



Vektoralgebra: Grundbegriffe



- Skalar: Definition, Beispiele.
- Richtung. Vektoren als gerichtete Größen.
- Physikalische Vektorgrößen, Beispiele.

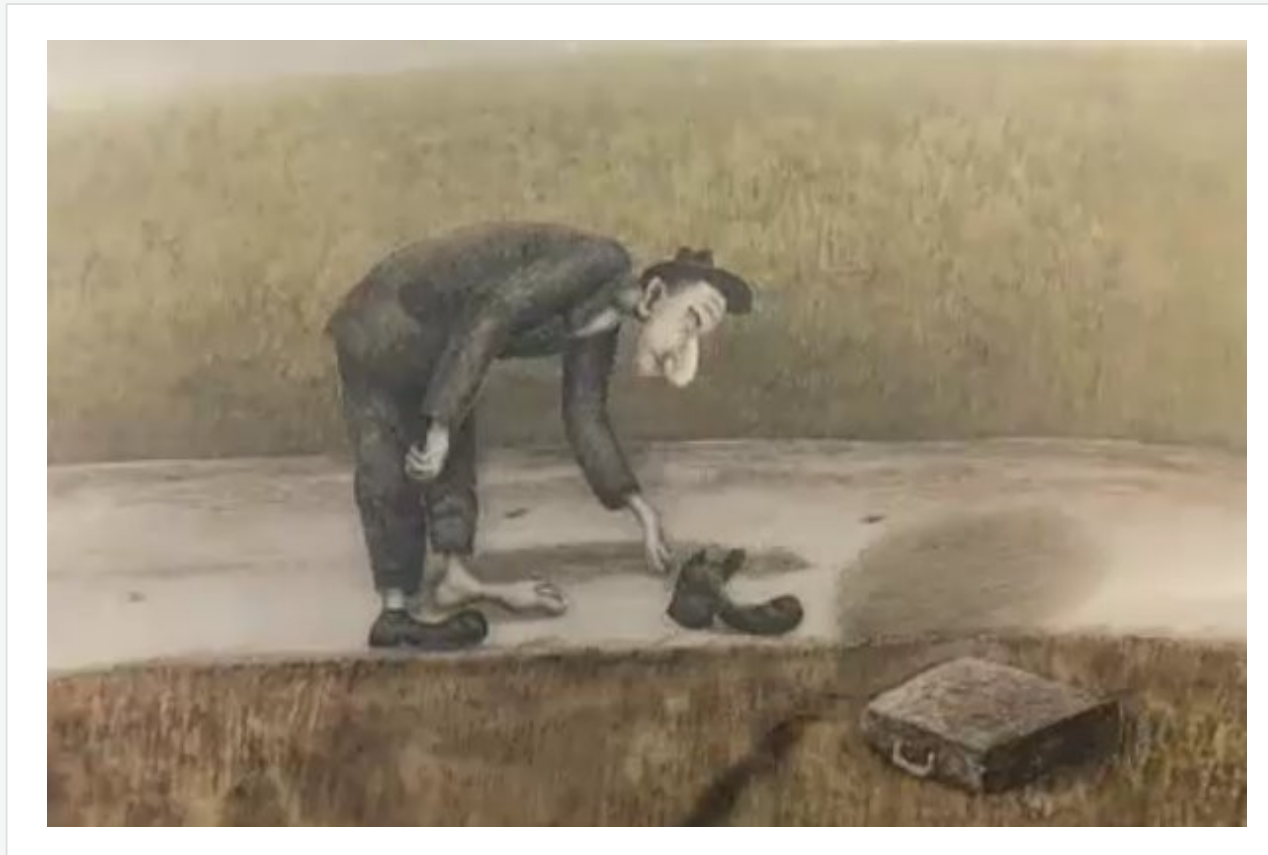
Ein Skalar ist eine mathematische Größe, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist.

Bekannte skalare Größen aus der Physik:

- Zeit
- Masse
- Temperatur
- Dichte

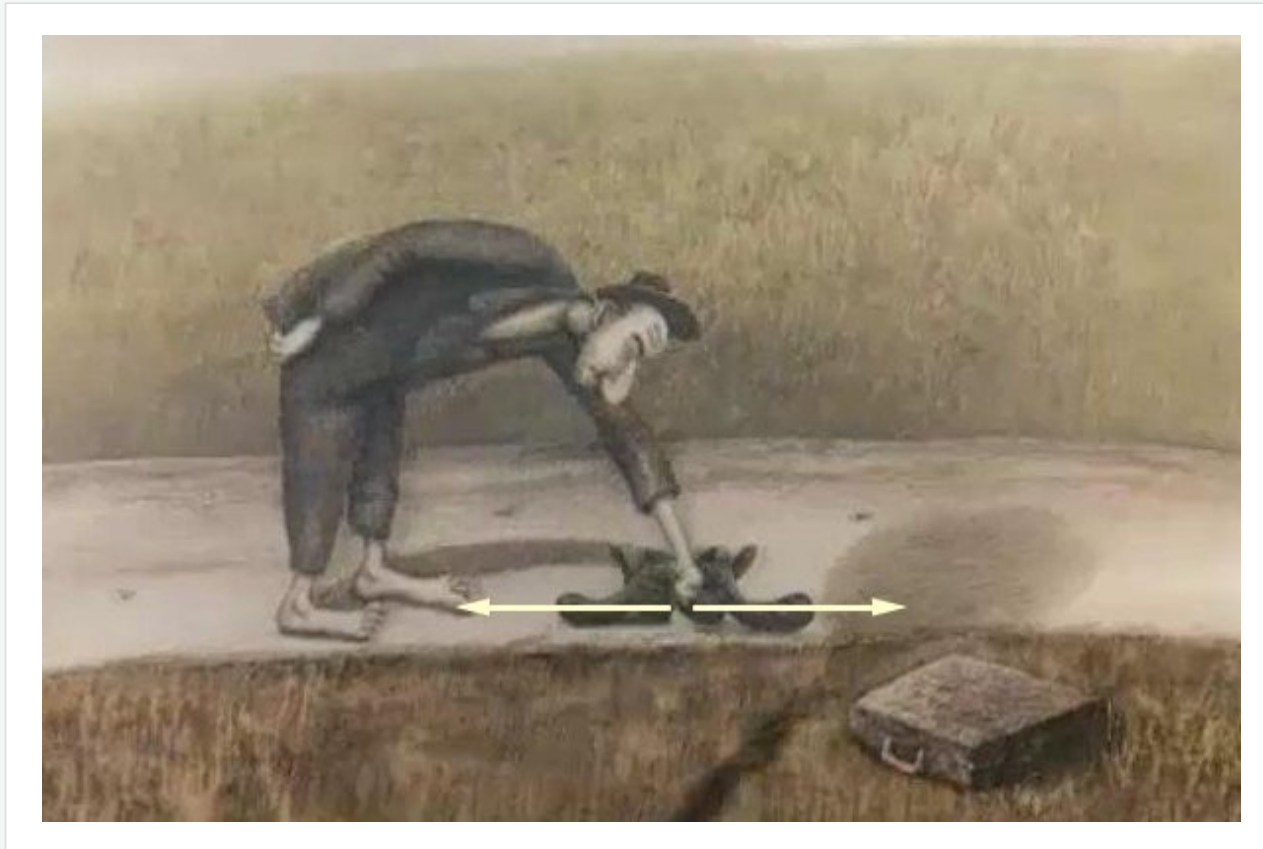
Richtung





<http://www.youtube.com/watch?v=T4DnUyuVRqg&feature=related>

Nach dem Schreiben wurde ich sehr müde und beschloß ein kleines Schläfchen zu machen. Aber um nicht zu vergessen, wohin ich ging, zog ich meine Stiefel aus und stellte sie an den Wegrand,



... Wegrund, einen in die Richtung, in die ich ging und einen in die Richtung, aus der ich kam.

Darstellung und Definition eines Vektors



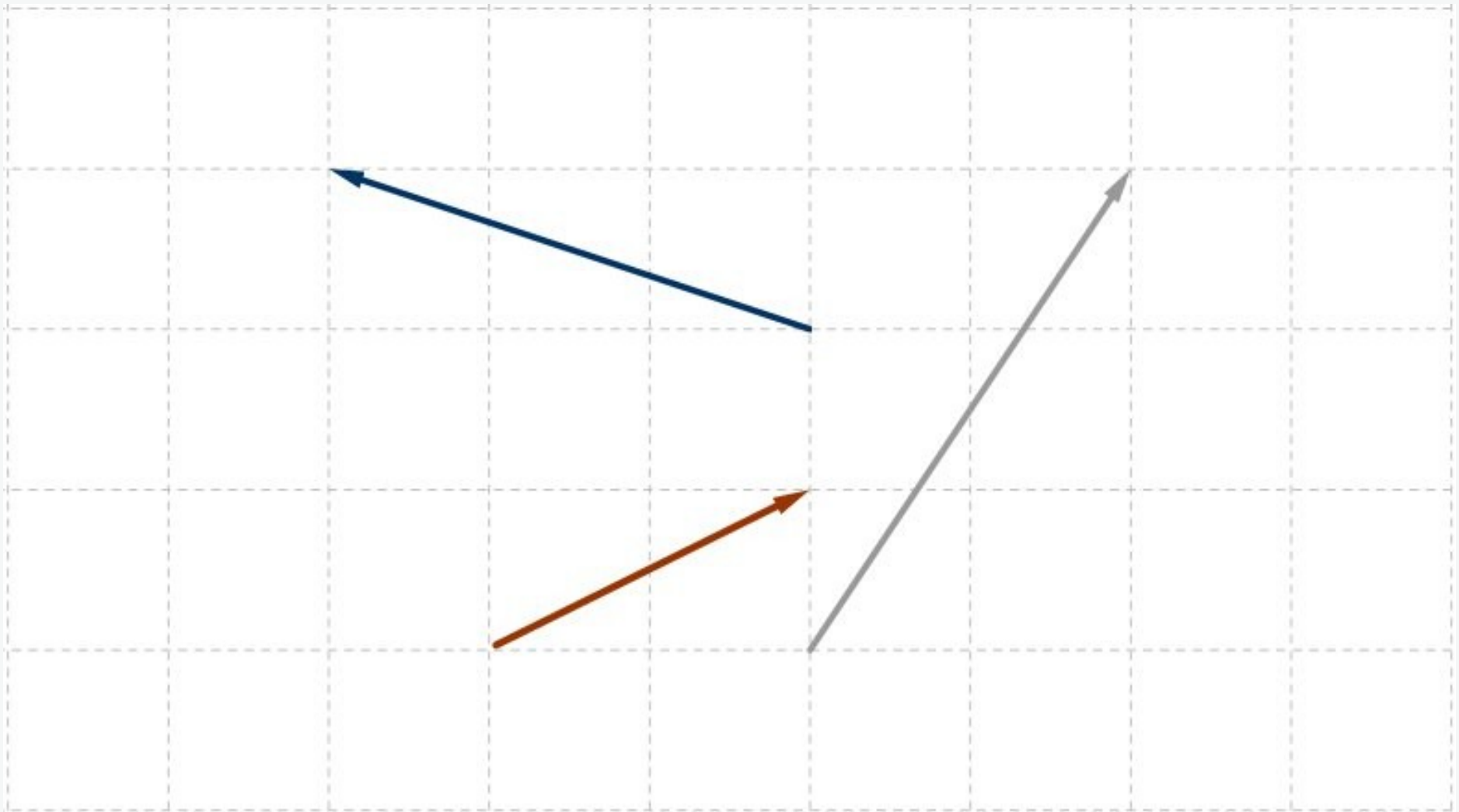


Abb. 2-1: Zum Vektorbegriff

Definition 1: Vektoren sind gerichtete Größen.

Beispiel 1: Die Schwerkraft

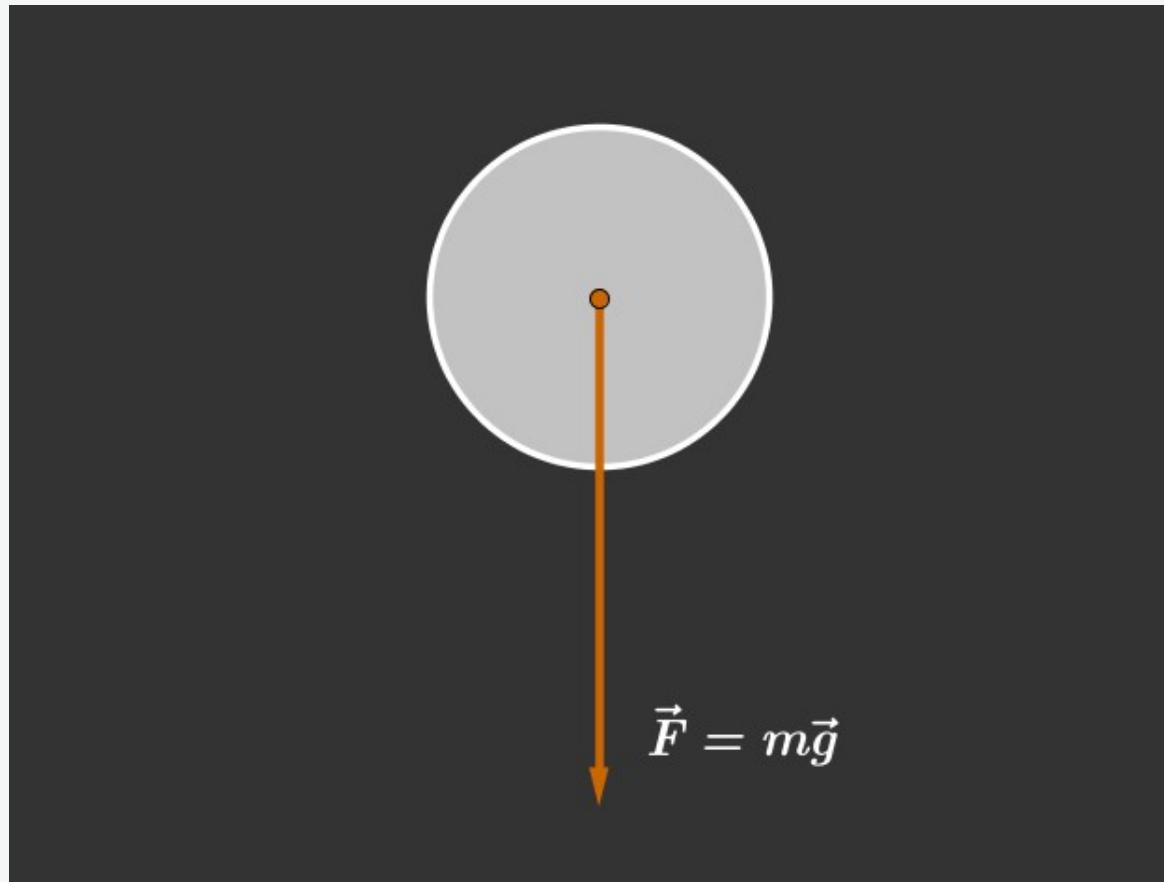


Abb. 2-2: Die Schwerkraft

Die Schwerkraft, die auf einen festen Körper wirkt, ist ein Vektor. Sie wird durch ihren Betrag und ihre Richtung bestimmt

$$|\vec{F}| = m g$$

m ist die Masse des Körpers und g ist die Schwerkraftbeschleunigung.

Beispiel 2: Die Coulombkraft

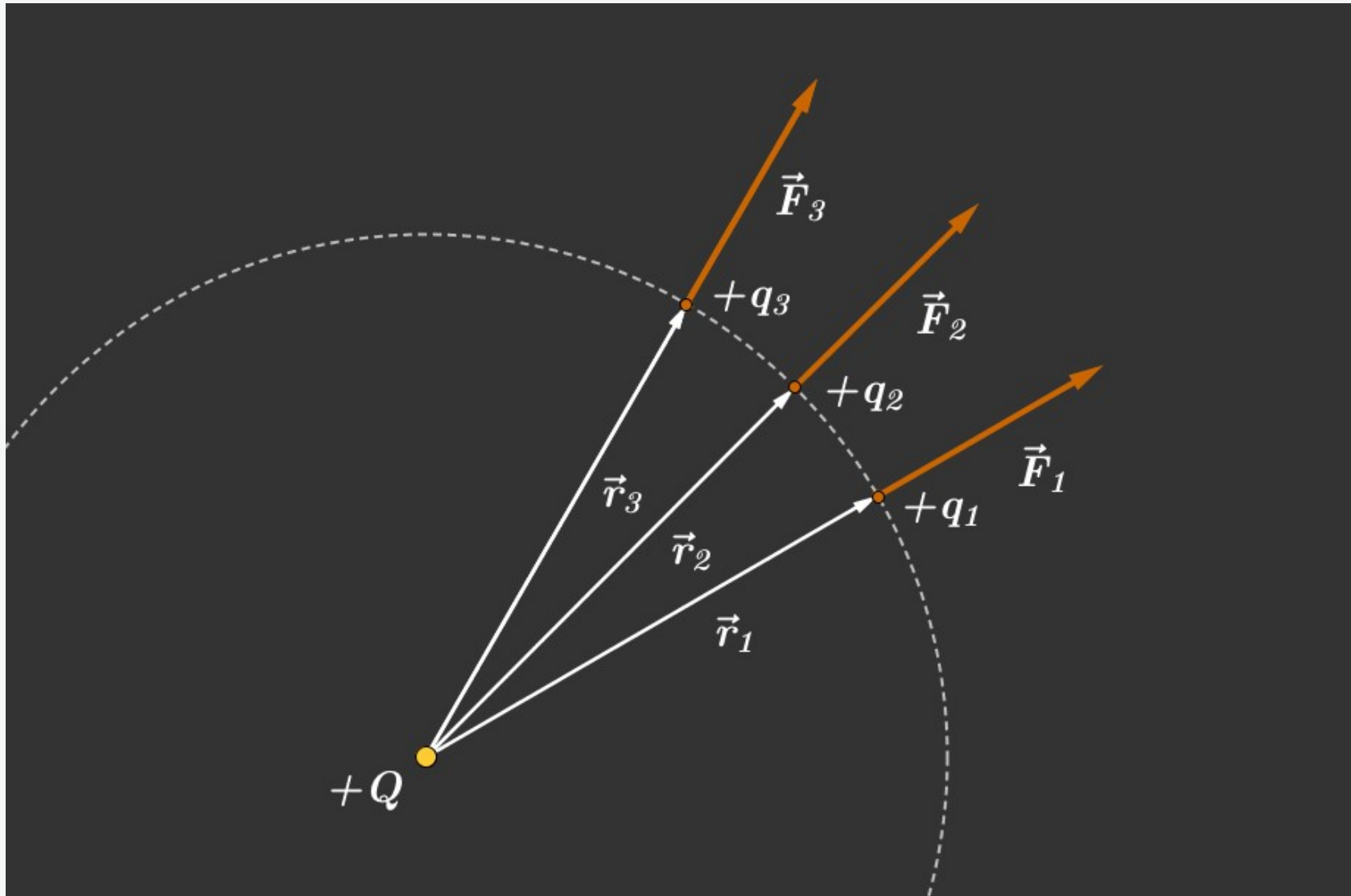


Abb. 2-3: Die Coulombkraft. Eine positive Punktladung $+Q$ induziert ein elektrisches Feld, das auf eine andere Probeladung wirkt. Die Abbildung zeigt 3 positive Probeladungen, die gleiche Entfernung von der Ladung $+Q$ haben. Die Coulombkräfte, die auf die Probeladungen wirken, haben gleiche Größe, aber unterschiedliche Richtungen.

Beispiel 2: Die Coulombkraft

Die Größe der Coulombkraft F nimmt mit zunehmendem Abstand ab:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq_i}{r_i^2} \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}_i}{r_i}, \quad \vec{F} = \vec{F}(r, q_i)$$

ϵ_0 – ist die elektrische Feldkonstante.

q_i – ist die Größe einer Punktladung

Beispiel 3: Vektoren

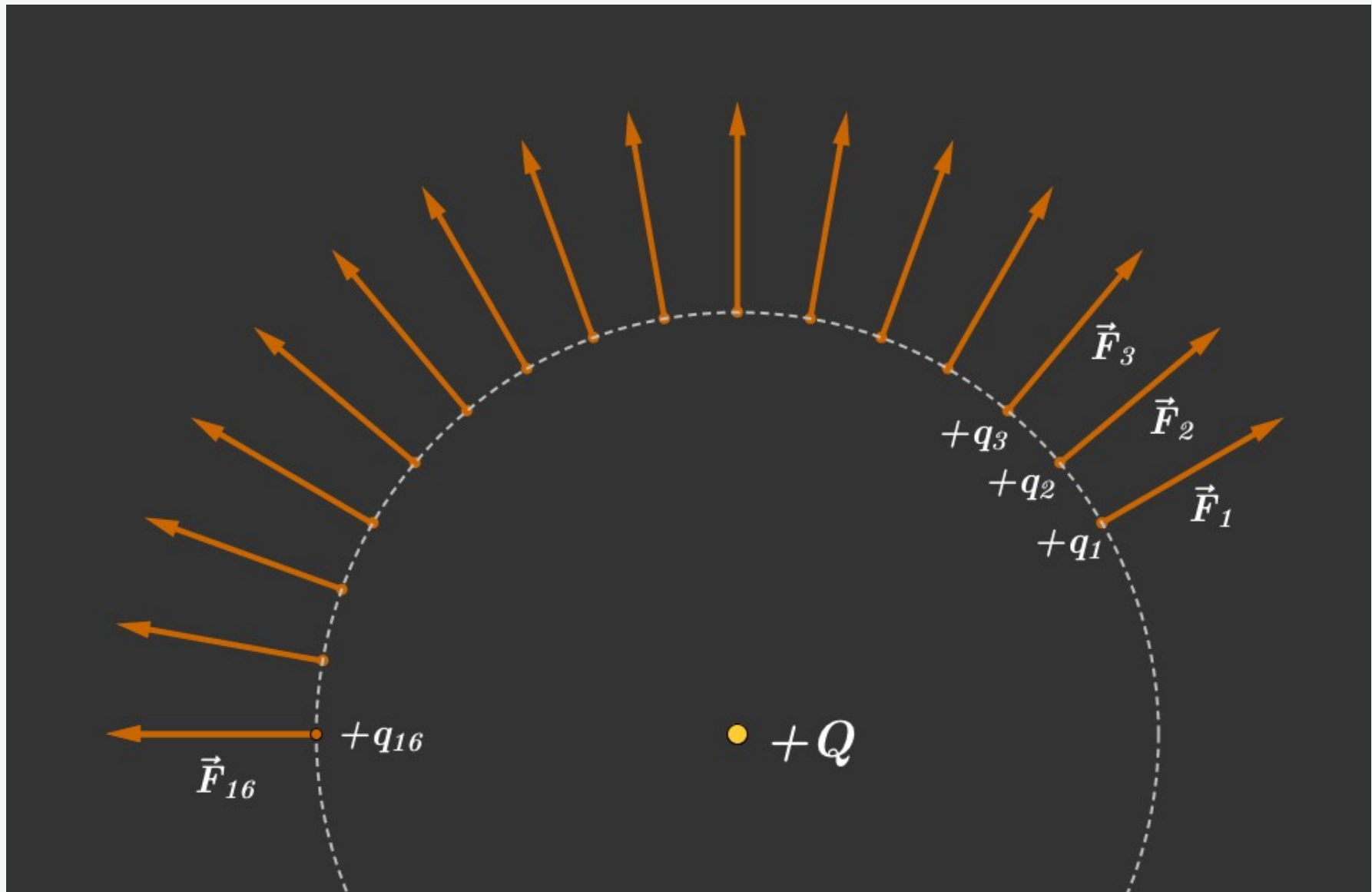


Abb. 2-3: Die Kraftwirkung auf 16 positive Ladungen, die die gleiche Entfernung von der Ladung $+Q$ haben

Bei einer physikalischen Vektorgröße gehört zur vollständigen Beschreibung noch die Angabe der Maßeinheit.

Beispiel: Betrag einer Kraft \vec{F} : $|\vec{F}| = F = 20 \text{ N}$

Darstellung und Definition eines Vektors



Vektoren: Definition 1

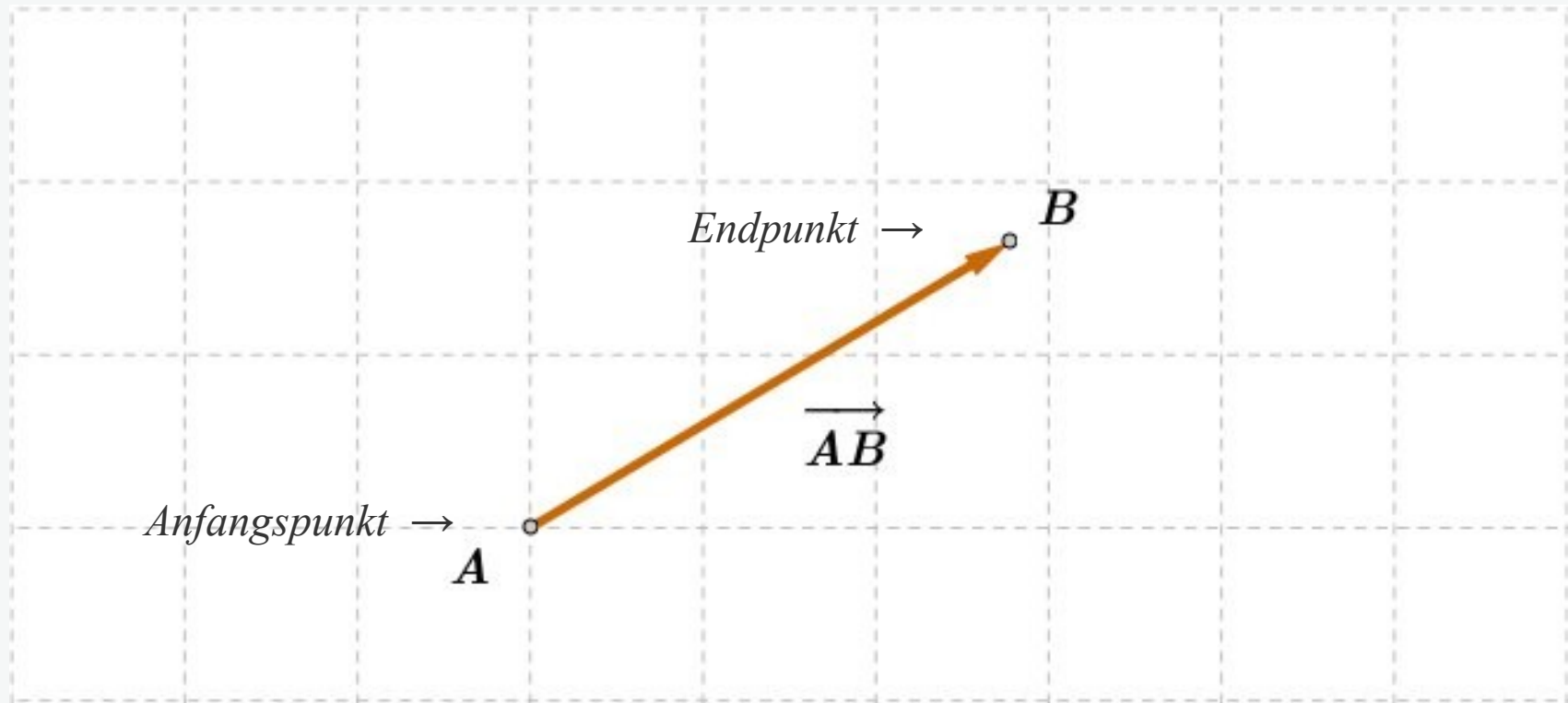


Abb. 2-2: Zum Vektorbegriff. Der Vektor \overrightarrow{AB} hat einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B

Definition 1: Vektoren sind durch ihren Anfangs- und Endpunkt eindeutig bestimmt.

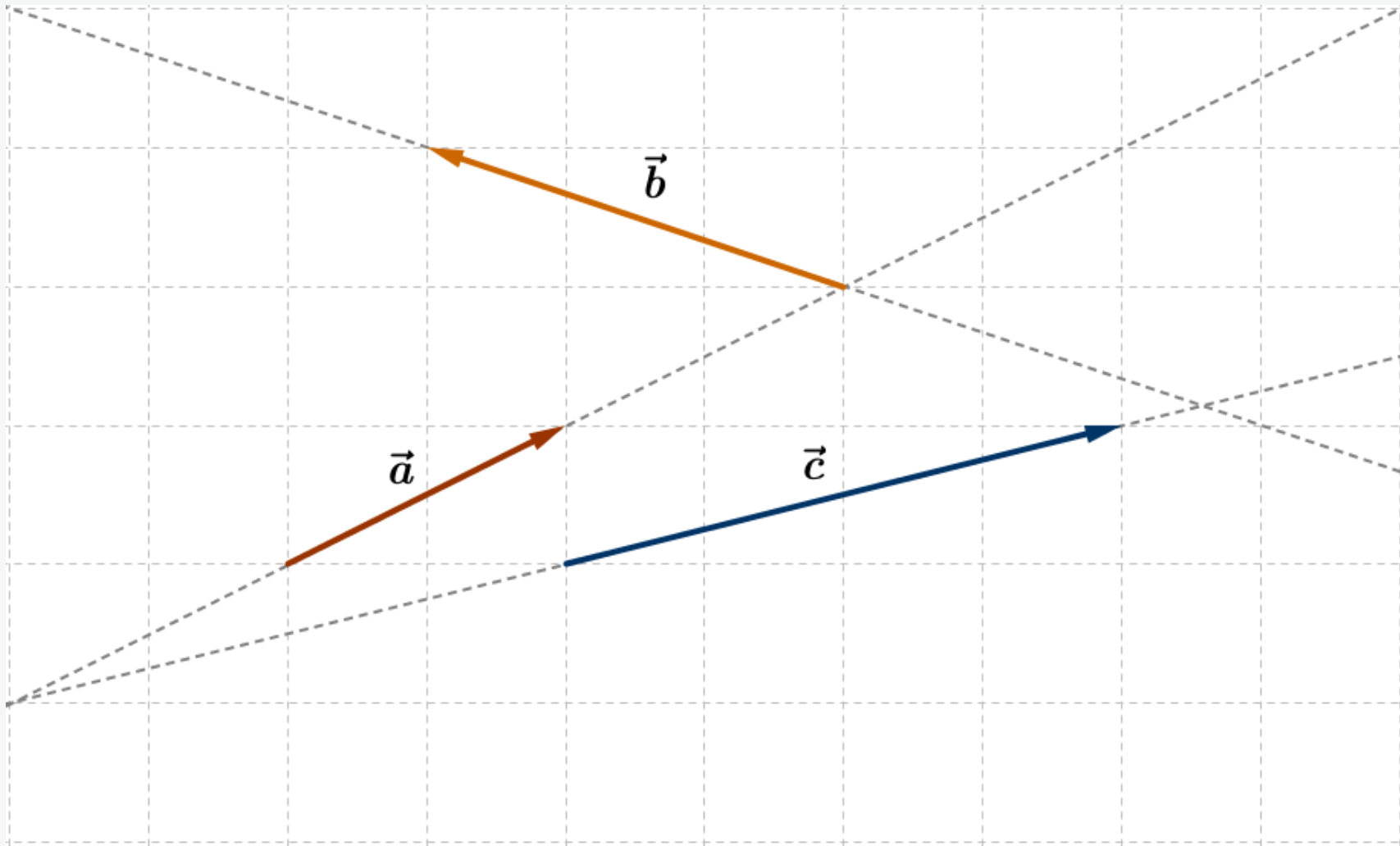


Abb. 2-3: Zum Begriff eines Vektors

Definition 2: Ein Vektor ist durch Richtung und Betrag (Länge) eindeutig bestimmt. Der **Betrag** (die Länge) eines Vektors ist stets positiv.

$$\vec{a}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{5}, \quad \vec{b}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}, \quad \vec{c}, \quad |\vec{c}| = \sqrt{17}$$

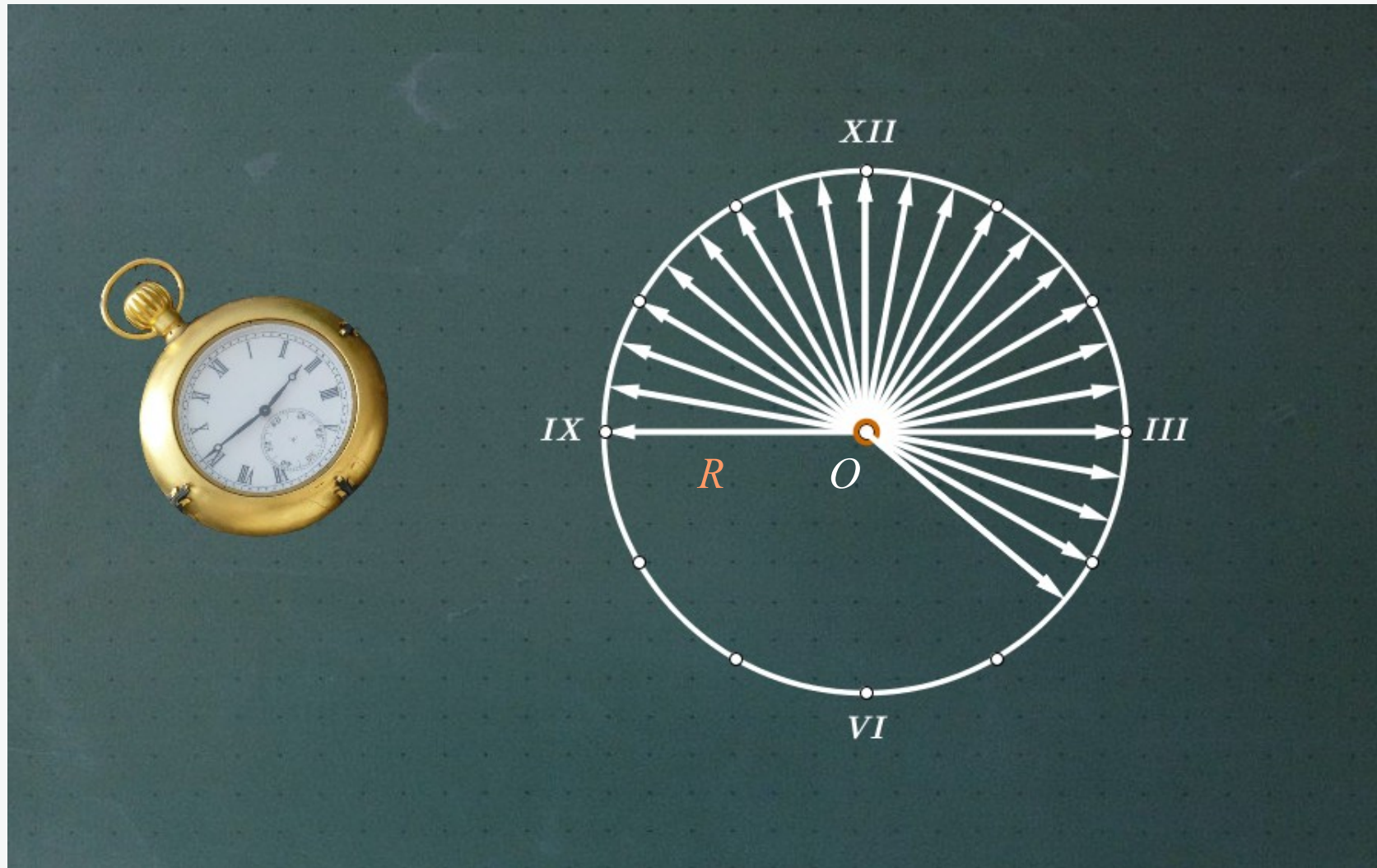


Abb. 2-4: Die Vektoren in dieser Darstellung haben verschiedene Richtungen und gleiche Länge. Der Anfangspunkt aller Vektoren ist der Punkt O , der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius R . Die Endpunkte sind unterschiedlich und liegen auf dem Kreis

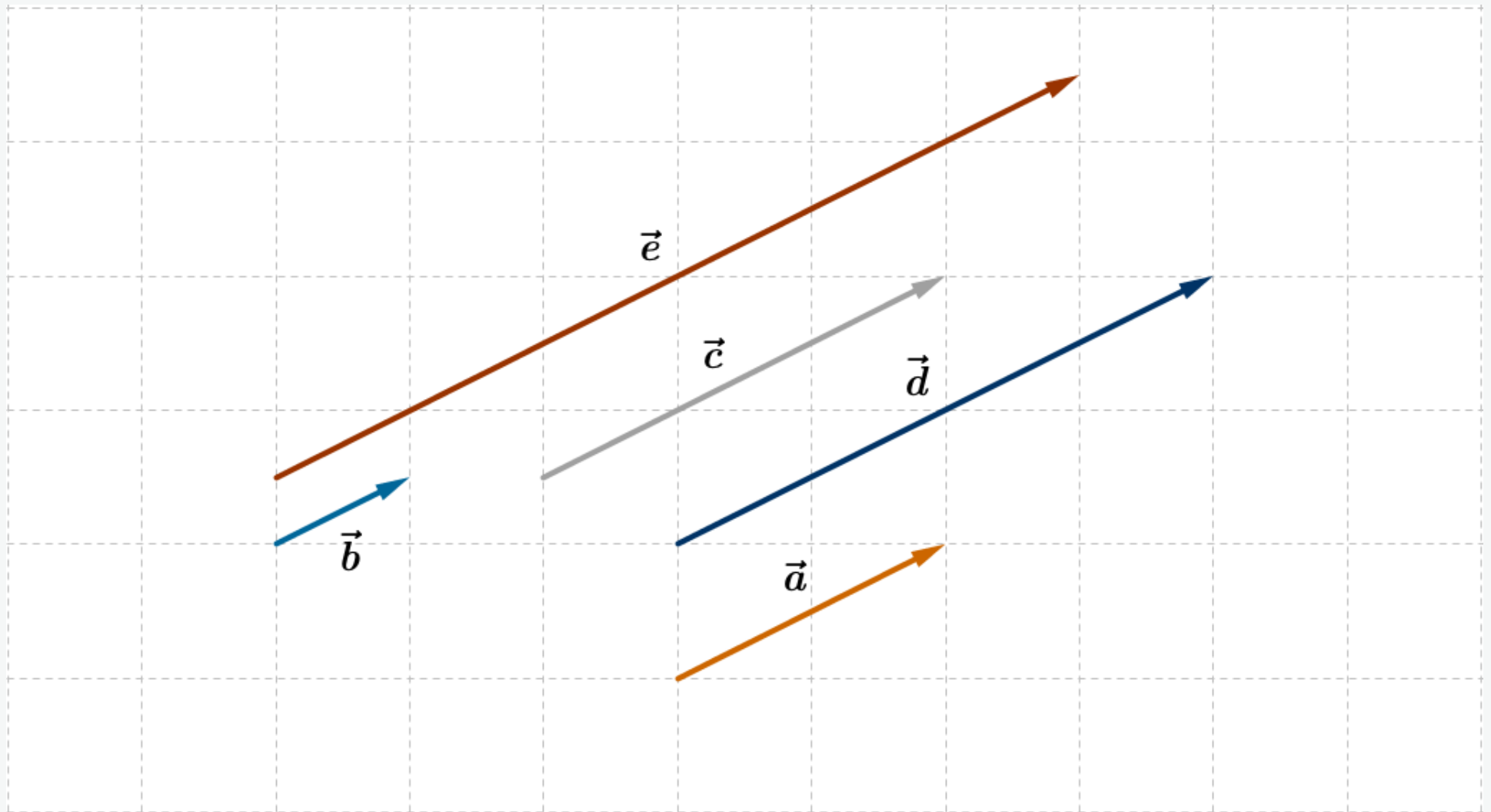


Abb. 2-5: Die Vektoren dieser Abbildung haben gleiche Richtung und verschiedene Längen (Beträge)

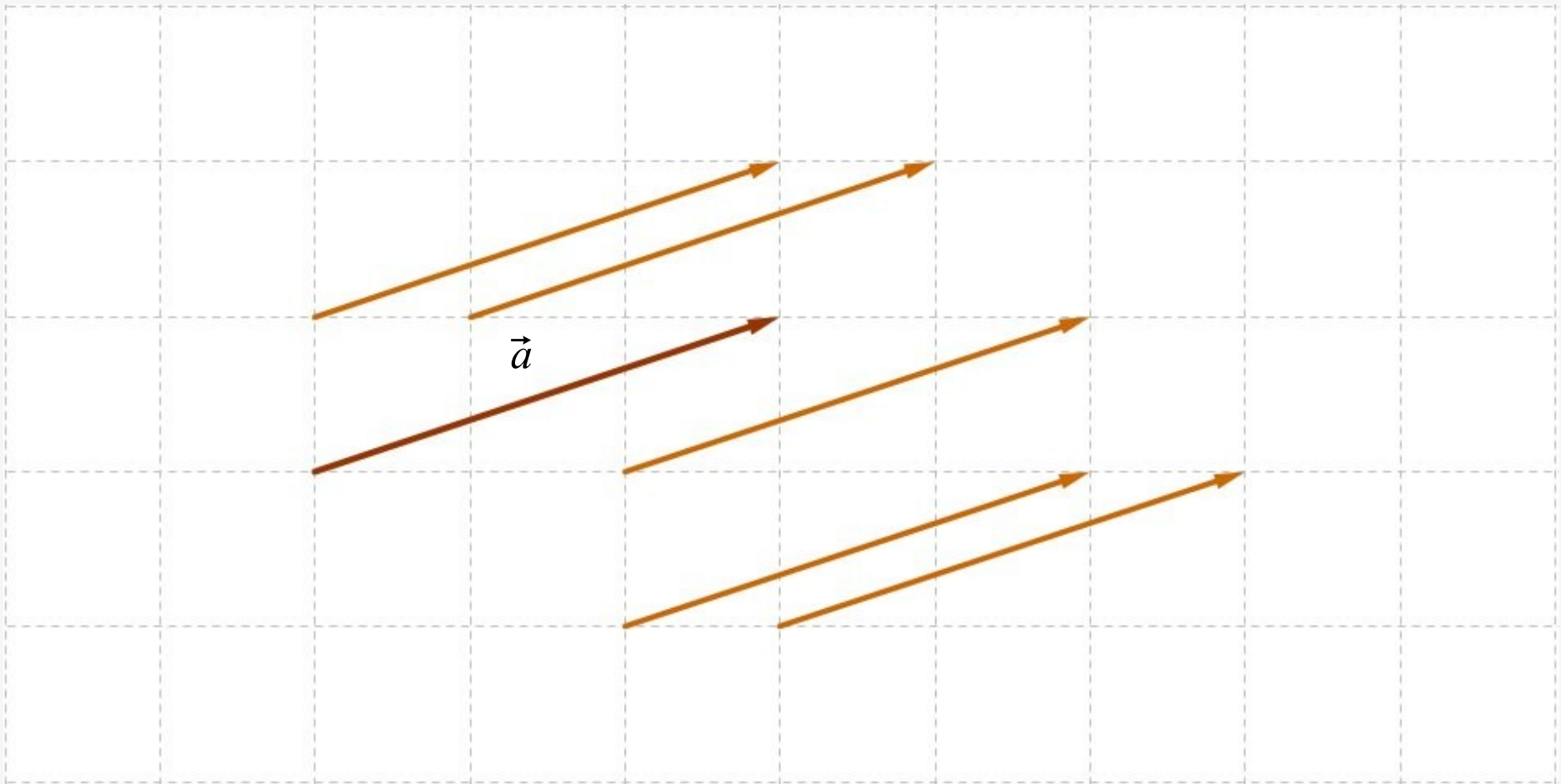


Abb. 2-6: Zum Vektorbegriff: Darstellung eines Vektors a

Definition 3:

Ein Vektor ist durch die Menge aller Pfeile gegeben, die gleich lang sind und gleiche Richtung haben. Ein einzelner Pfeil aus dieser Menge heißt ein Repräsentant des Vektors.

Die drei gegebenen Definitionen behandeln freie Vektoren.

Die freien Vektoren dürfen so verschoben werden, dass sich ihre Richtung nicht ändert.

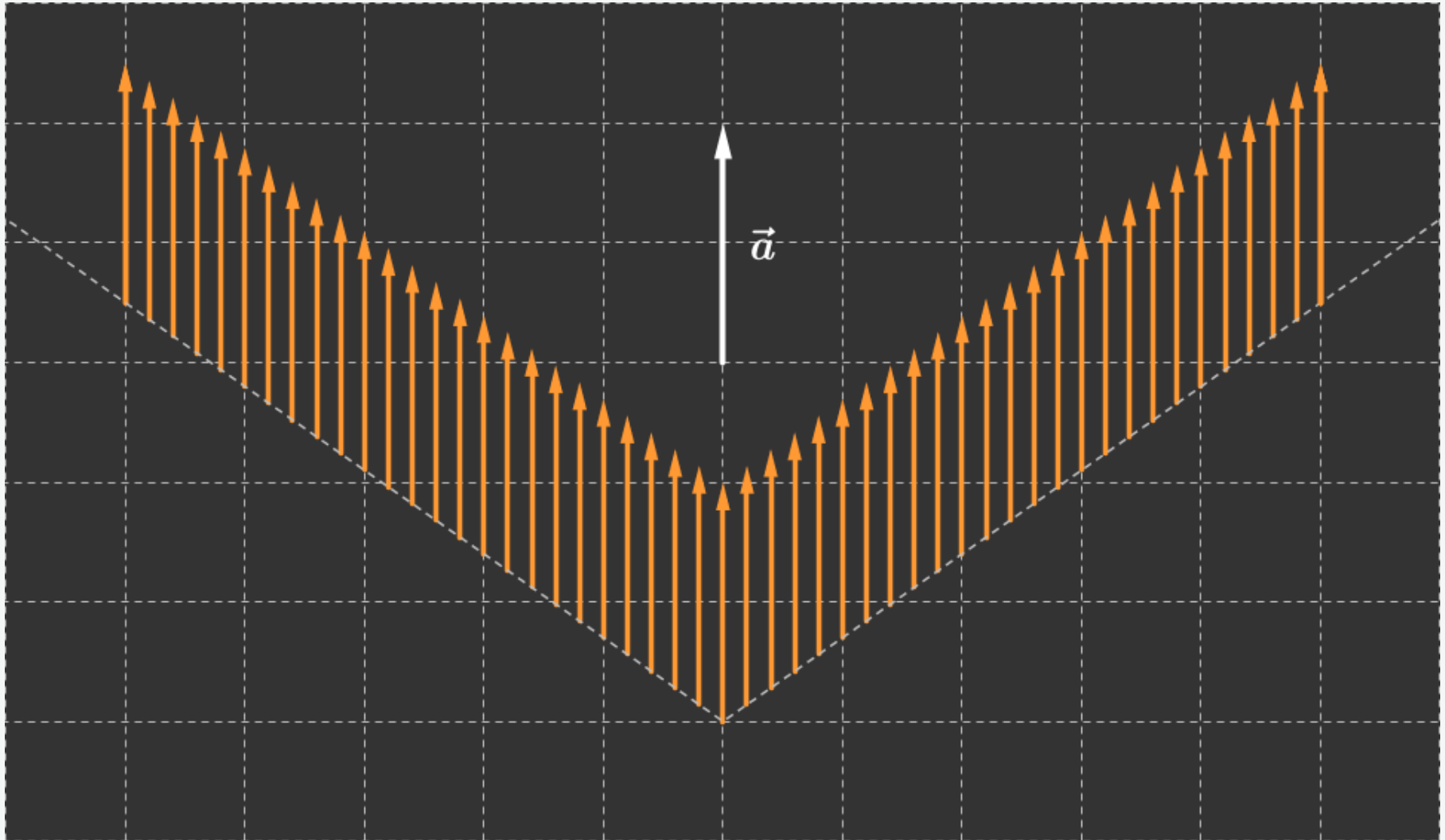


Abb. 2-7: Zum Begriff “Repräsentant eines Vektors”. Alle gezeichneten Pfeile repräsentieren denselben Vektor. Sie sind gleich lang und haben die gleiche Richtung. Auch der Vektor \mathbf{a} (weiß) ist ein Repräsentant des Vektors.

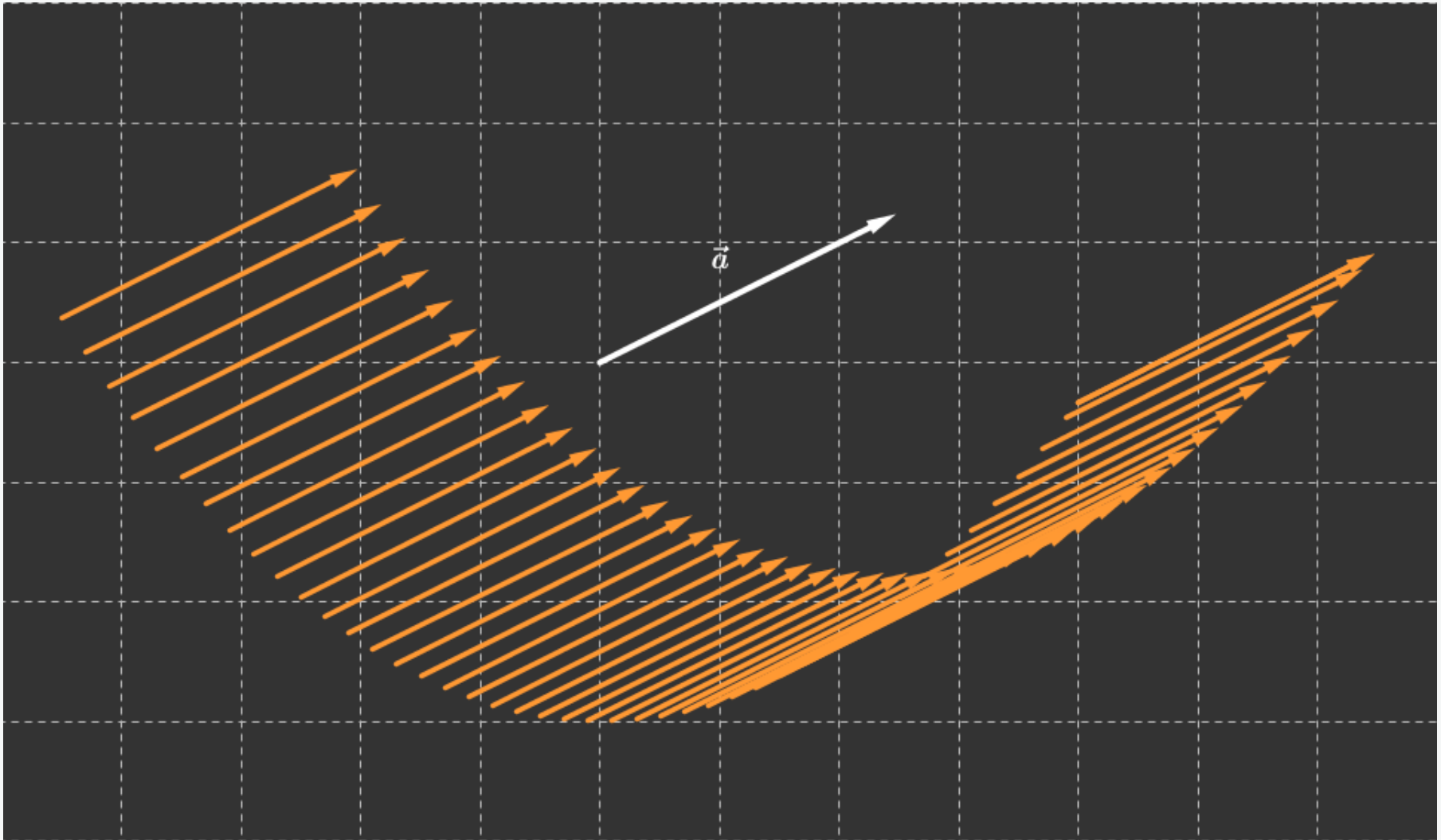


Abb. 2-8: Zum Begriff “Repräsentanten eines Vektors”. Alle gezeichneten Pfeile repräsentieren denselben Vektor. Sie sind gleich lang und haben die gleiche Richtung. Auch der Vektor \vec{a} (weiß) ist ein Repräsentant des Vektors.

Aufgabe 1:

Welche der gegebenen Größen werden durch Vektoren beschrieben?

- a) Masse, Temperatur, Geschwindigkeit, Zeit, Kraft, Volumen,
- b) 30 m/s West, 15 m Nord, 30 s, 200 Kalorien.

Aufgabe 2:

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?

- a) Ein Vektor hat immer eine Richtung.
- b) Ein Vektor ist nur durch die Richtung bestimmt.
- c) Ein Skalar kann eine Richtung haben, z.B. die Zeit.
- d) Vektoren können durch Pfeile in einem Koordinatensystem beschrieben werden. Dabei entspricht die Länge des Pfeils der Länge des Vektors.
- e) Die Länge eines Vektors ist eine skalare Größe.

- Lösung 1:
- a) Geschwindigkeit, Kraft
 - b) 30 m/s West, 15 m Nord,

Lösung 2:

- a) Richtig. Laut Definition ist ein Vektor eine gerichtete Größe, hat also immer eine Richtung.
- b) Falsch. Ein Vektor ist durch die Richtung und die Länge bestimmt.
- c) Falsch. Skalare sind Größen, die keine Richtung haben. Ein bestimmter Zeitpunkt ist ein Skalar, das keine Richtung hat.
- d) Ja, das ist richtig.
- e) Ja, das ist richtig.



Abb. 3-1: Zur Aufgabe 2

Aufgabe 3: Stellen wir uns vor, ein Bogenpfeil repräsentiert einen Vektor. Der Pfeil wurde geschossen. Repräsentiert ein fliegender Pfeil einen oder mehrere Vektoren?

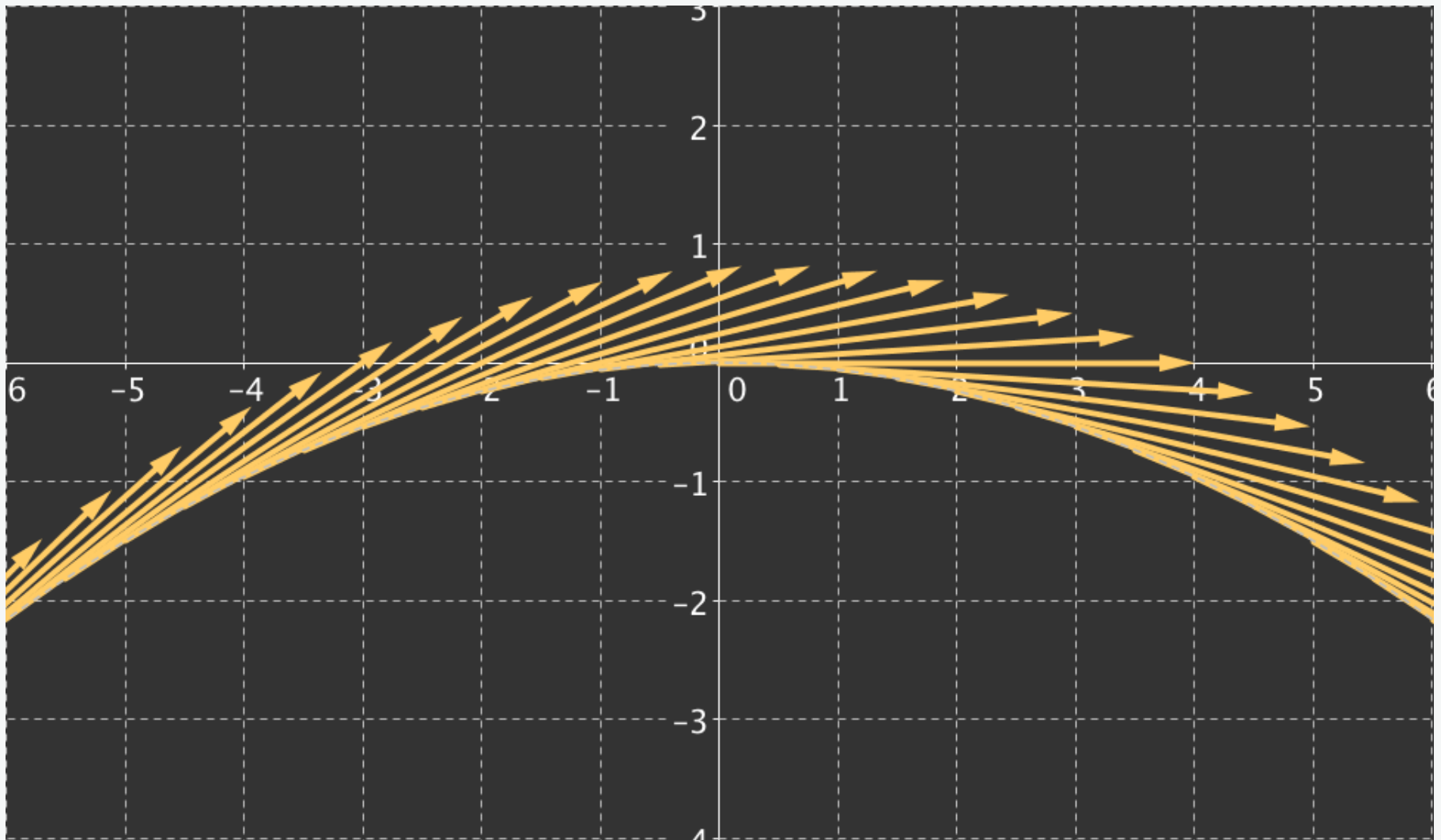


Abb. 3-2: Diese Abbildung zeigt einige Lagen des fliegenden Pfeils

Der fliegende Pfeil kann nicht einen Vektor repräsentieren. Zwar ändert sich die Länge des Pfeilvektors nicht, aber die Richtung. Der fliegende Pfeil repräsentiert unendlich viele Vektoren. Die Abbildung der nächsten Seite zeigt einen Vektor.

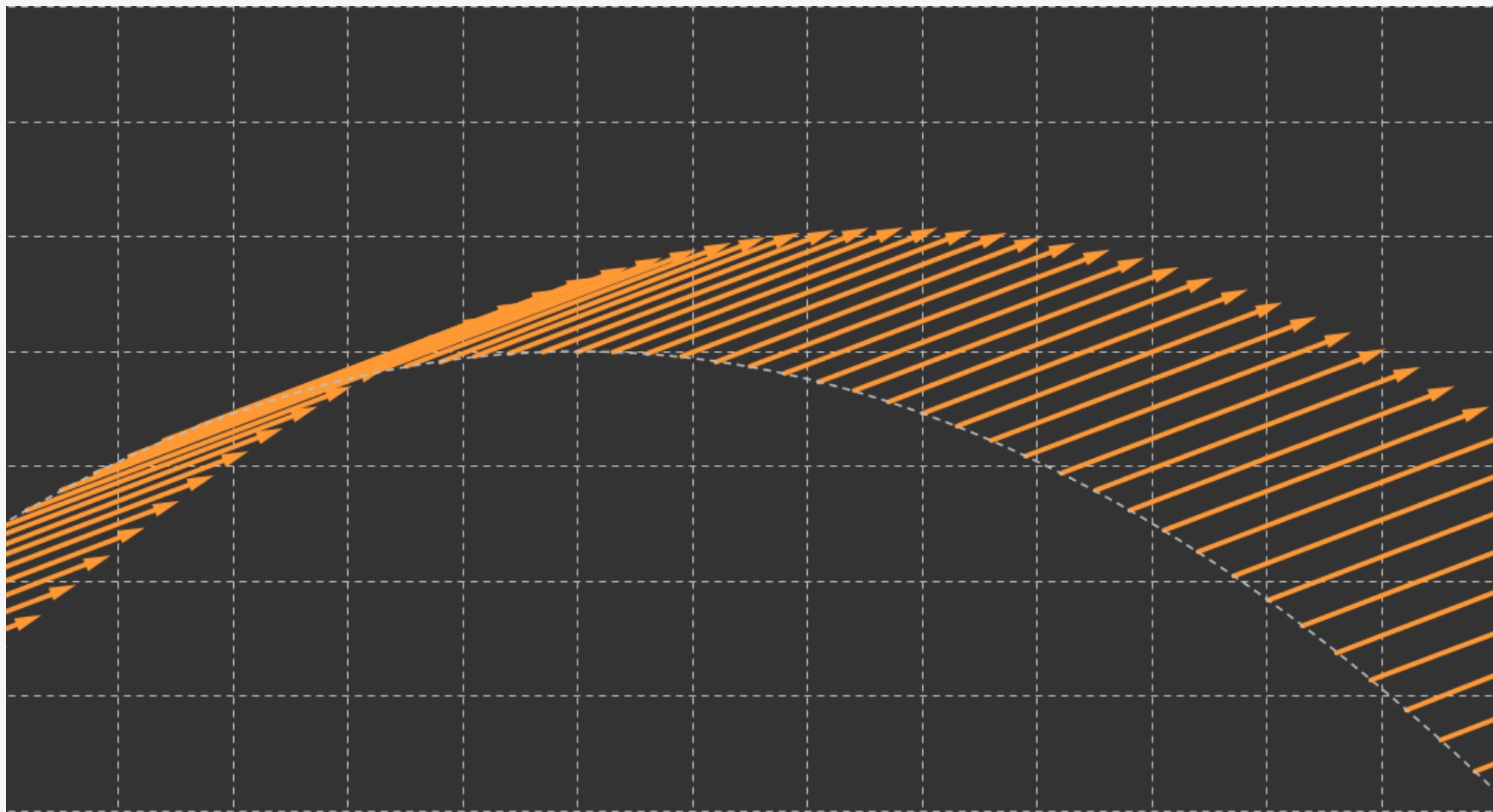


Abb. 3-3: Diese Abbildung zeigt einen Vektor



Aufgabe 4:

Wie viele Vektoren sind in den Abbildungen 4-1, 4-2, 4-3 und 4-4 dargestellt?

Darstellung der Aufgabe 4

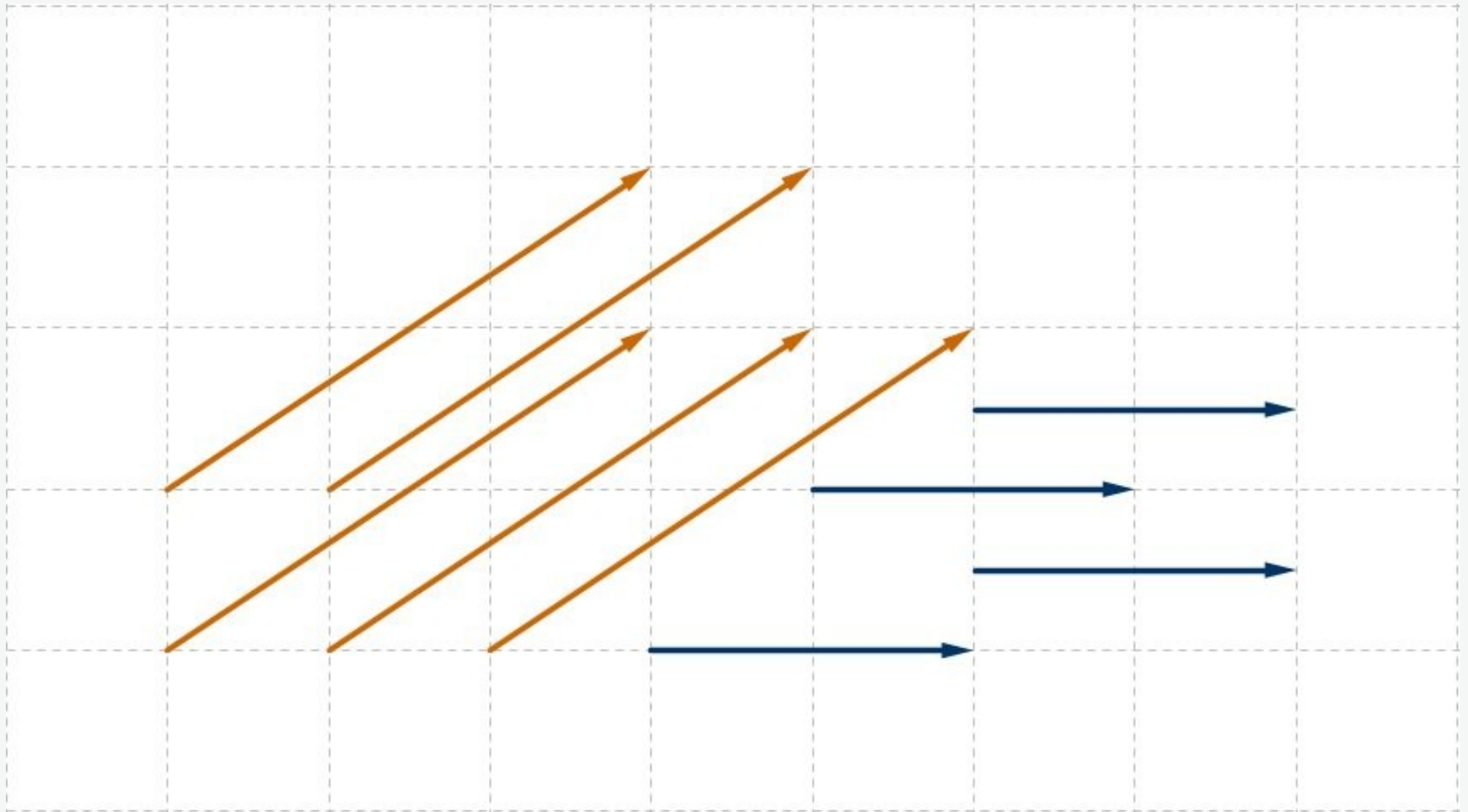


Abb. 4-1: Vektoren der Aufgabe 4

Darstellung der Aufgabe 4

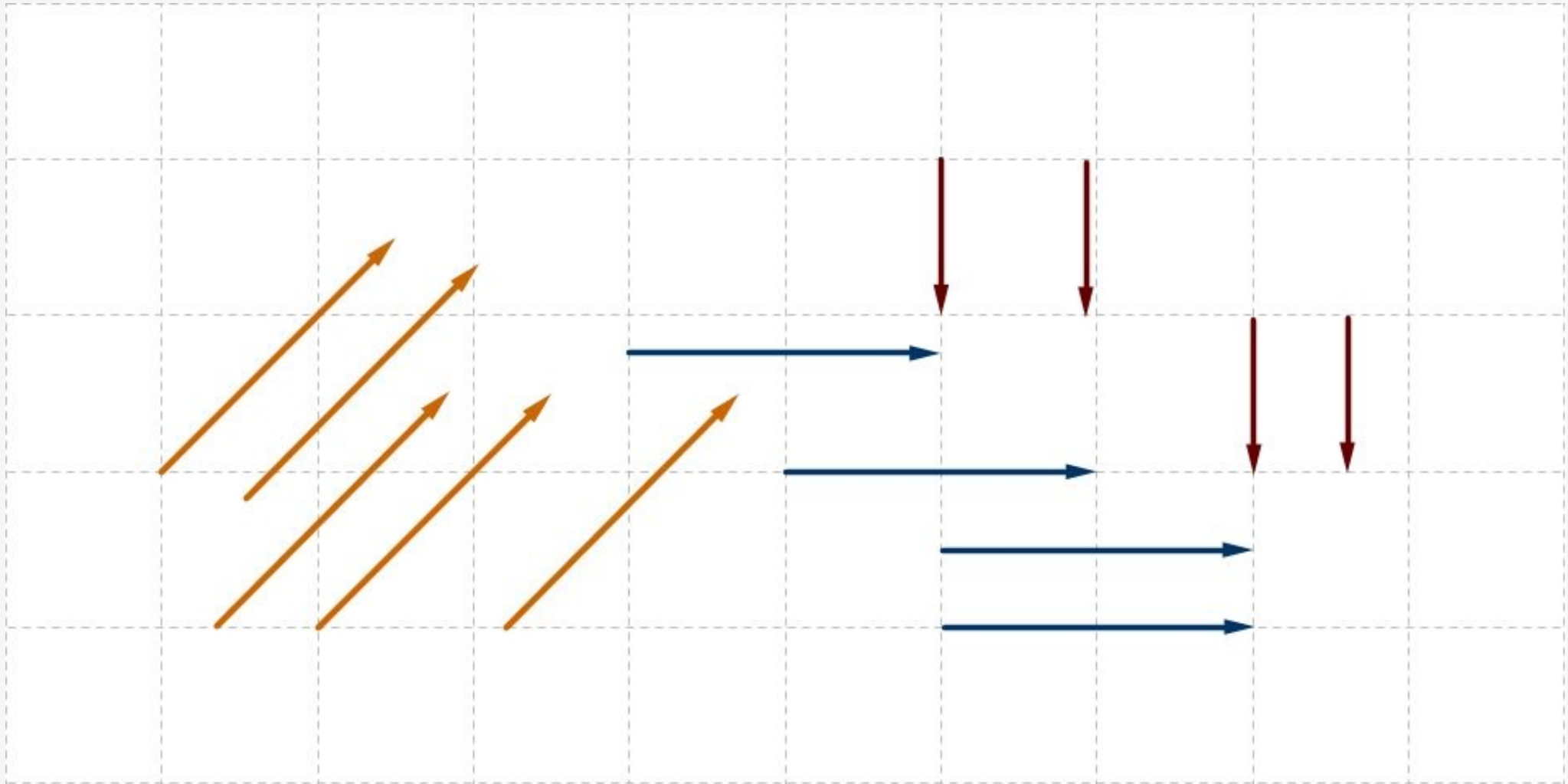


Abb. 4-2: Vektoren der Aufgabe 4

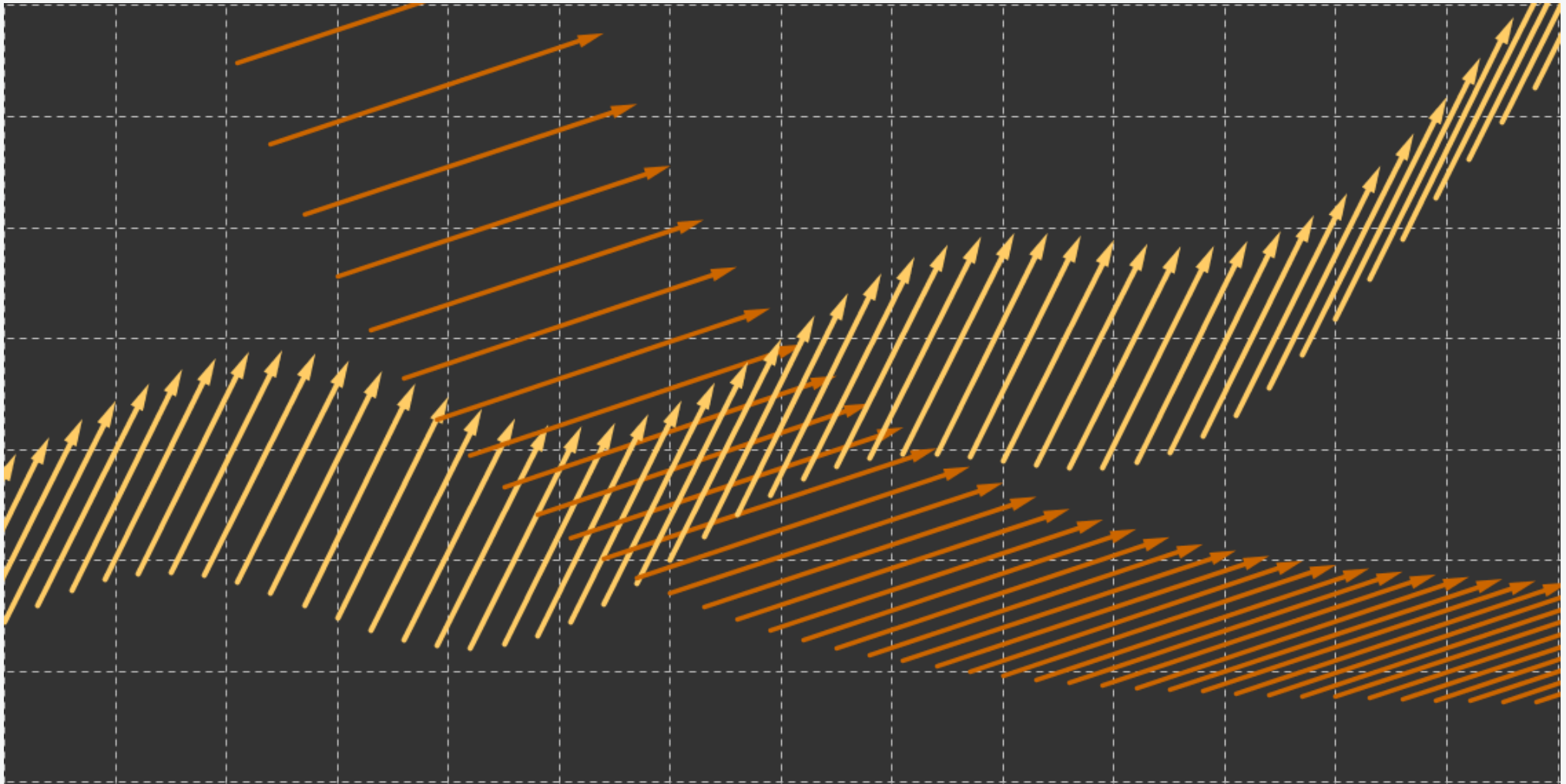


Abb. 4-3: Vektoren der Aufgabe 4

Darstellung der Aufgabe 4

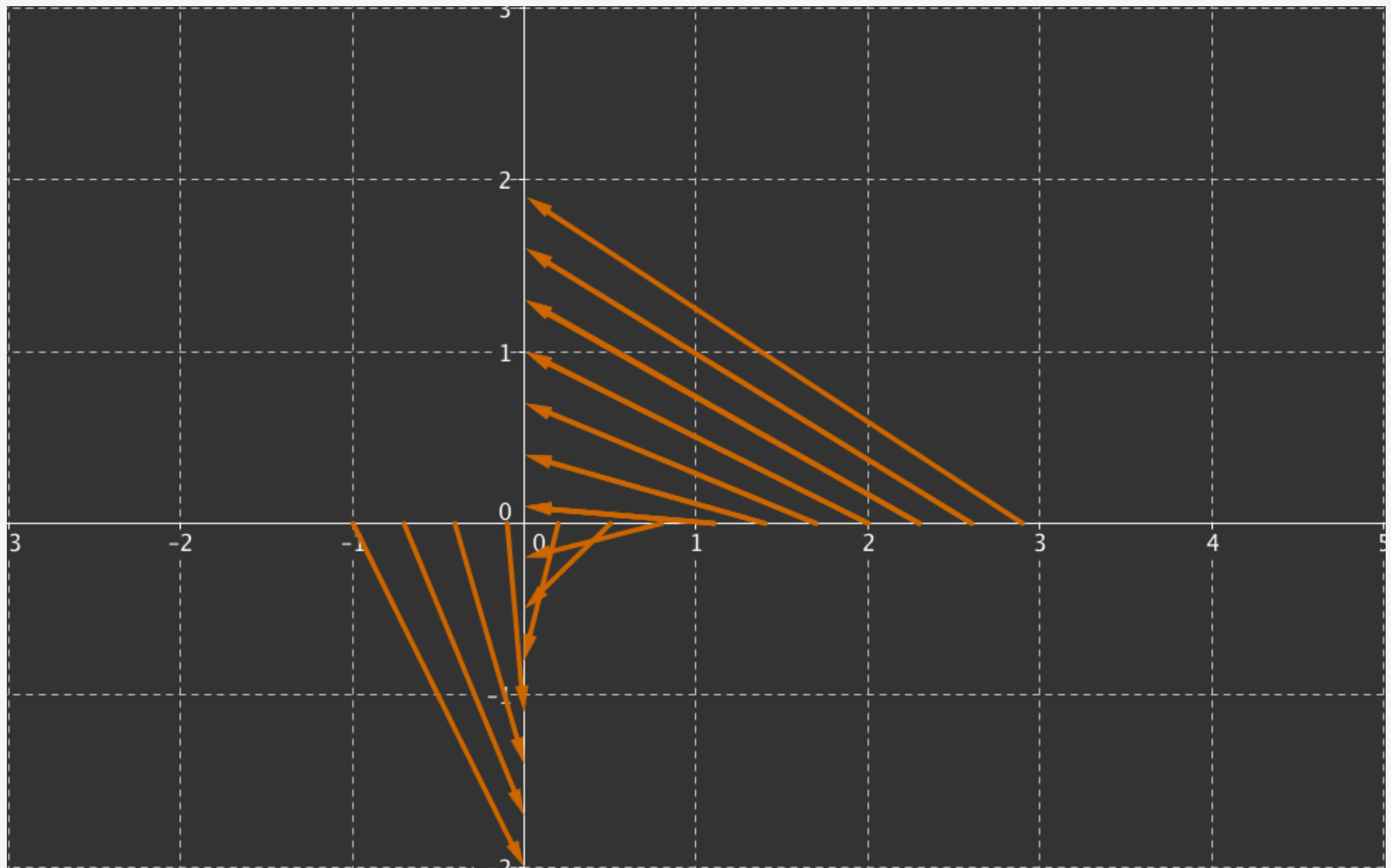
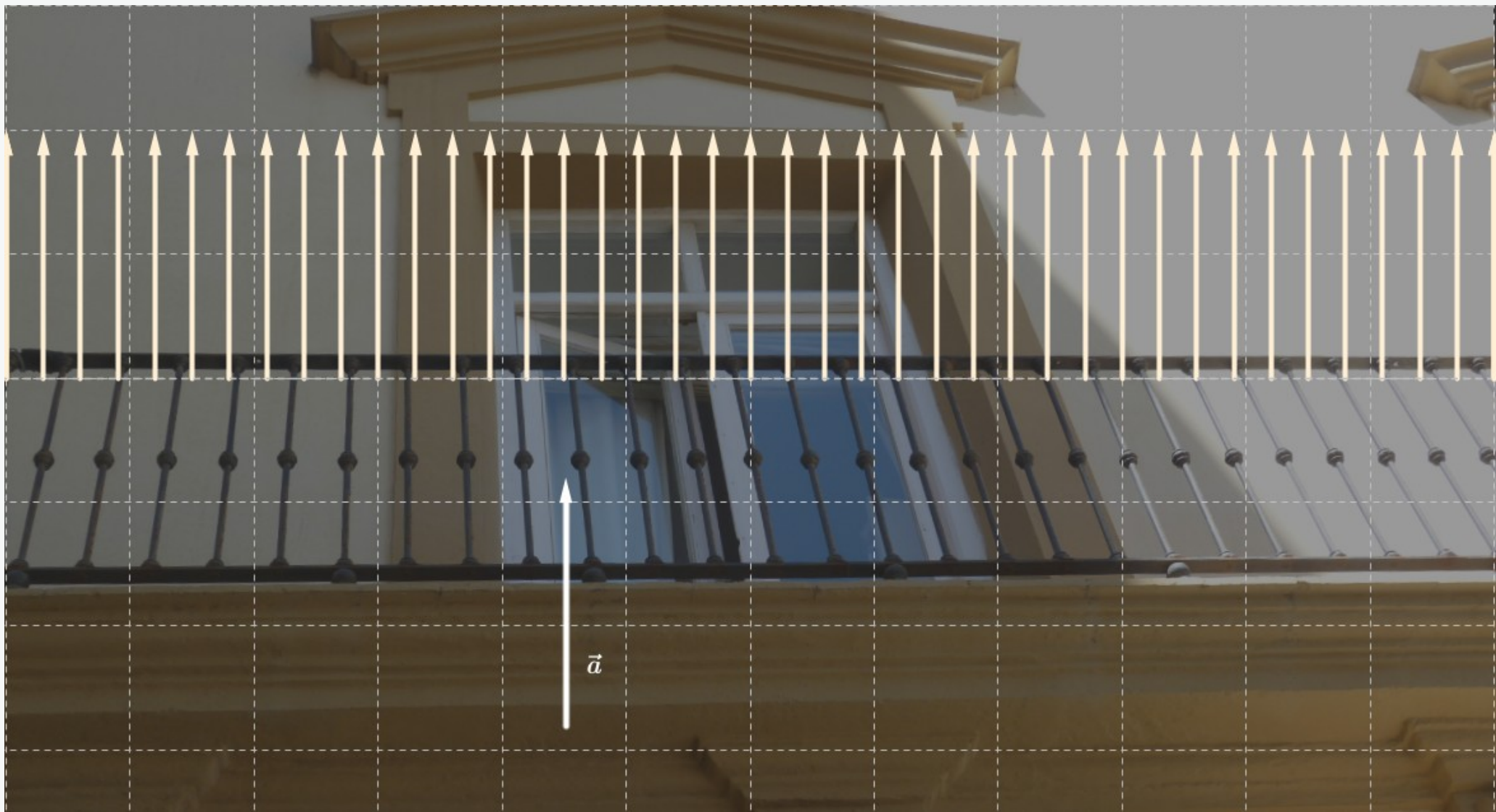


Abb. 4-4: Vektoren zu Aufgabe 4



Cadiz (Fragment)

Lösung 4: *Abb. 4-1: zwei Vektoren*

Abb. 4-2: drei Vektoren

Abb. 4-3: zwei Vektoren

Abb. 4-4: 14 Vektoren