



*Glaspyramide im Innenhof des Louvre*

[http://de.wikipedia.org/wiki/Glaspyramide\\_im\\_Innenhof\\_des\\_Louvre](http://de.wikipedia.org/wiki/Glaspyramide_im_Innenhof_des_Louvre)

*Spatprodukt: Aufgaben*

## Spatprodukt: Aufgabe 1

Durch die Punkte  $O$ ,  $A$ ,  $B$  und  $C$  (die nicht in einer Ebene liegen) ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche gegeben. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide, die Grundfläche  $ABC$  und die Höhe  $OD$  der Pyramide.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}}, \quad V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot h$$

$$a) \quad A(5, 2, 0), \quad B(2, 5, 0), \quad C(1, 2, 4), \quad O(0, 0, 0)$$

$$b) \quad A(4, 4, 1), \quad B(6, 3, 0), \quad C(6, 6, 2), \quad O(2, 2, 2)$$

$$c) \quad A(5, 2, 2), \quad B(2, 5, 2), \quad C(4, 2, 0), \quad O(1, 1, 2)$$

# Spatprodukt: Aufgabe 1

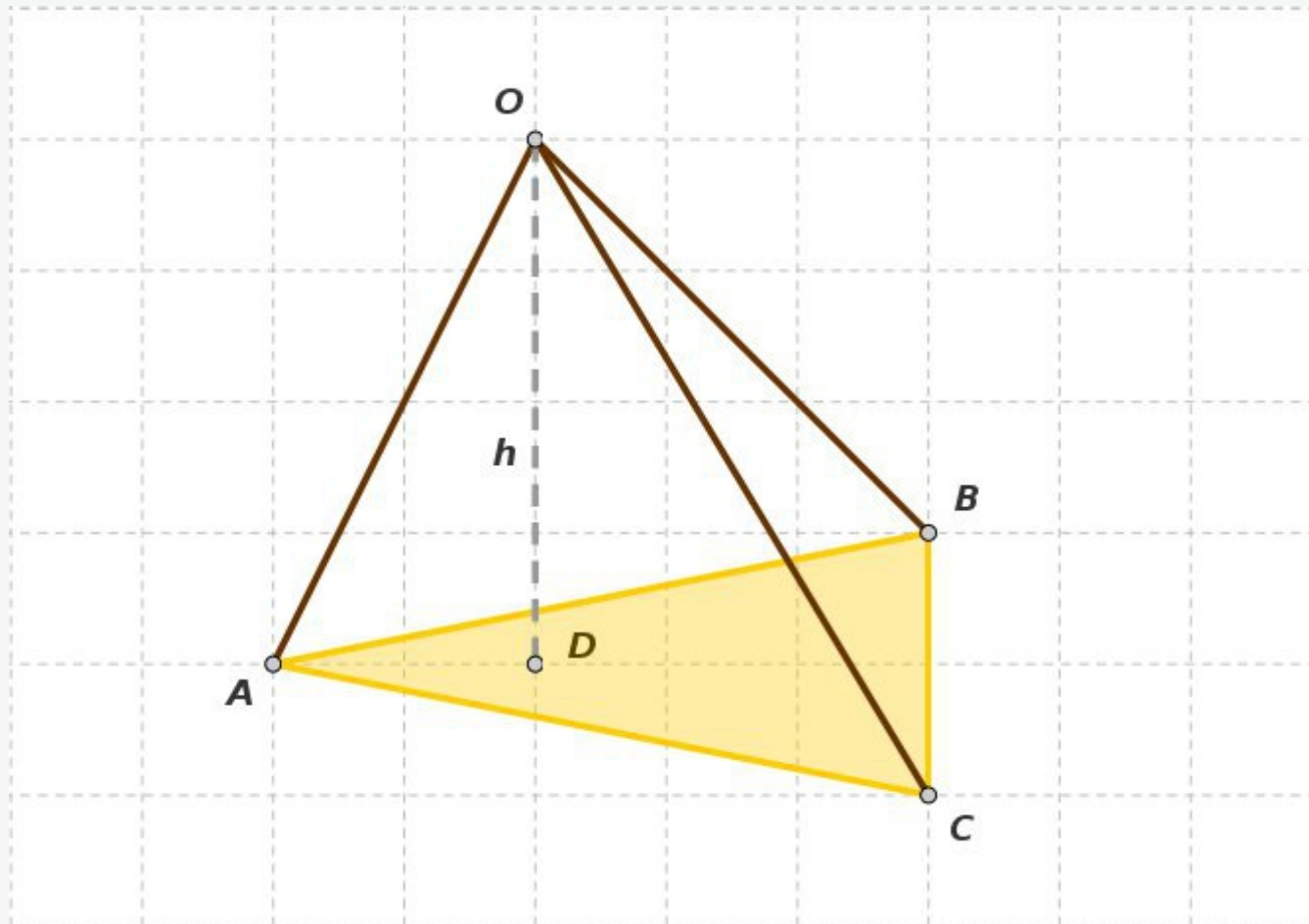


Abb: A1-a: Abbildung der Aufgabe

$A_{ABC}$  ist die Grundfläche der Pyramide,  $h$  ist Höhe

# Spatprodukt: Lösung 1a

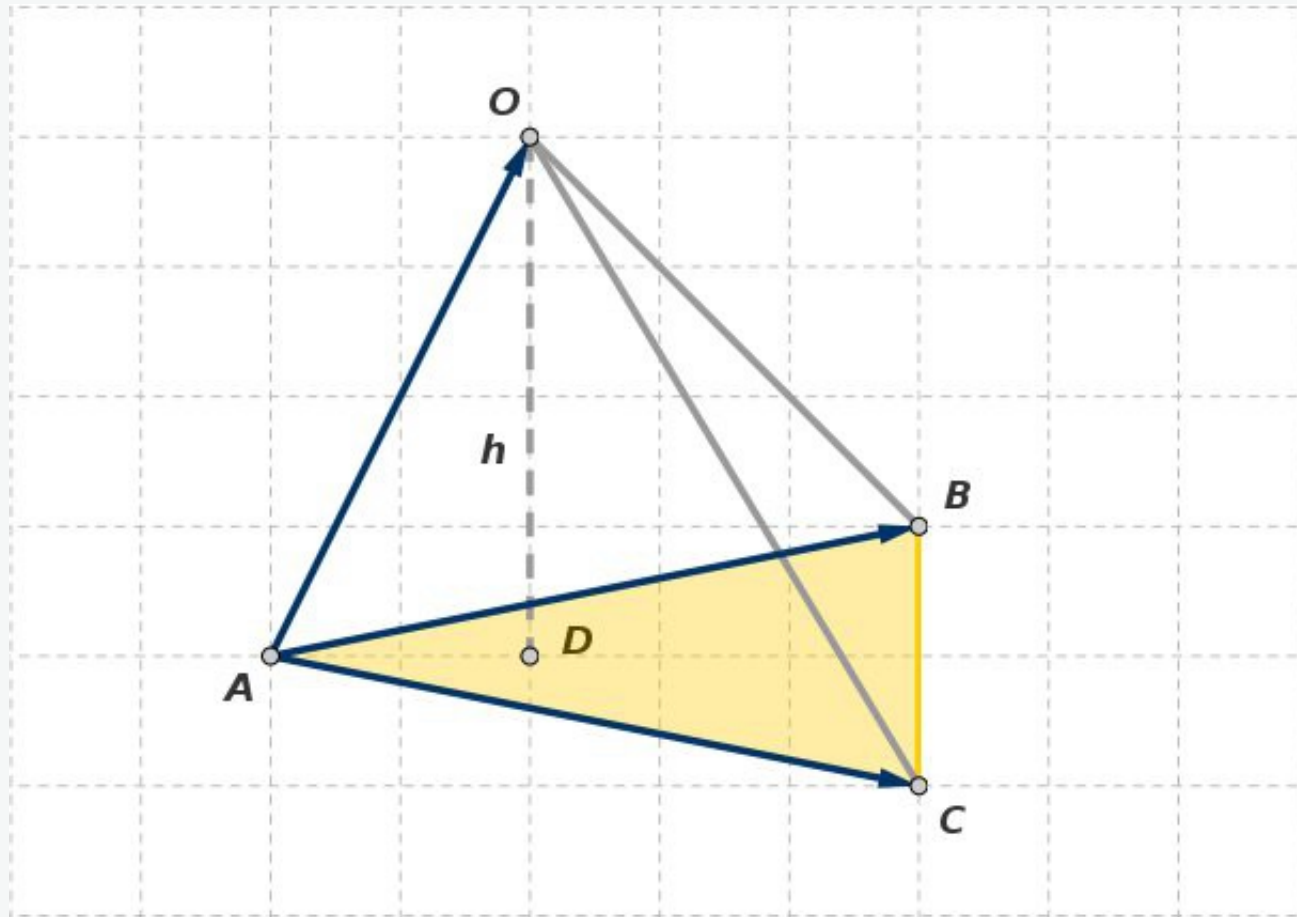


Abb: A1-b: zur Aufgabe

$$a) \quad A(5, 2, 0), \quad B(2, 5, 0), \quad C(1, 2, 4), \quad O(0, 0, 0)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{AO} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \left| -\frac{84}{6} \right| = 14 \text{ VE}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 12(1, 1, 1)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 6\sqrt{3} \simeq 10.392 \text{ FE}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_{ABC} |OD| \Rightarrow$$

$$h = |OD| = \frac{3 \cdot V_{\text{Pyramide}}}{A_{ABC}} = \frac{3 \cdot 14}{6 \cdot \sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \simeq 4.041 \text{ LE}$$

$$b) \quad A(4, 4, 1), \quad B(6, 3, 0), \quad C(6, 6, 2), \quad O(2, 2, 2)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \text{ VE}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (1, -4, 6)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{53}}{2} \simeq 3.640 \text{ FE}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_{ABC} |OD| \Rightarrow$$

$$h = |OD| = \frac{3 \cdot V_{\text{Pyramide}}}{A_{ABC}} = \frac{12}{\sqrt{53}} \simeq 1.648 \text{ LE}$$

$$A(5, 2, 2), \quad B(2, 5, 2), \quad C(4, 2, 0), \quad O(1, 1, 2)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AO} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = 5 \text{ VE}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-6, -6, 3) = 3(-2, -2, 1)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{9}{2} \text{ FE}$$

$$h = |OD| = \frac{3 \cdot V_{\text{Pyramide}}}{A_{ABC}} = \frac{10}{3} \simeq 3.333 \text{ LE}$$

## *Spatprodukt: Aufgabe 2*

Gegeben ist eine Pyramide. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide und die Höhe von der Spitze auf die Grundfläche

a) Pyramide  $ABCDE$ : Grundfläche  $ABCD$  ist ein Parallelogramm,  $E$  ist die Spitze der Pyramide

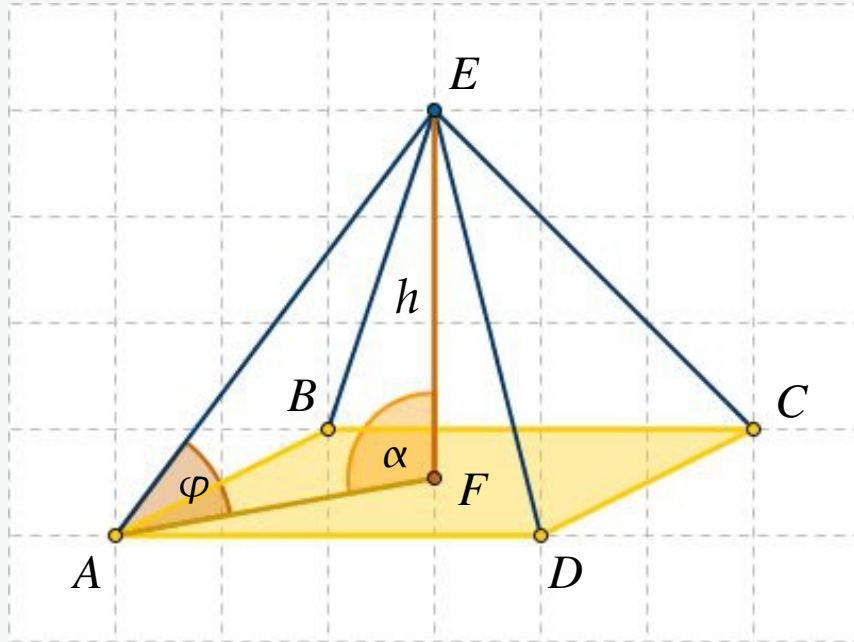
$$A(1, -3, 1), \quad B(2, 0, 4), \quad C(2, 4, 1), \quad D(1, 1, -2), \quad E(3, 3, 3)$$

b) Pyramide  $ABCD$ : Grundfläche  $ABC$  ist ein Dreieck,  $D$  ist die Spitze der Pyramide

$$A(2, -1, 0), \quad B(3, 4, 5), \quad C(4, 1, 3), \quad D(6, 2, 1).$$



## Spatprodukt: Lösung 2a



$$A(1, -3, 1), \quad B(2, 0, 4), \quad C(2, 4, 1), \\ D(1, 1, -2), \quad E(3, 3, 3);$$

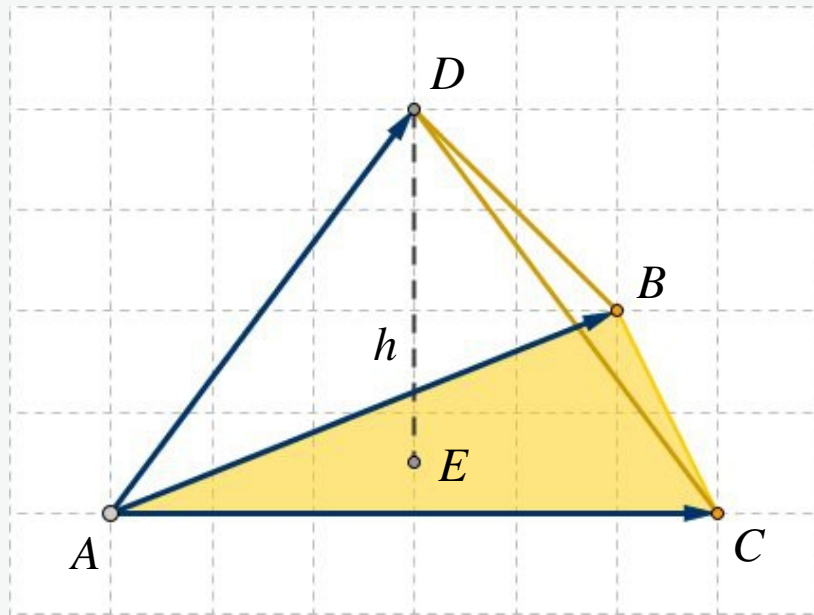
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot h$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \vec{AE} (\vec{AB} \times \vec{AD}) = \\ = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{|-16|}{3} = \frac{16}{3} \text{ VE}$$

$$A_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|, \quad \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-21, 3, 4)$$

$$A_{ABCD} = \sqrt{466} \text{ FE}, \quad h = \frac{3 V_{\text{Pyramide}}}{A_{ABCD}} = \frac{16}{\sqrt{466}} \simeq \frac{16}{21.59} \simeq 0.74 \text{ LE}$$

## Spatprodukt: Lösung 2b



$$A(2, -1, 0), \quad B(3, 4, 5), \quad C(4, 1, 3) \\ D(6, 2, 1).$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot h$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \vec{AD} (\vec{AB} \times \vec{AC}) =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{|11|}{2} = 5.5 \text{ VE}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{138} \text{ FE}$$

$$h = \frac{3V_{\text{Pyramide}}}{A_{ABC}} = \frac{6 \cdot 5.5}{\sqrt{138}} \simeq \frac{33}{11.75} \simeq 2.81 \text{ LE}$$