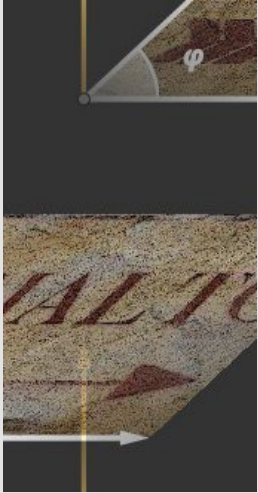


Vektorprodukt: Aufgaben



Aufgabe 6:

Bestimmen Sie folgendes Vektorprodukt $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ und erklären Sie die geometrische Bedeutung.

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie folgende Größen

$$a) (\vec{a} \times \vec{b})^2, \quad b) ((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}))^2$$

$$\text{wenn } |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Aufgabe 8:

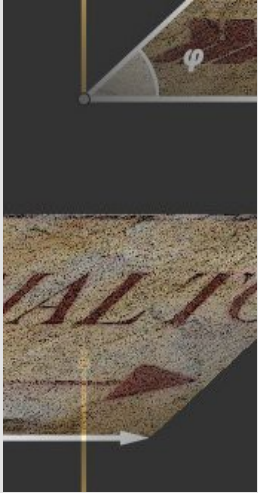
Bestimmen Sie folgende Größen

$$a) |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|, \quad b) |(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$$

wenn

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Vektorprodukt: Aufgabe 9



Berechnen Sie folgende Vektorprodukte mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b}, \quad b) \frac{1}{3} \vec{a} \times \vec{c}, \quad c) \vec{a} \times \vec{e}$$

$$d) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}, \quad e) \vec{d} \times \vec{e} + \vec{b} \times \vec{e}$$

$$f) |\vec{b}|, \quad |\vec{e}|, \quad |\vec{d} \times \vec{e}|, \quad |(\vec{b} + \vec{e}) \times \vec{e}|$$

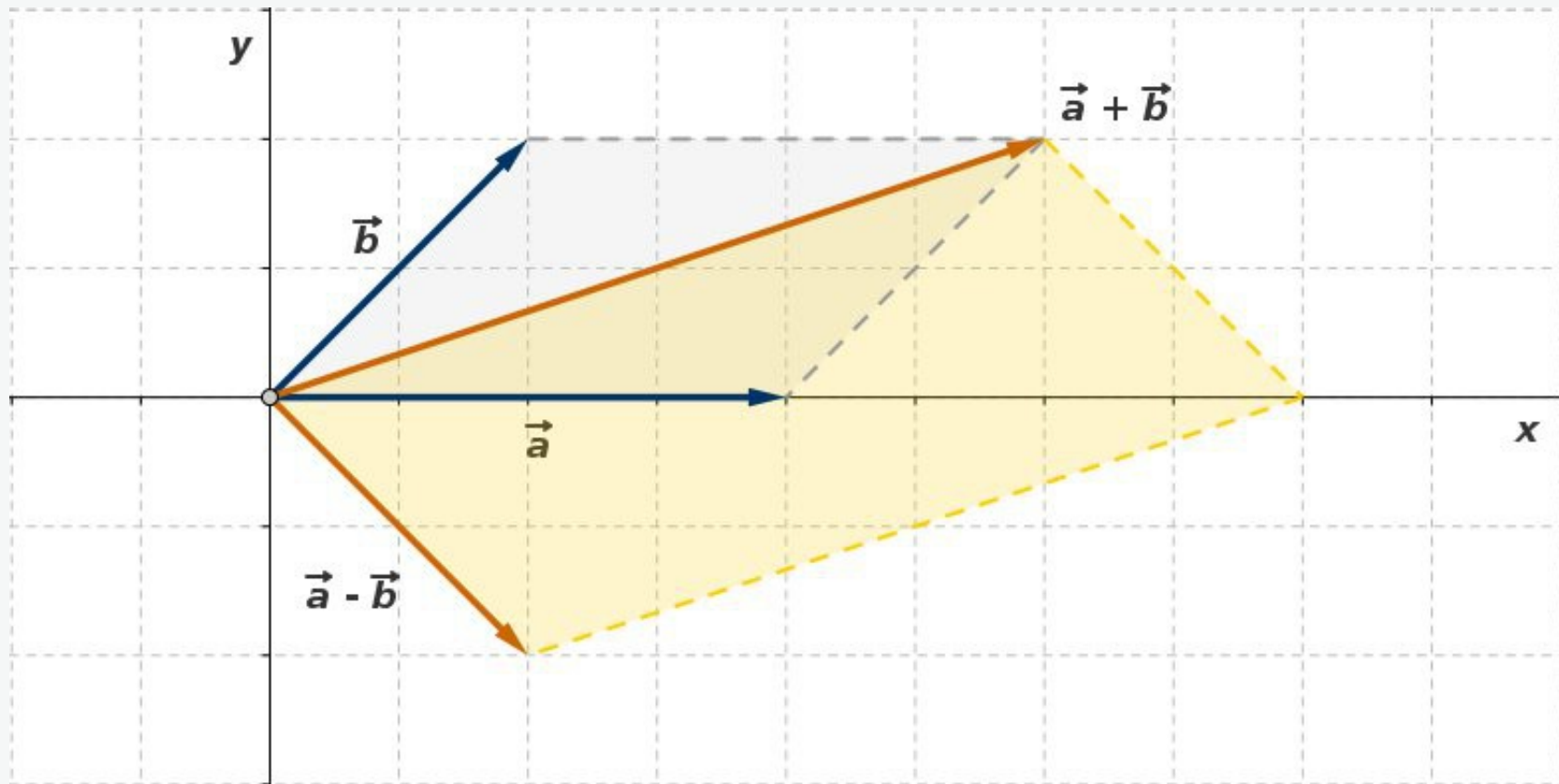


Abb. L6: Zur geometrischen Interpretation des Vektorprodukts $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b} = \\
 &= -\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{b})
 \end{aligned}$$

Das von $(\vec{a} + \vec{b})$ und $(\vec{a} - \vec{b})$ aufgespannte Parallelogramm ist doppelt so gross wie das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte

Lösung 7:

$$\begin{aligned} a) \quad (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = \\ &= \left| |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right|^2 = \left| 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = 3 \end{aligned}$$

$$b) \quad ((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}))^2 = |3(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 9 |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 27$$

Lösung 8:

$$a) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b} = 2(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$|\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \sin \alpha = 12$$

$$|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |2(\vec{b} \times \vec{a})| = 24$$

$$b) \quad |(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})| = 5 |\vec{a} \times \vec{b}| = 60$$

$$a) \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b) \frac{1}{3} \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c) \vec{a} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e) \vec{d} \times \vec{e} + \vec{b} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f) |\vec{b}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{e}| = 1, \quad |\vec{d} \times \vec{e}| = 2$$

$$|(\vec{b} + \vec{e}) \times \vec{e}| = |\vec{b} \times \vec{e}| = 1$$