



http://www.youtube.com/watch?v=G_f7cEHaLeg

Projektion eines Vektors

Einführendes Beispiel



http://www.youtube.com/watch?v=G_f7cEHaLeg

Abb. 1-1: Der Recke pflügt den Acker

Wie bestimmt man die Kraft, die entlang der Richtung s wirkt?

Projektion eines Vektors

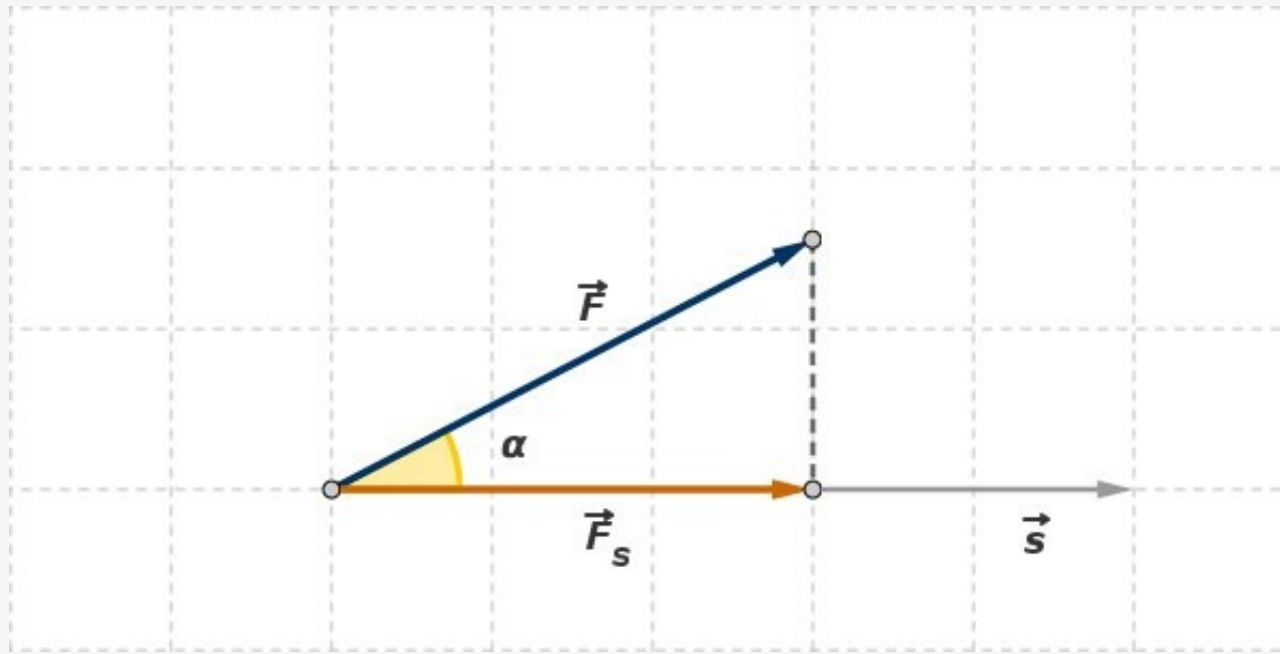


Abb. 1-2: Die Kraft F , der Richtungsvektor s und die Projektion der Kraft auf die Richtung von s

$$\vec{F}_s = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = |\vec{F}| \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \underbrace{\frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}}_{\cos \alpha} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s}$$

– die Projektion von F in Richtung s

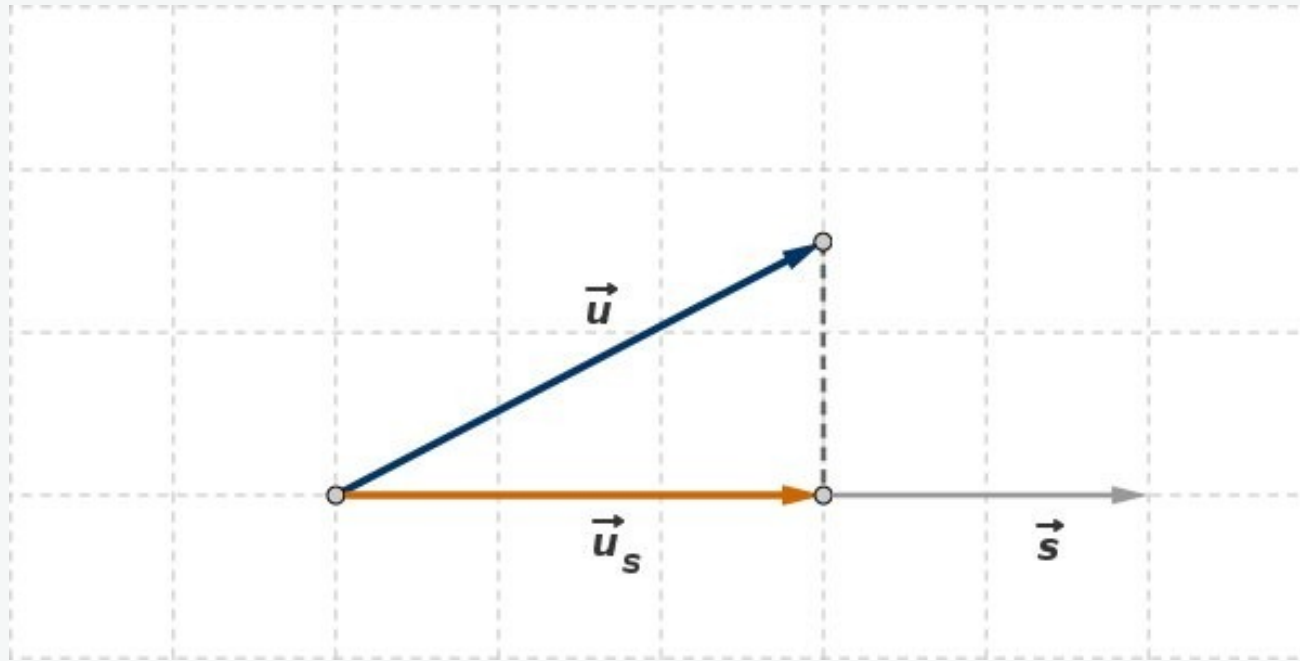


Abb. 1-3: Zur Illustration der Projektion von u in Richtung s

Definition:

Die Projektion von u in Richtung s ist gegeben durch:

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s}$$



Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Projektion des Vektors $\mathbf{u} = (3, 2)$ in Richtung des Vektors \mathbf{s}

a) $\vec{s} = (4, 1)$, b) $\vec{s} = (4, -1)$

c) $\vec{s} = (2, -2)$, d) $\vec{s} = (-2, 1)$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Projektion des Vektors \mathbf{u} in Richtung des Vektors \mathbf{s}

a) $\vec{u} = (2, 2, -1)$

1) $\vec{s} = (-1, 1, -1)$, 2) $\vec{s} = (1, 1, -1)$, 3) $\vec{s} = (1, 1, 1)$

b) $\vec{u} = (2, -2, 1)$

1) $\vec{s} = (1, 0, 2)$, 2) $\vec{s} = (0, 2, 1)$, 3) $\vec{s} = (1, -2, 0)$

Projektion eines Vektors: Lösung 1a

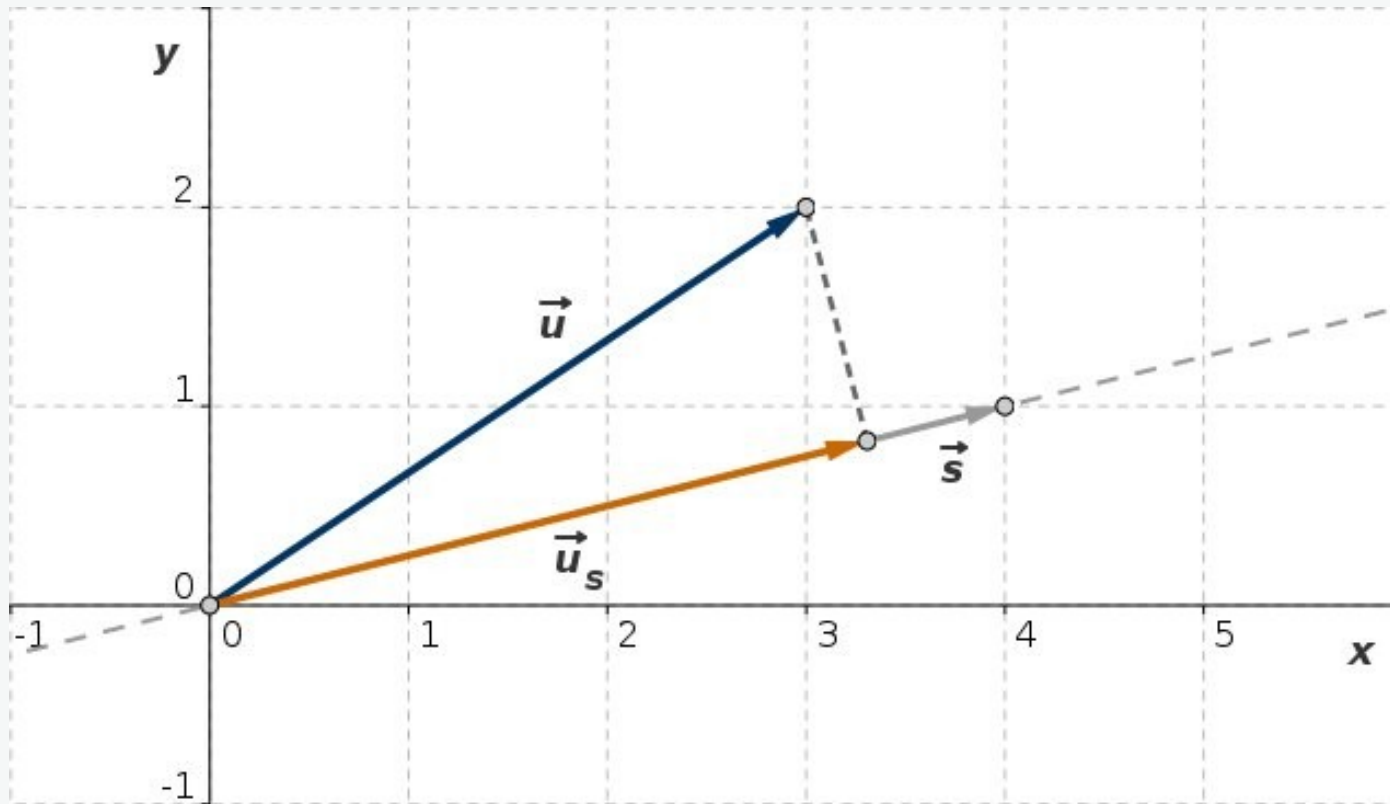


Abb. L-2a: Zur Illustration der Aufgabe

$$\vec{u} = (3, 2), \quad \vec{s} = (4, 1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 14, \quad |\vec{s}|^2 = 17$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{14}{17} \cdot \vec{s} = \frac{14}{17} (4, 1) = \left(\frac{56}{17}, \frac{14}{17} \right) \approx (3.29, 0.82)$$

Projektion eines Vektors: Lösung 1b

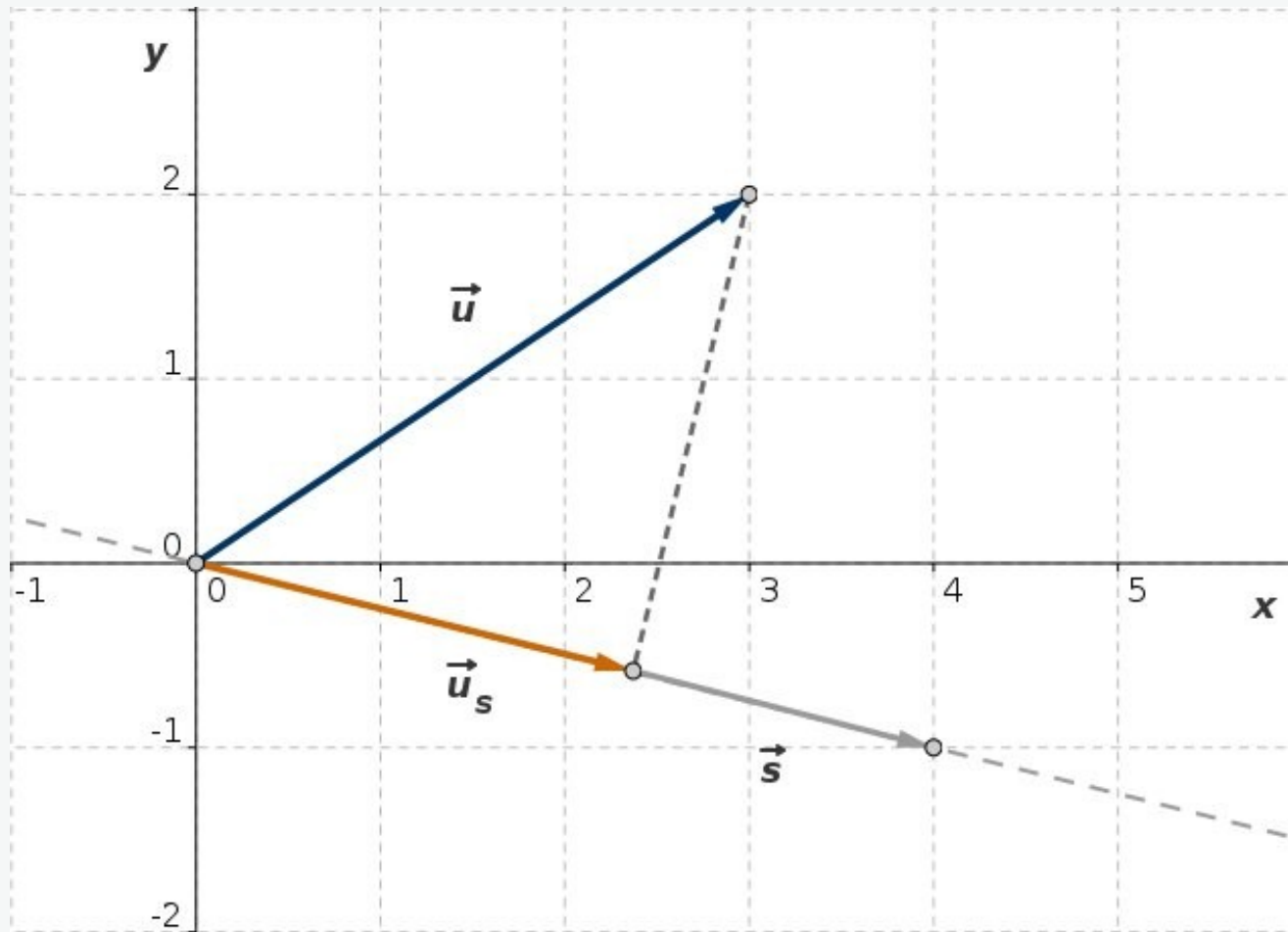


Abb. L-2b: Zur Illustration der Aufgabe

$$\vec{u} = (3, 2), \quad \vec{s} = (4, -1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 10, \quad |\vec{s}|^2 = 17$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{10}{17} \cdot \vec{s} = \frac{10}{17} (4, -1) = \left(\frac{40}{17}, -\frac{10}{17} \right) \simeq (2.35, -0.59)$$

Projektion eines Vektors: Lösung 1c

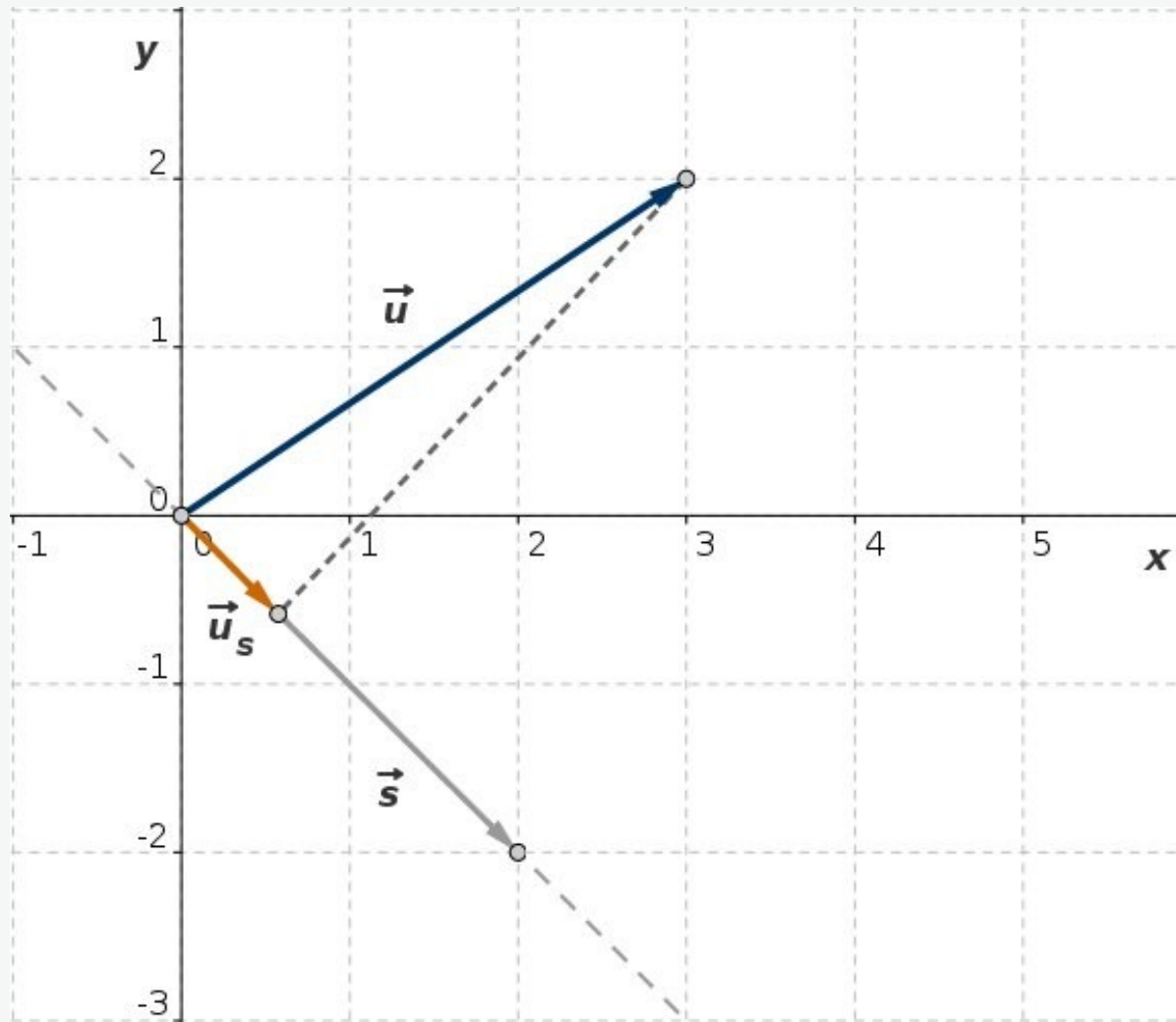


Abb. L-2c: Zur Illustration der Aufgabe

$$\vec{u} = (3, 2), \quad \vec{s} = (2, -2) = 2(1, -1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 2, \quad |\vec{s}|^2 = 8$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{1}{4} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (1, -1) = (0.5, -0.5)$$

Projektion eines Vektors: Lösung 1d

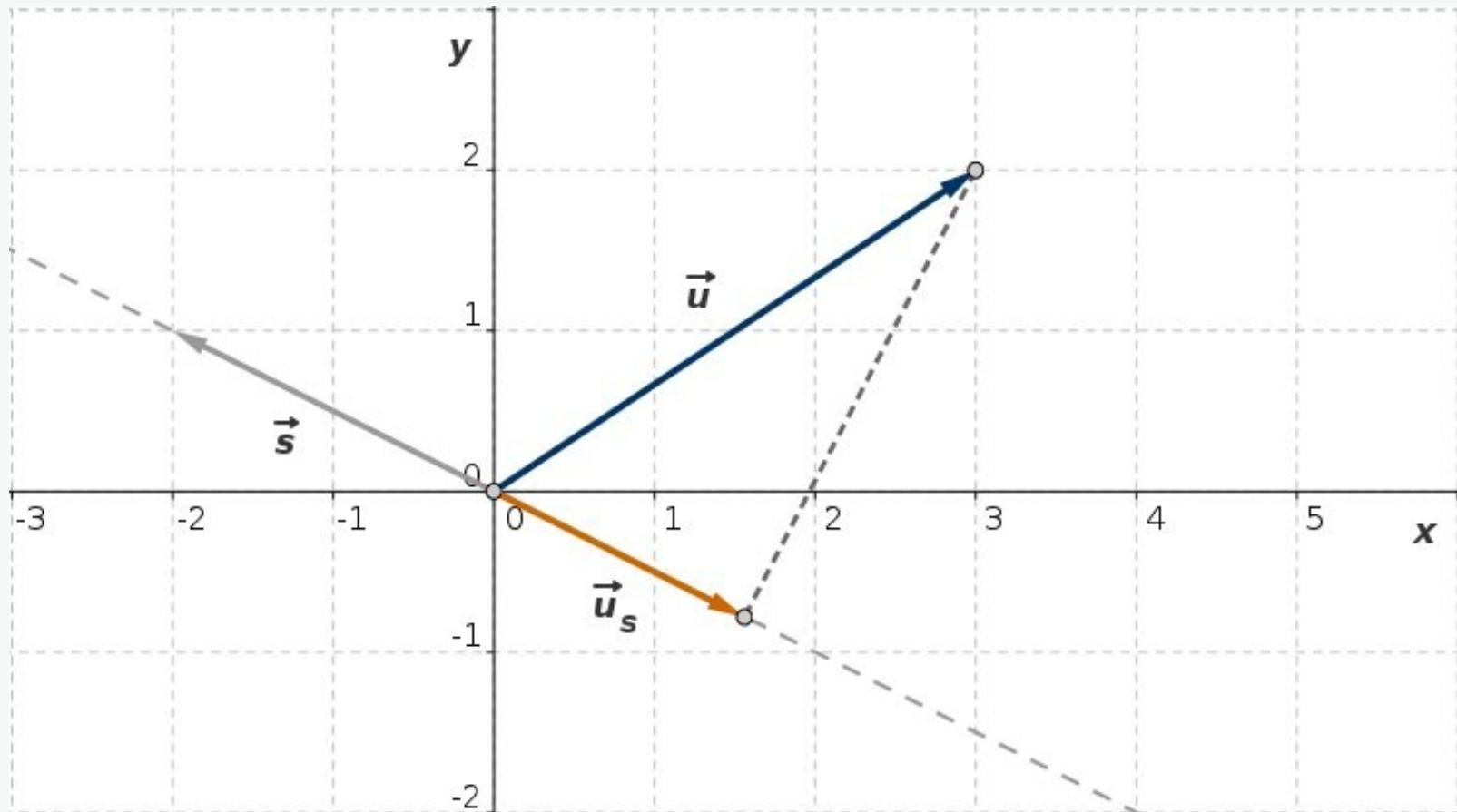


Abb. L-2d: Zur Illustration der Aufgabe

$$\vec{u} = (3, 2), \quad \vec{s} = (-2, 1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = -4, \quad |\vec{s}|^2 = 5$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = -\frac{4}{5} \cdot \vec{s} = \frac{4}{5} (2, -1) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5} \right) \approx (1.6, -0.8)$$

$$1) \vec{u} = (2, 2, -1), \quad \vec{s} = (-1, 1, -1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 1, \quad |\vec{s}|^2 = 3$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{1}{3} \cdot \vec{s} = \frac{1}{3} (-1, 1, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

$$2) \vec{u} = (2, 2, -1), \quad \vec{s} = (1, 1, -1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 5, \quad |\vec{s}|^2 = 3$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{5}{3} \cdot \vec{s} = \frac{5}{3} (1, 1, -1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3} \right)$$

$$3) \vec{u} = (2, 2, -1), \quad \vec{s} = (1, 1, 1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 3, \quad |\vec{s}|^2 = 3$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \vec{s} = (1, 1, 1)$$

Projektion eines Vektors: Lösung 2b

$$1) \vec{u} = (2, -2, 1), \quad \vec{s} = (1, 0, 2), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 4, \quad |\vec{s}|^2 = 5$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{4}{5} \cdot \vec{s} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{8}{5} \right) = (0.8, 0, 1.6)$$

$$2) \vec{u} = (2, -2, 1), \quad \vec{s} = (0, 2, 1), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = -3, \quad |\vec{s}|^2 = 5$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = -\frac{3}{5} \cdot \vec{s} = \left(0, -\frac{6}{5}, -\frac{3}{5} \right) = (0, -1.2, -0.6)$$

$$3) \vec{u} = (2, -2, 1), \quad \vec{s} = (1, -2, 0), \quad \vec{s} \cdot \vec{u} = 6, \quad |\vec{s}|^2 = 5$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} = \frac{6}{5} \cdot \vec{s} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, 0 \right) = (1.2, -2.4, 0)$$