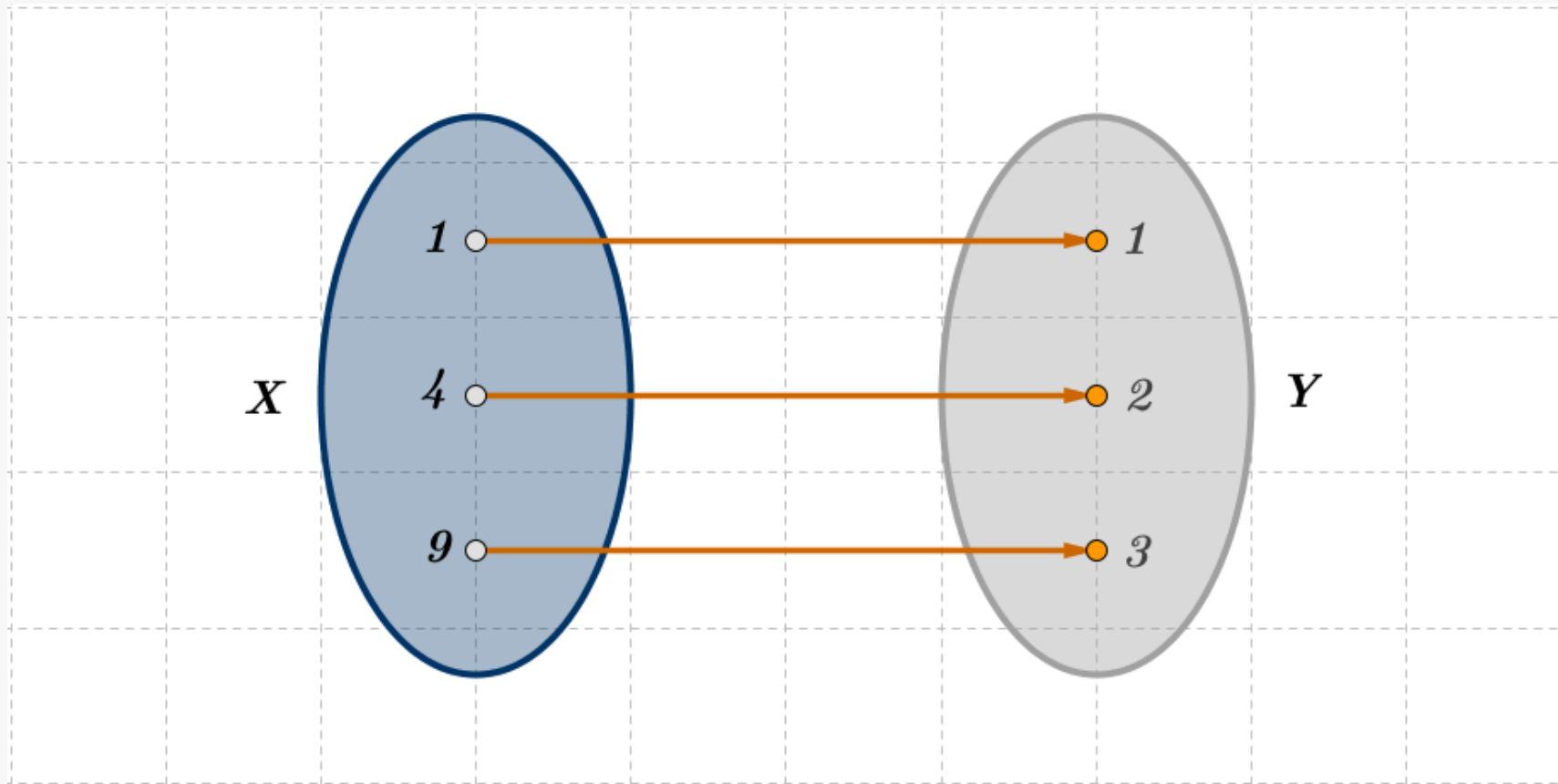


Abb. A4: Eine Relation auf den Menge X und Y

Beschreiben Sie die in der Abbildung dargestellte Relation zwischen den Mengen X und Y

$$X = \{1, 4, 9\}, \quad Y = \{1, 2, 3\}$$

Relation: Lösungen 3, 4

Lösung 3: $R = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 4)\}, \quad R : x^2 = y$

Lösung 4: $R = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3)\}, \quad R : \sqrt{x} = y$

Relation: Aufgabe 5

Zeichnen Sie die folgenden Relationen für Mengen X und Y

$$X = \mathbb{R}, \quad Y = \mathbb{R}$$

$$a) \quad y < x$$

$$b) \quad x \geq -1, \quad y \geq 1$$

$$c) \quad y \geq x^2$$

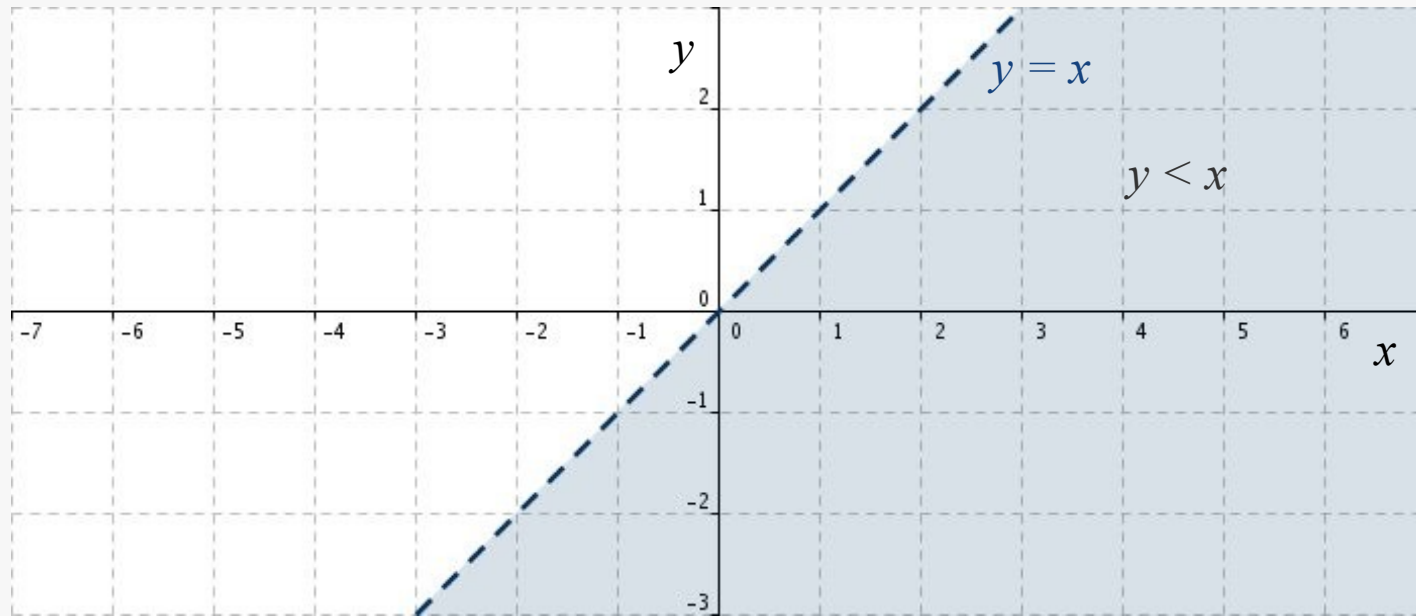
$$d) \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

$$e) \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$f) \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \leq 0$$

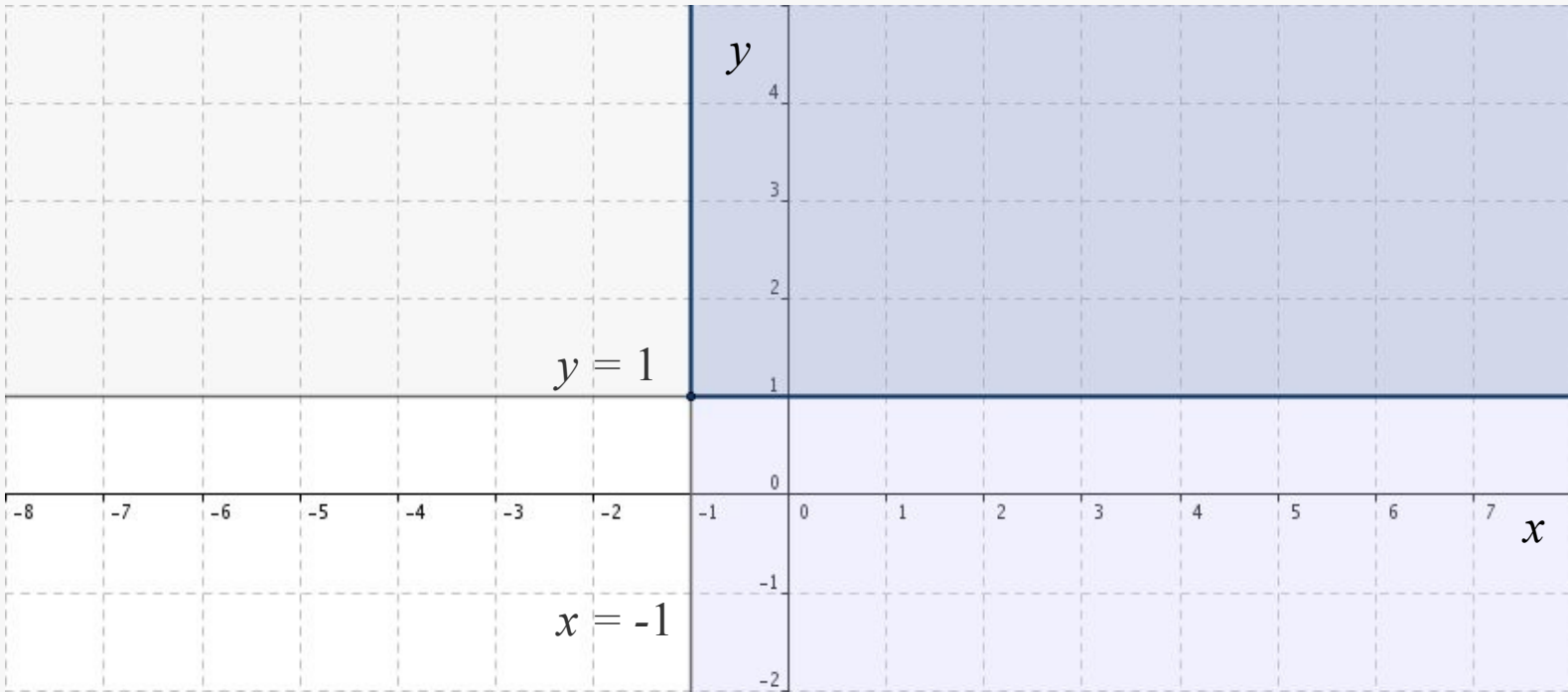
$$g) \quad y > |x|$$

Relation: Lösung 5a

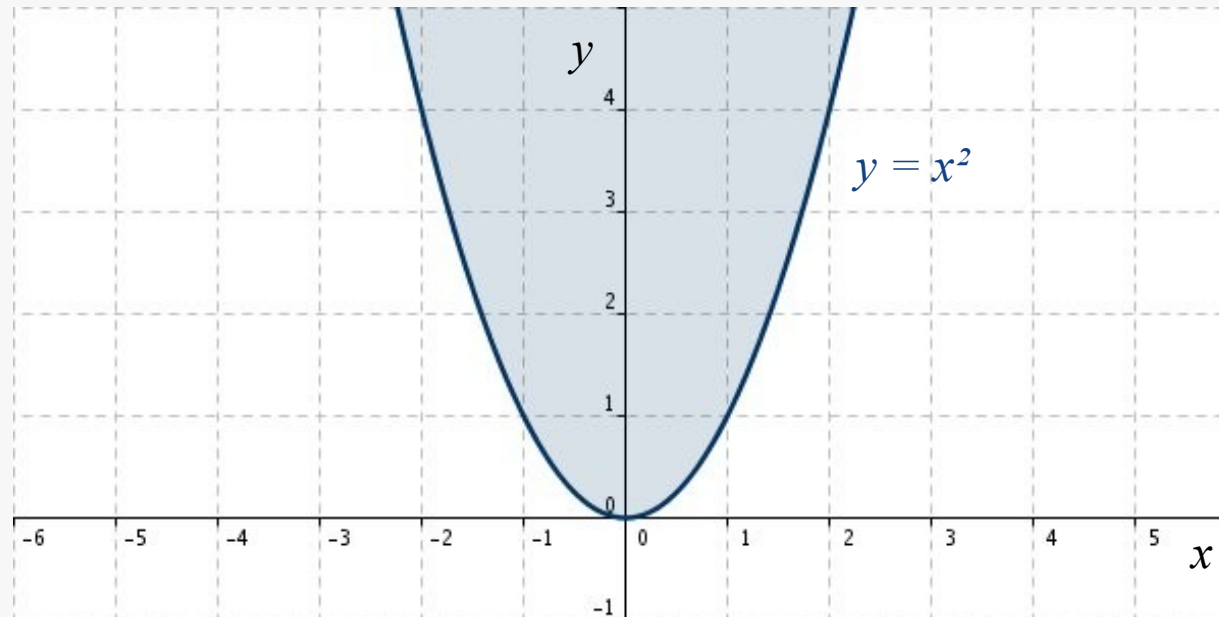


Die Gerade $y = x$ bildet die Trennlinie. Alle y -Werte unterhalb dieser Linie erfüllen die Relationsbedingung. Somit wird die Relation durch das Gebiet unterhalb der Gerade $y = x$ dargestellt.

Relation: Lösung 5b

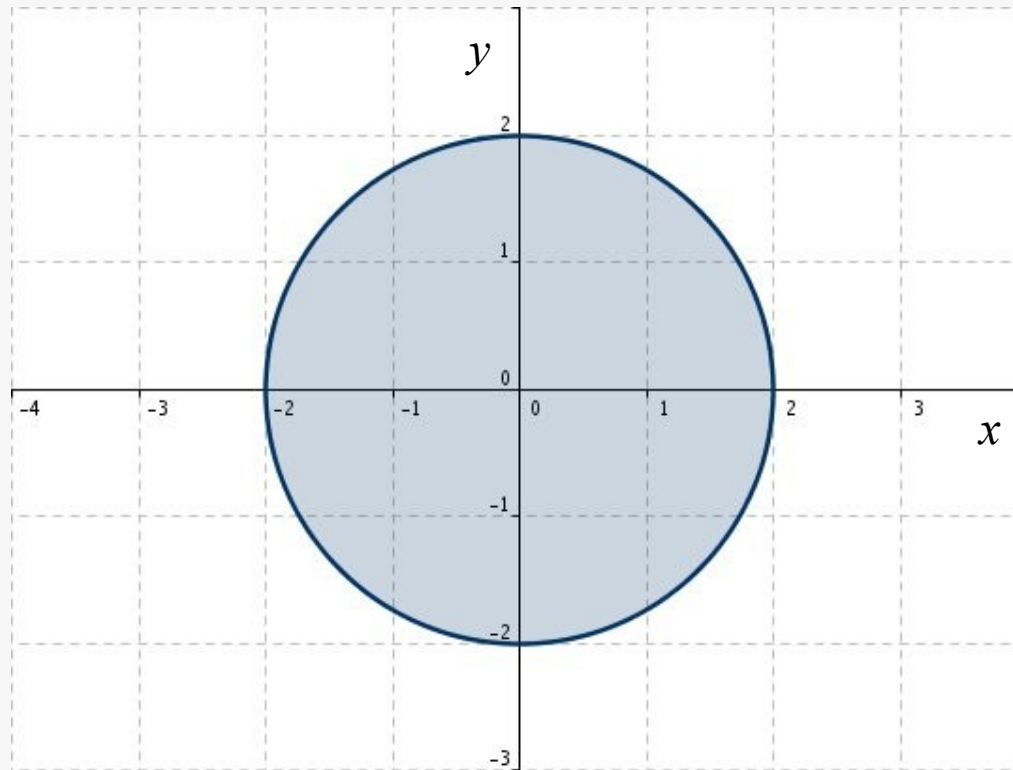


$$x \geq -1, \quad y \geq 1$$

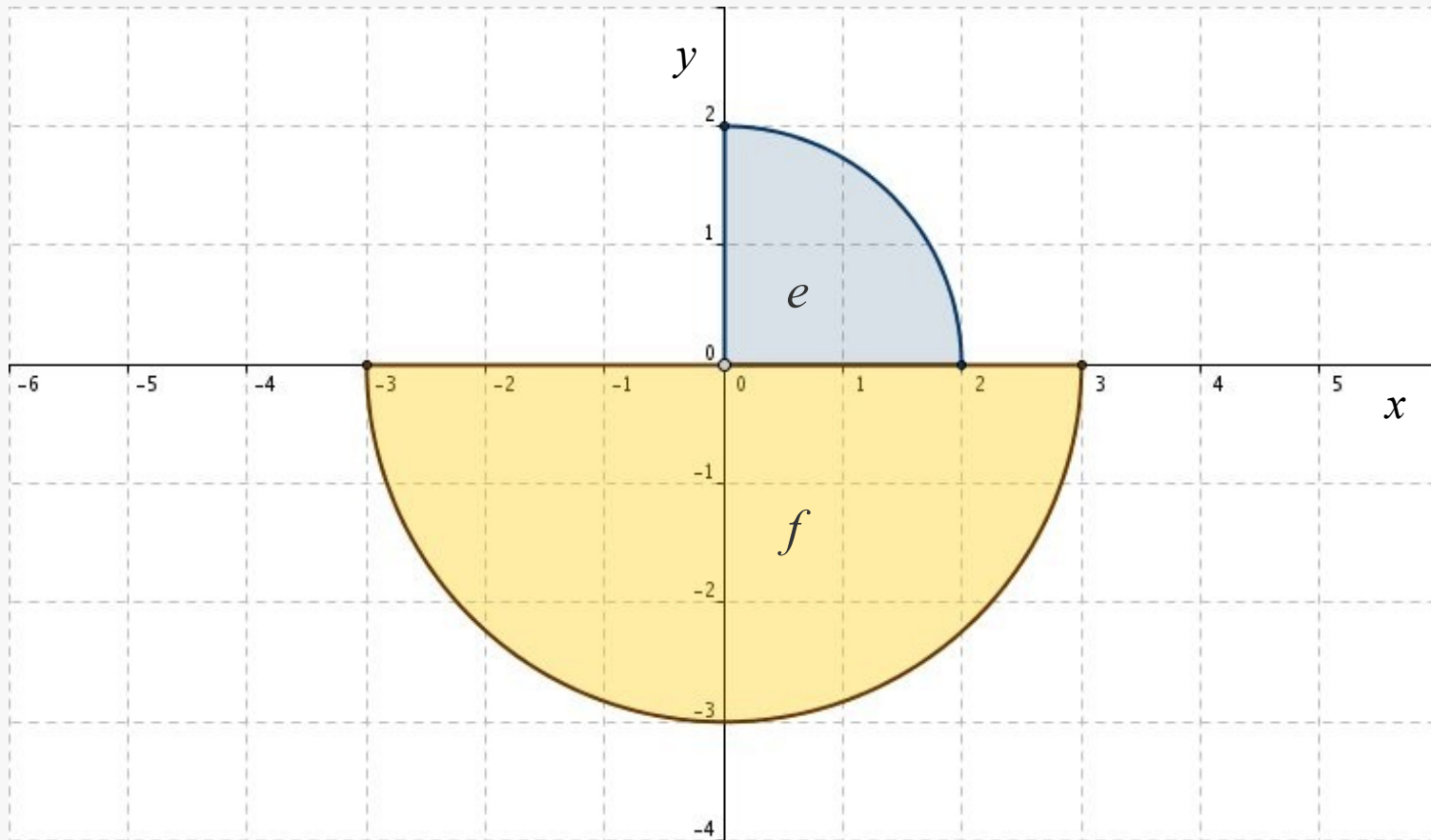


Alle y -Werte oberhalb und auf der Parabel erfüllen die Relationsbedingung $y \geq x^2$.

Relation: Lösung 5d

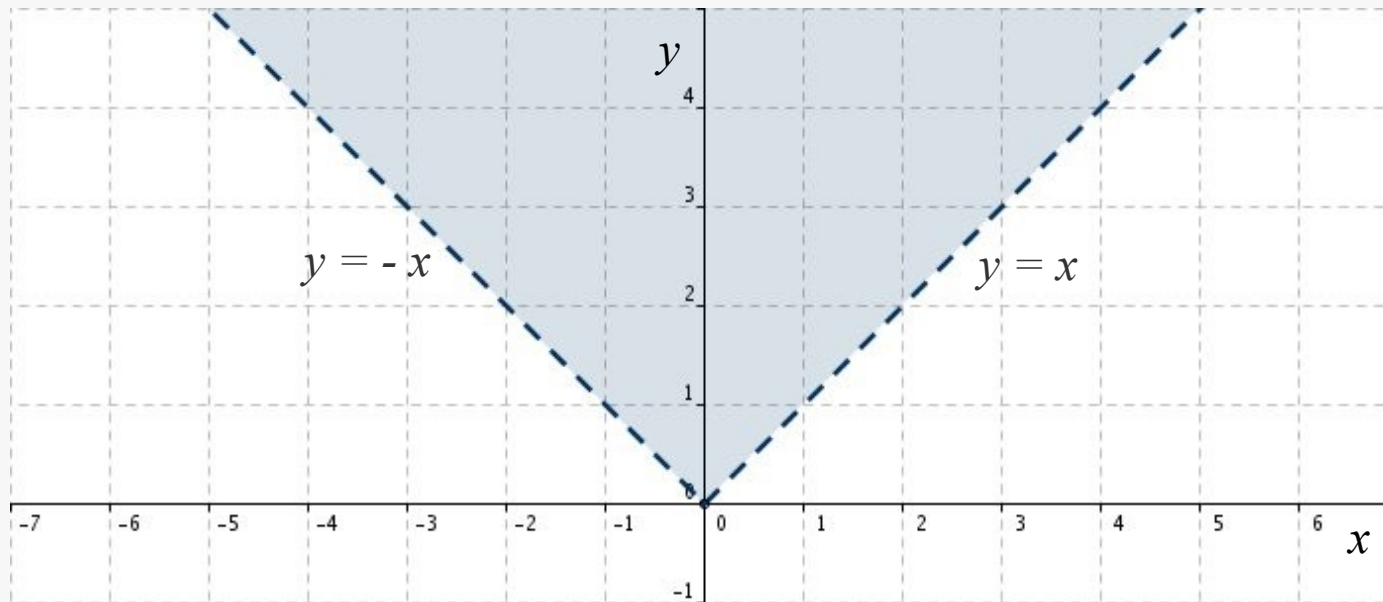


$$x^2 + y^2 \leq 4$$



$$e) \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$f) \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \leq 0$$



$$y > |x|$$