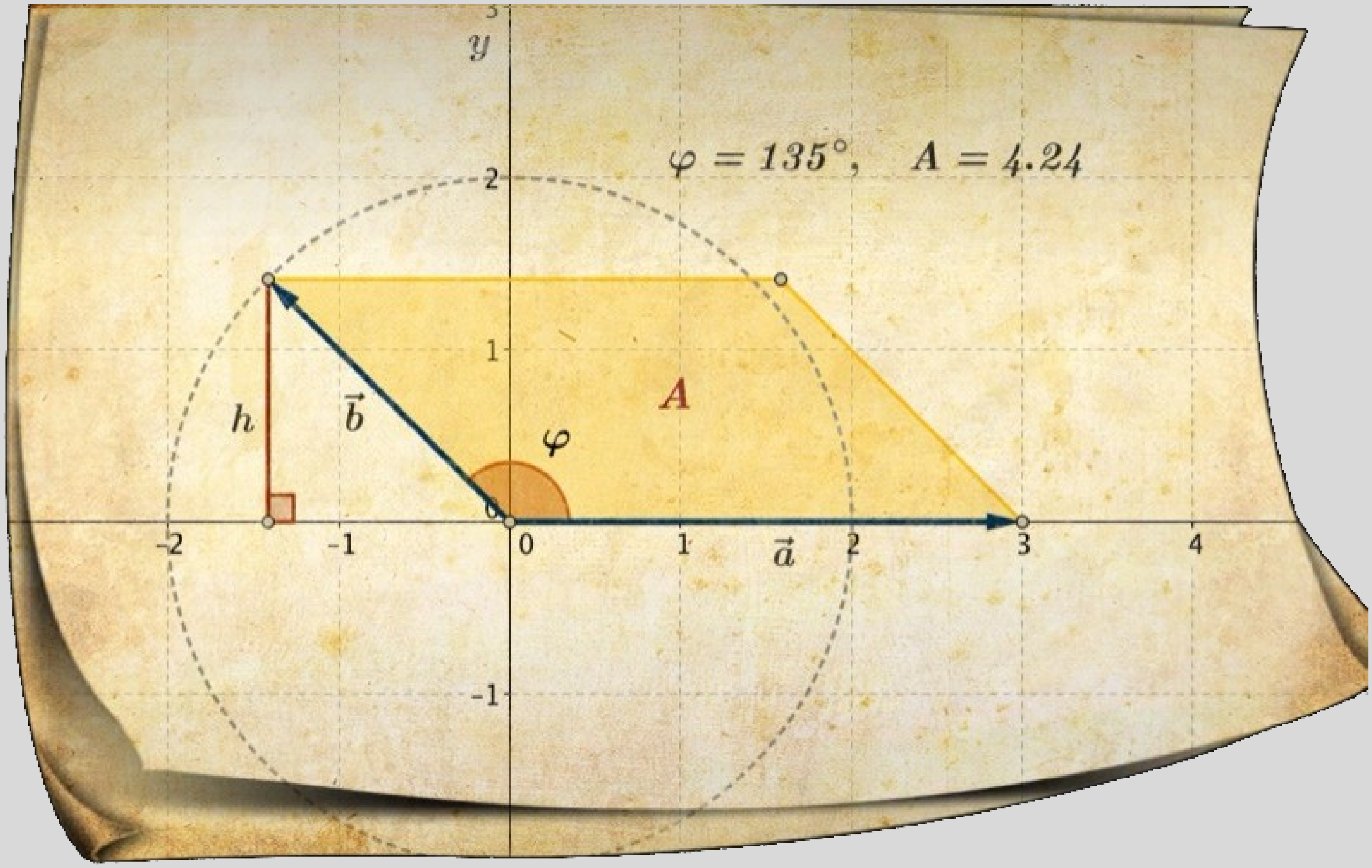

Vektorprodukt

Unter dem Vektorprodukt zweier Vektoren ***a*** und ***b*** versteht man den im Raum durch die folgenden Bedingungen charakterisierten Vektor:

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}}$$

1. $|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin\varphi \qquad \left(0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ\right)$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}\,, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$

(a, b, c) bilden ein Rechtssystem, falls ***a*** und ***b*** linear unabhängig sind

Aus dieser Definition ergibt sich, dass der Betrag des Vektorprodukts dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms entspricht.

Ein Vektorprodukt gibt es nur für dreidimensionale Vektoren !

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

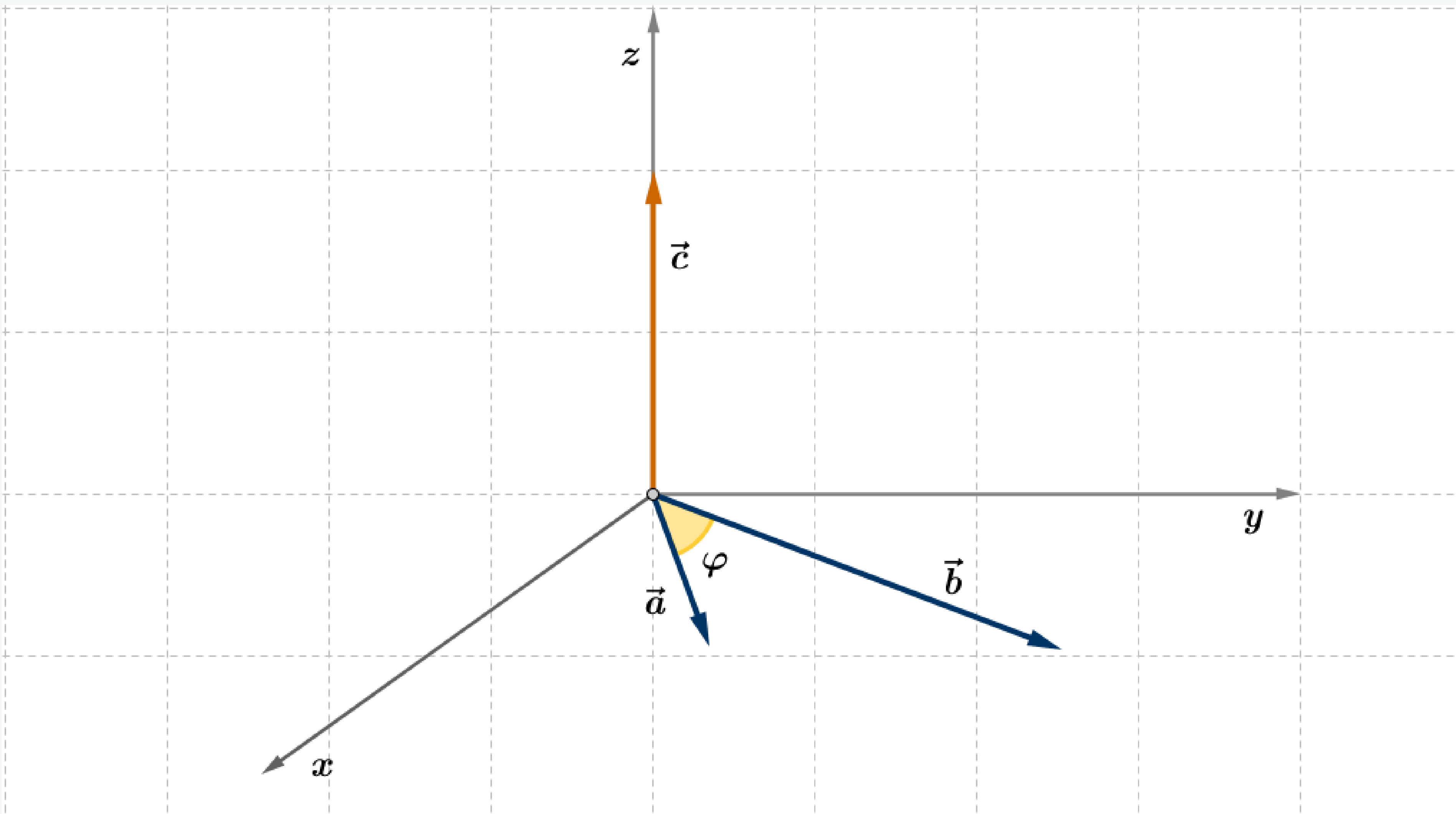

Abb. 1: Zum Begriff des Vektorproduktes zweier Vektoren. Die Vektoren a und b liegen in (x,y)-Ebene, der Vektor c ist orthogonal zur (x,y)-Ebene

Formale Darstellung des Vektorprodukts durch eine dreireihige Determinante

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \left(a_y\, b_z - a_z\, b_y\right) - \vec{e}_y \left(a_x\, b_z - a_z\, b_x\right) + \vec{e}_z \left(a_x\, b_y - a_y\, b_x\right)$$

Die kanonischen Einheitsvektoren bilden eine orthonormierte Basis:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass

a) $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$

b) $\vec{e}_x \times (\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \vec{e}_z - \vec{e}_y, \qquad (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$

c) $(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = -2\,\vec{e}_z$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$ – Alternativgesetz

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ – Distributivgesetz

$\lambda\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\,\vec{b})$ – Multiplikation mit einer reellen Zahl

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Vektorprodukt der Vektoren ***a*** und ***b***

$a)\ \vec{a} = (1,\ 2,\ -1),\qquad \vec{b} = (0,\ 1,\ -1)$

$b)\ \vec{a} = (1,\ 0,\ -1),\qquad \vec{b} = (0,\ 1,\ 1)$

$c)\ \vec{a} = (1,\ 2,\ -3),\qquad \vec{b} = (2,\ 0,\ -4)$

$d)\ \vec{a} = (1,\ -2,\ 0),\qquad \vec{b} = (0,\ 1,\ -3)$

$e)\ \vec{a} = (1,\ -2,\ 0),\qquad \vec{b} = (1,\ 1,\ 0)$

Aufgabe 2:

Gegeben sind zwei nicht kollineare Vektoren ***a*** und ***b***

$a)\ \vec{a} = (3,\ 2,\ 0),\qquad \vec{b} = (0,\ -1,\ -1)$

$b)\ \vec{a} = (0,\ -2,\ 3),\qquad \vec{b} = (0,\ -2,\ 0)$

$c)\ \vec{a} = (0,\ -2,\ 4),\qquad \vec{b} = (6,\ -3,\ 0)$

Gesucht sind alle Vektoren, die zu ***a*** und ***b*** orthogonal sind.

$a)\ \ \vec{a} = (1,\ 2,\ -1),\qquad \vec{b} = (0,\ 1,\ -1),\qquad \vec{a}\times\vec{b} = (-1,\ 1,\ 1)$

$b)\ \ \vec{a} = (1,\ 0,\ -1),\qquad \vec{b} = (0,\ 1,\ 1),\qquad \vec{a}\times\vec{b} = (1,\ -1,\ 1)$

$c)\ \ \vec{a} = (1,\ 2,\ -3),\qquad \vec{b} = (2,\ 0,\ -4),\qquad \vec{a}\times\vec{b} = (-8,\ -2,\ -4)$

$d)\ \ \vec{a} = (1,\ -2,\ 0),\qquad \vec{b} = (0,\ 1,\ -3),\qquad \vec{a}\times\vec{b} = (6,\ 3,\ 1)$

$e)\ \ \vec{a} = (1,\ -2,\ 0),\qquad \vec{b} = (1,\ 1,\ 0),\qquad \vec{a}\times\vec{b} = (0,\ 0,\ 3)$

$$a)\quad L = \left\{ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b)\quad L = \left\{ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$c)\quad L = \left\{ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} = 12\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Betrag des Vektorprodukts entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich die Fläche des Parallelogramms entsprechend des Winkels zwischen den Vektoren ändert.

$$| \vec{a} | = 3, \qquad | \vec{b} | = 2$$

1) $\varphi = 30^\circ$, 2) $\varphi = 45^\circ$, 3) $\varphi = 60^\circ$, 4) $\varphi = 90^\circ$,

5) $\varphi = 120^\circ$, 6) $\varphi = 135^\circ$

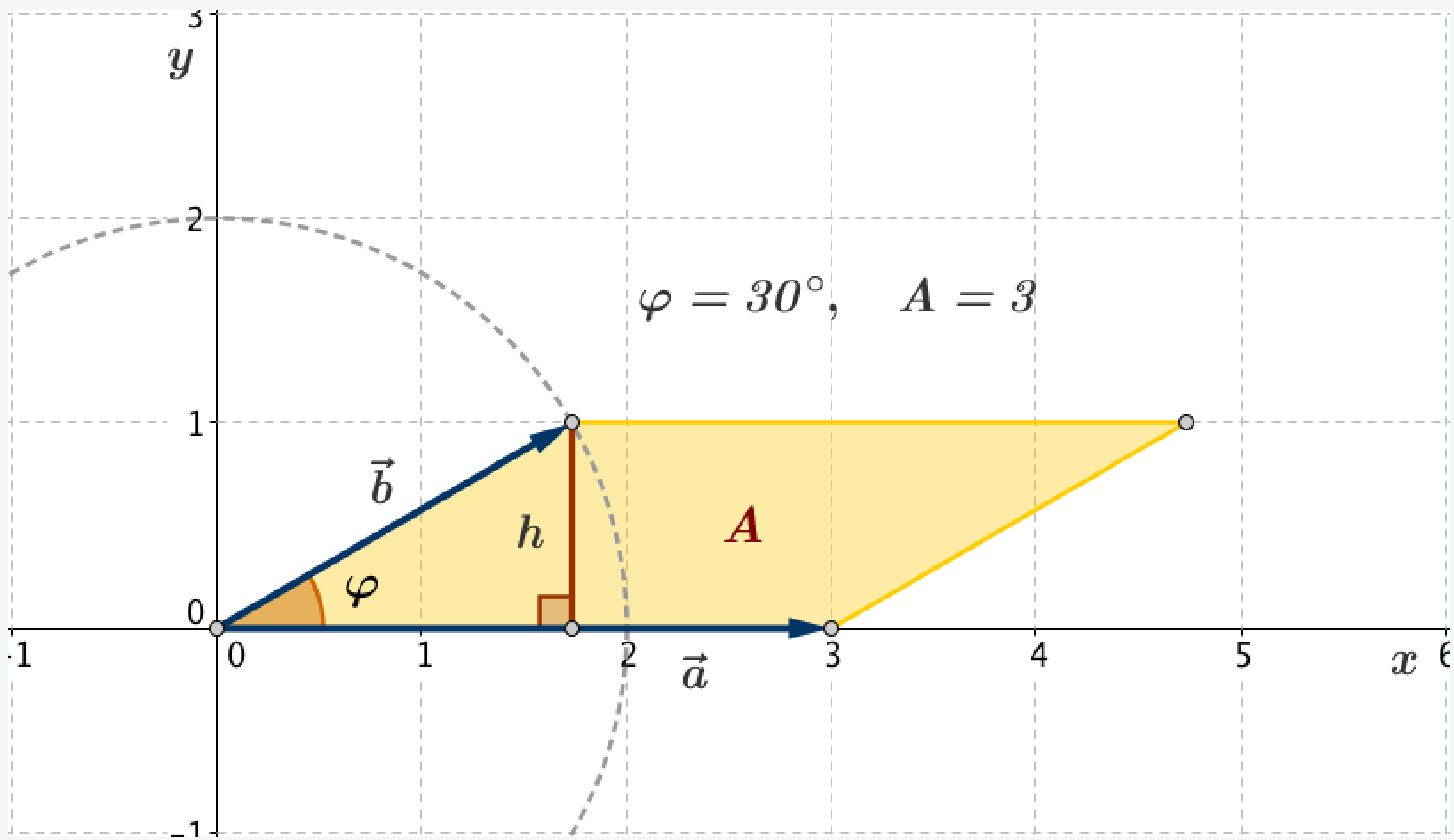

*Abb. B1-1: Zum Begriff des Vektorproduktes zweier Vektoren. Flächeninhalt des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms*

$$A = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \sin\varphi = 6 \cdot \sin\varphi = 3\,(\mathrm{FE}), \qquad \varphi = 30^\circ, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$$

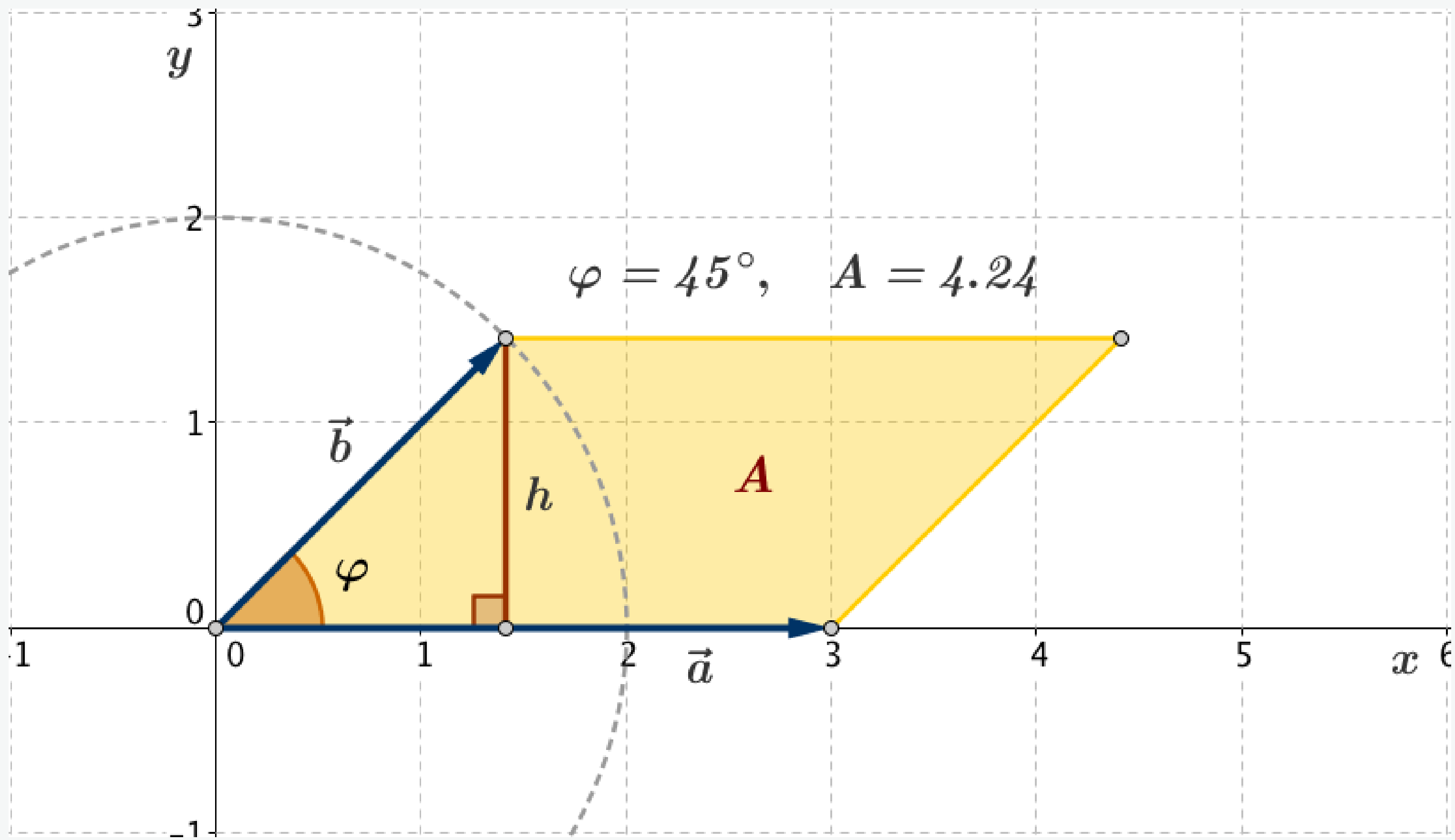

*Abb. B1-2: Flächeninhalt des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms*

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 6 \cdot \sin\varphi \simeq 4.24\,(\mathrm{FE}), \qquad \varphi = 45^\circ, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

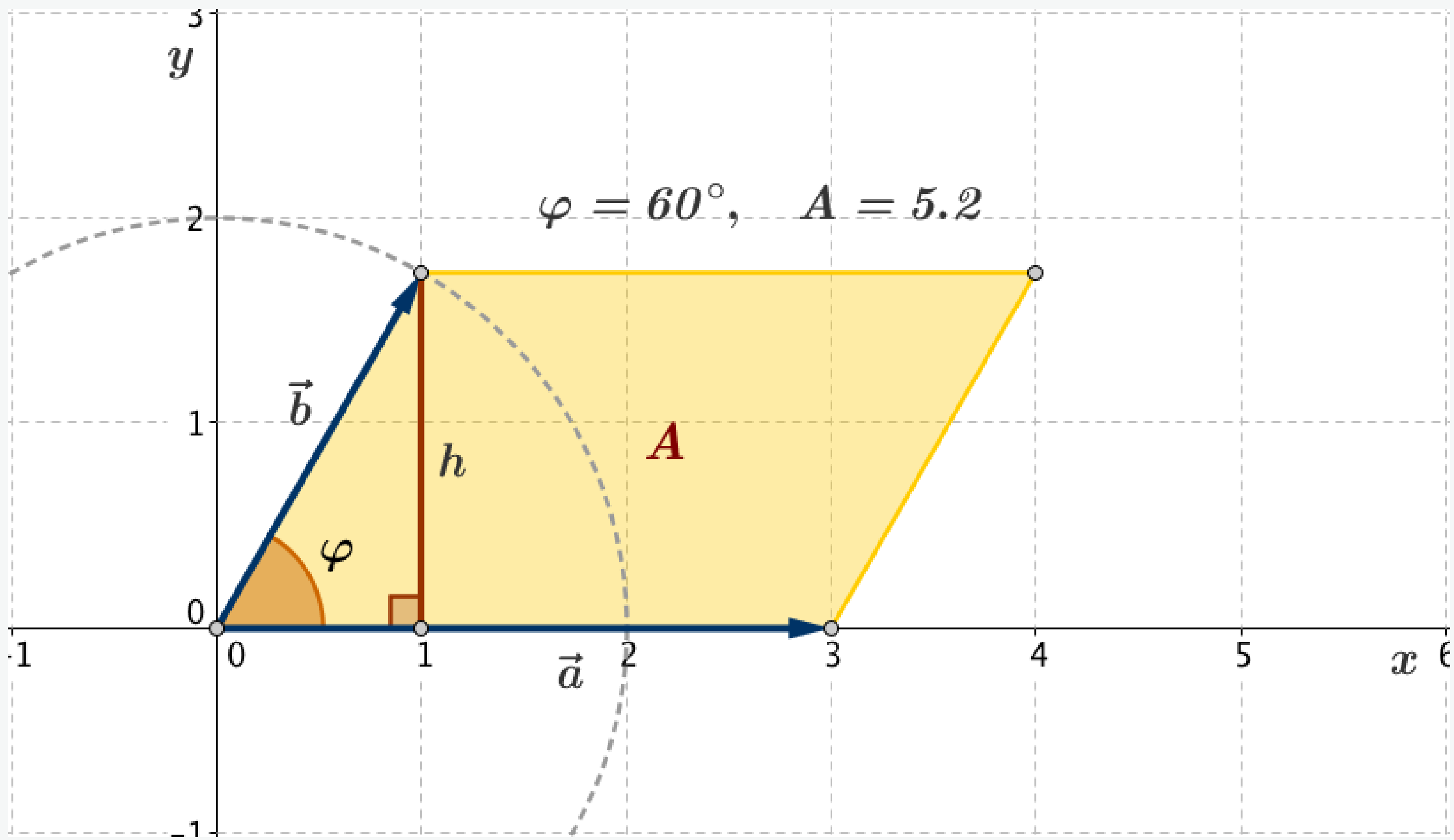

*Abb. B1-3: Flächeninhalt des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms*

$$A = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \sin\varphi = 6 \cdot \sin\varphi \simeq 5.2\,(\mathrm{FE}), \qquad \varphi = 60^\circ, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

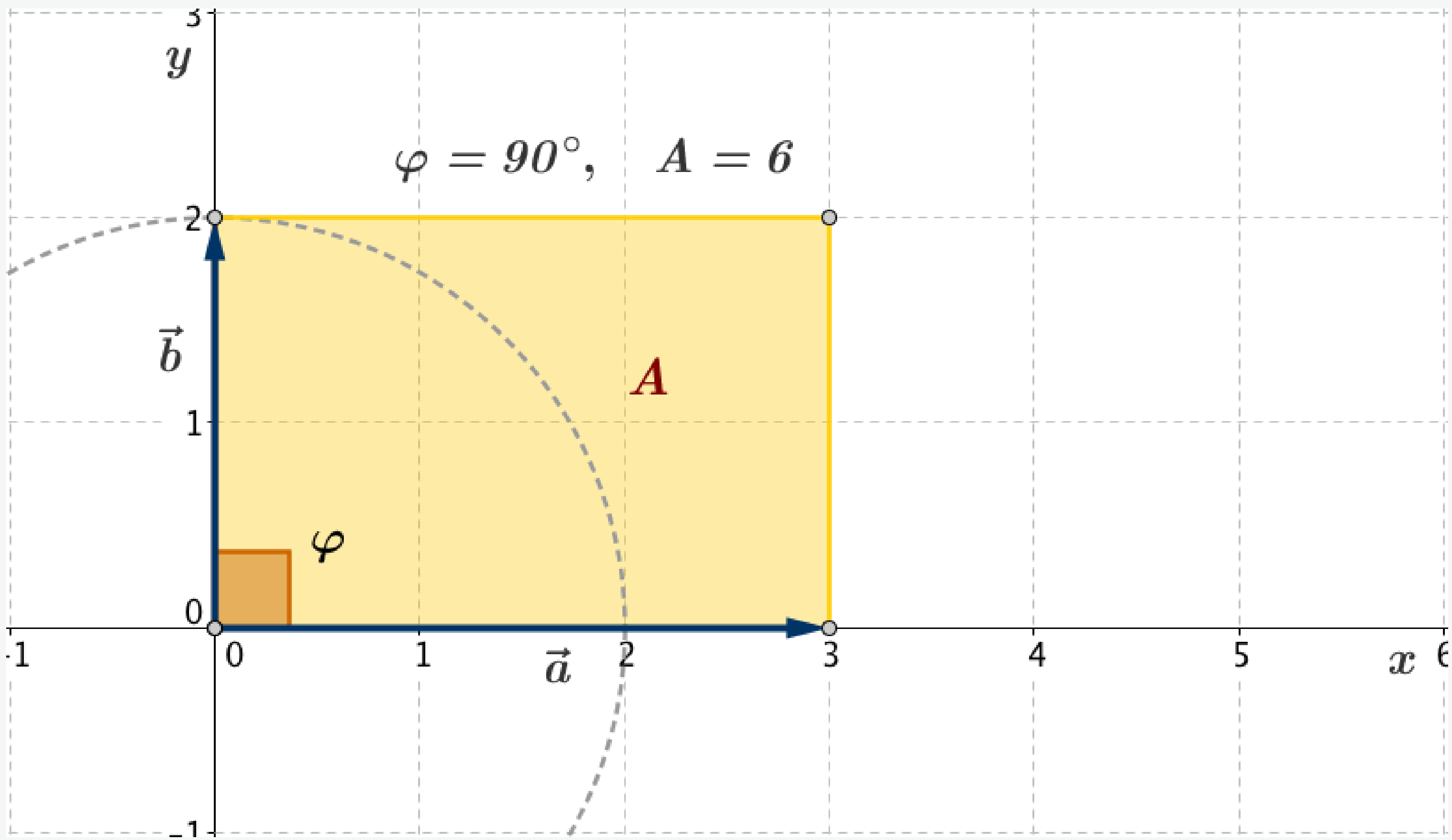

*Abb. B1-4: Flächeninhalt des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms*

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 6 \cdot \sin\varphi = 6\,(\mathrm{FE}), \qquad \varphi = 90^\circ, \quad \sin\varphi = 1$$

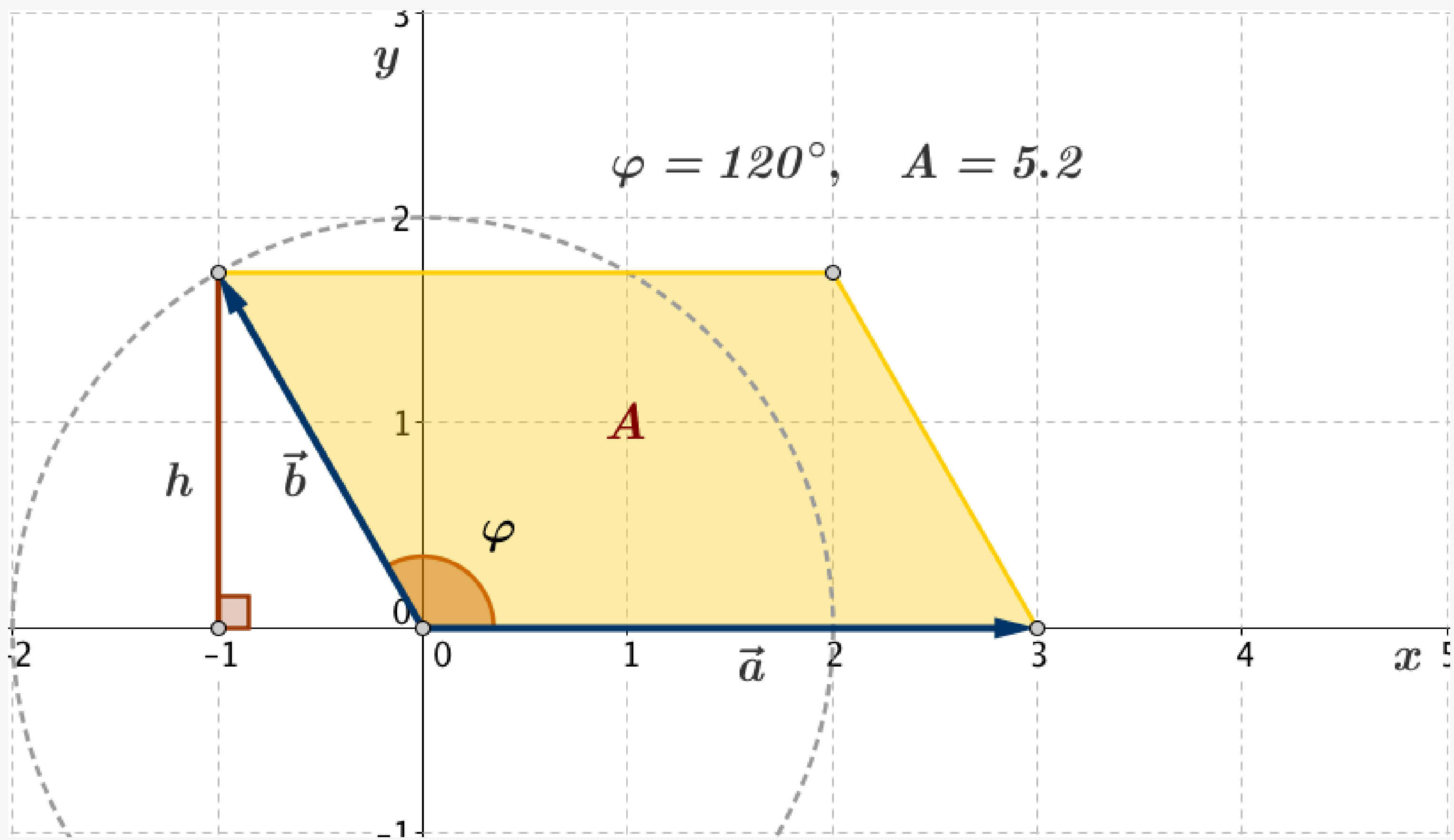

*Abb. B1-5: Flächeninhalt des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms*

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 6 \cdot \sin\varphi \simeq 5.2 \;(\mathrm{FE}), \qquad \varphi = 120°, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

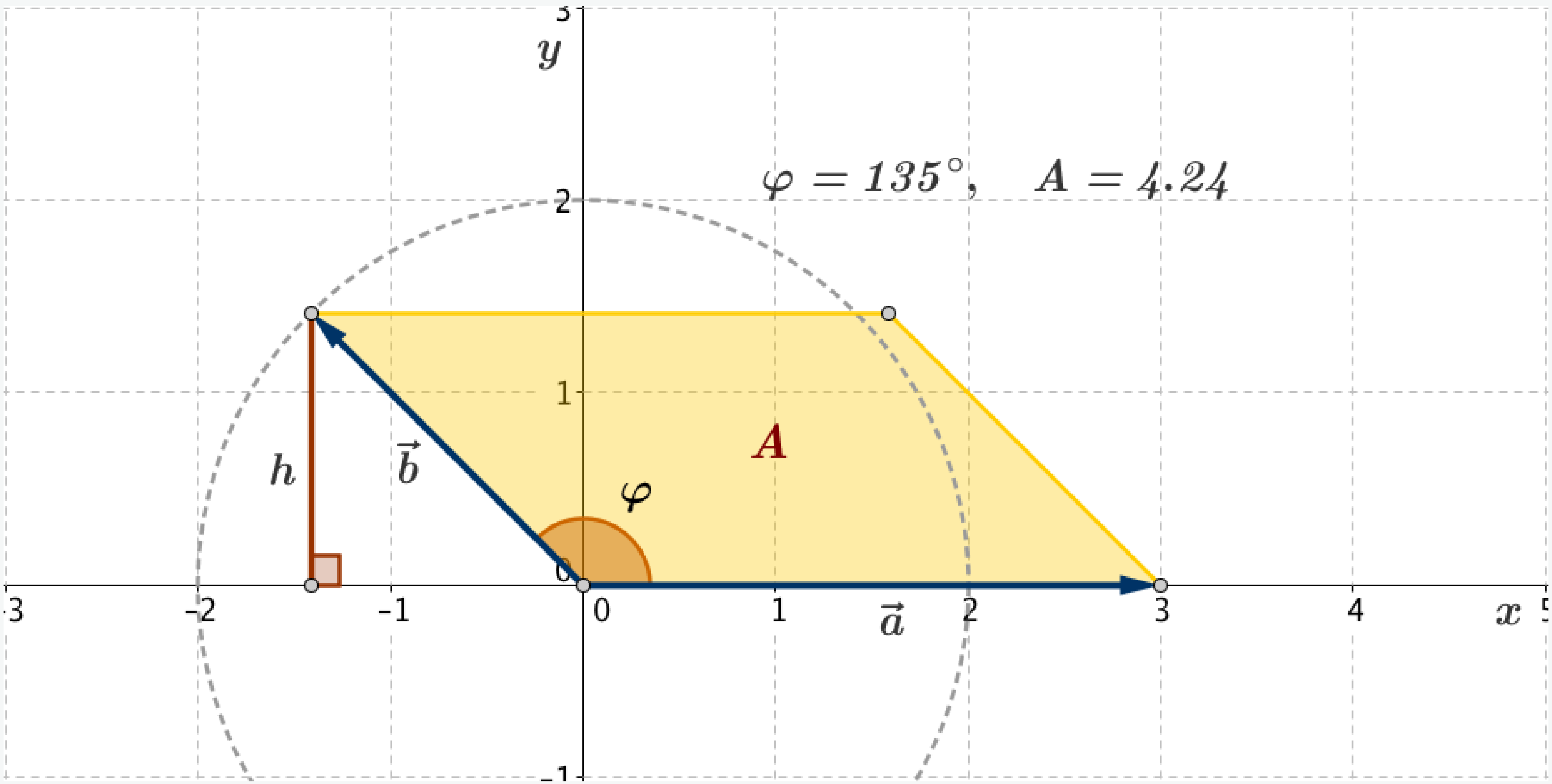

*Abb. B1-6: Flächeninhalt des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms*

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 6 \cdot \sin\varphi \simeq 4.24 \ (\mathrm{FE}), \qquad \varphi = 135^\circ, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen sie den Flächeninhalt des von den Vektoren ***a*** und ***b*** aufgespannten Parallelogramms:

$a)\quad \vec{a} = (3,\ 2,\ 0), \qquad \vec{b} = (0,\ -1,\ -1)$

$b)\quad \vec{a} = (4,\ 0,\ 0), \qquad \vec{b} = (2,\ 2,\ 0)$

Aufgabe 4:

Gegeben ist das Dreieck ABC. Bestimmen Sie einen Vektor ***a*** so, dass er auf der Dreiecksfläche senkrecht steht und den Betrag 1 hat

$a)\quad A = (1,\ 1,\ 0), \qquad B = (3,\ 2,\ 2), \qquad C = (-3,\ -1,\ 2)$

$b)\quad A = (2,\ 3,\ 4), \qquad B = (3,\ 4,\ 5), \qquad C = (-1,\ 2,\ 3)$

$c)\quad A = (-2,\ 1,\ -4), \qquad B = (1,\ -2,\ 1), \qquad C = (-1,\ -2,\ -3)$

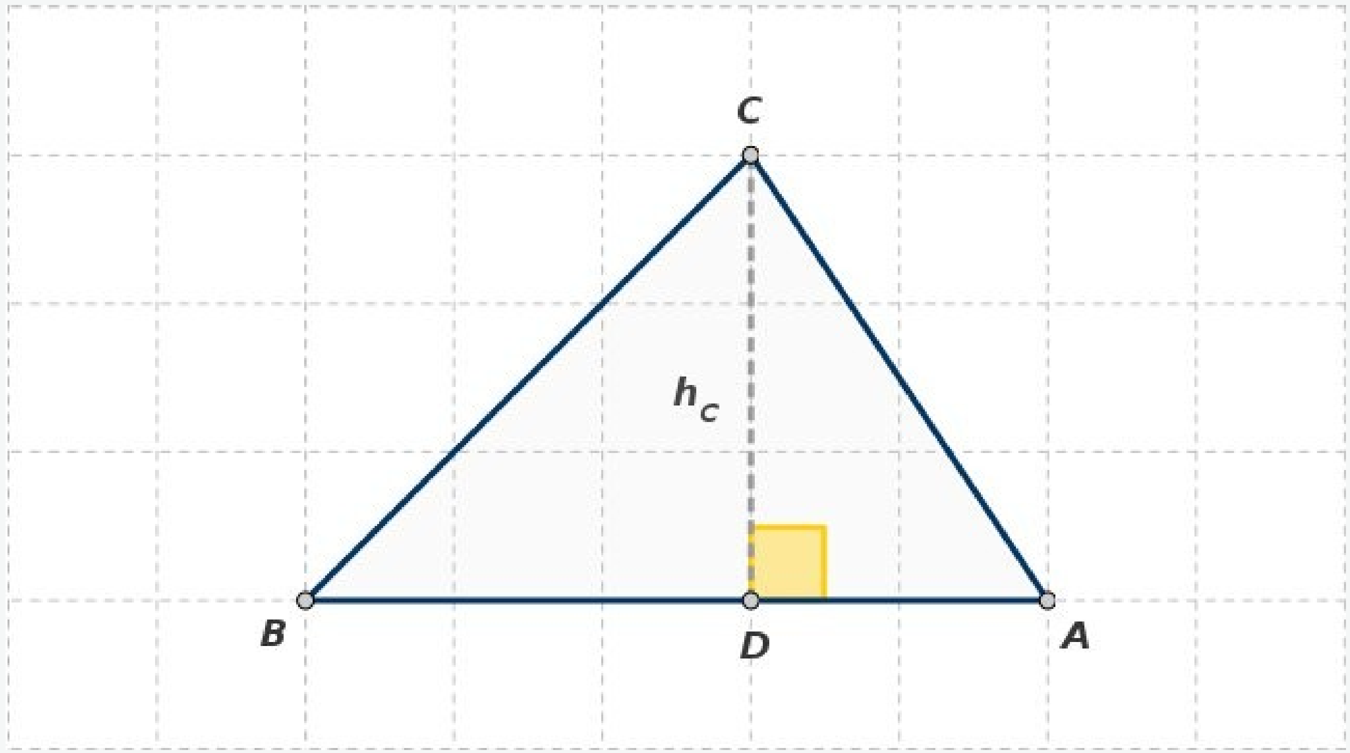

Abb. A5: Zur Aufgabe 5

Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie die Höhe CD (Lot von C auf die Seite $[AB]$)

$$A = (2,\ 3,\ -6)\,, \quad B = (6,\ 4,\ 4)\,, \quad C = (3,\ 7,\ 4)$$

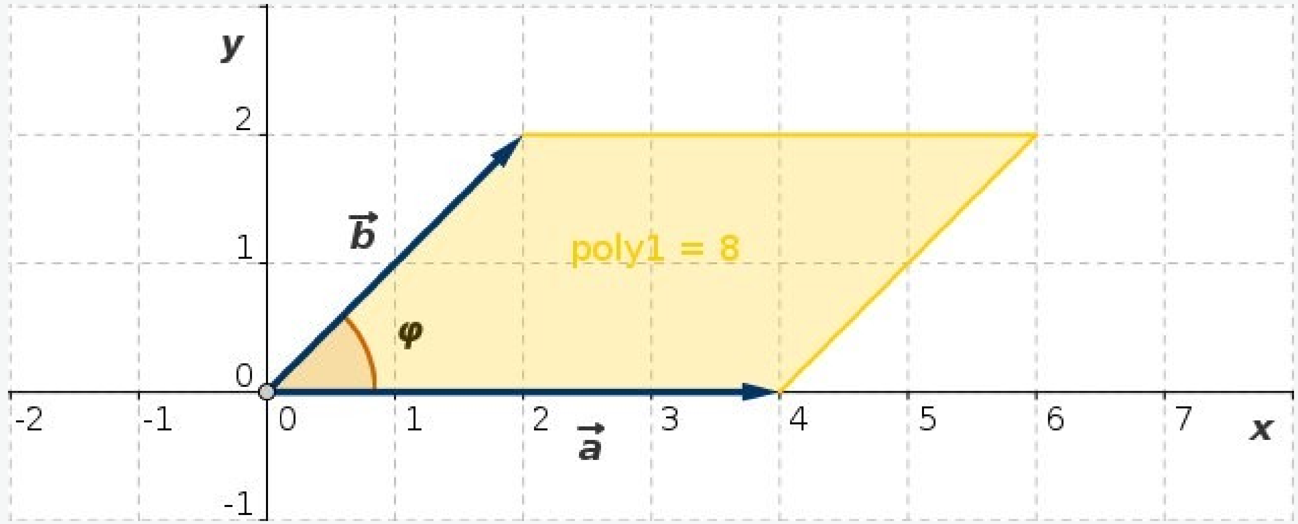

Abb. L3: Graphische Darstellung zur Lösung der Aufgabe 3b

$$a)\quad \vec{a} = (3,\ 2,\ 0)\,, \qquad \vec{b} = (0,\ -1,\ -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-2,\ 3,\ -3)$$

$$F = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = \sqrt{22} \simeq 4.69\ \text{FE}$$

$$b)\quad \vec{a} = (4,\ 0,\ 0)\,, \qquad \vec{b} = (2,\ 2,\ 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0,\ 0,\ 8) = 8\,(0,\ 0,\ 1)$$

$$F = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = 8\ \text{FE}$$

$a)\quad A = (1,\ 1,\ 0), \qquad B = (3,\ 2,\ 2), \qquad C = (-3,\ -1,\ 2)$

$$\overrightarrow{AB} = (2,\ 1,\ 2), \qquad \overrightarrow{AC} = (-4,\ -2,\ 2)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,\ -12,\ 0) = 6\,(1,\ -2,\ 0)$$

$$|\,\vec{u}\,| = 6\sqrt{1^2 + (-2)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$\vec{a}_{1,2} = \pm\frac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|}, \qquad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1,\ -2, 0), \qquad \vec{a}_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,(1,\ -2, 0)$$

$b)\quad A = (2,\ 3,\ 4), \qquad B = (3,\ 4,\ 5), \qquad C = (-1,\ 2,\ 3)$

$$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 1), \qquad \overrightarrow{AC} = (-3,\ -1,\ -1)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,\ -2,\ 2) = 2\,(0,\ -1,\ 1)$$

$$|\,\vec{u}\,| = 2\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{a}_{1,2} = \pm\frac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|}, \qquad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\ -1, 1), \qquad \vec{a}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\ -1, 1)$$

c) $A = (-2,\ 1,\ -4)\,, \qquad B = (1,\ -2,\ 1)\,, \qquad C = (-1,\ -2,\ -3)$

$$\overrightarrow{AB} = (3,\ -3,\ 5)\,, \qquad \overrightarrow{AC} = (1,\ -3,\ 1)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12,\ 2,\ -6) = 2\,(6,\ 1,\ -3)$$

$$|\,\vec{u}\,| = 2\sqrt{46}$$

$$\vec{a}_{1,\,2} = \pm\,\frac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|}\,, \qquad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{46}}\,(6,\ 1, -3) \simeq (0.885,\ 0.147,\ -0.442)$$

$$\vec{a}_2 = -\,\frac{1}{\sqrt{46}}\,(6,\ 1, -3) \simeq -(0.885,\ 0.147,\ -0.442)$$

$$A = (2,\ 3,\ -6)\,, \quad B = (6,\ 4,\ 4)\,, \quad C = (3,\ 7,\ 4)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|, \quad \overrightarrow{AB} = (4,\ 1,\ 10)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (1,\ 4,\ 10)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 1 & 10 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 15\,(-2,\ -2,\ 1)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,| = \frac{15}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{45}{2} = 22.5 \ \text{FE}$$

$$|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,| = |\,AB\,| \cdot |\,AC\,| \sin\varphi\,, \qquad \sin\varphi = \frac{|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|}{|\,AB\,| \cdot |\,AC\,|}$$

$$h_c = |\,AC\,| \sin\varphi = |\,AC\,| \frac{|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|}{|\,AB\,| \cdot |\,AC\,|} = \frac{|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|}{|\,AB\,|} =$$

$$= \frac{45}{\sqrt{117}} \simeq \frac{45}{10.82} \simeq 4.16 \ \text{LE}$$