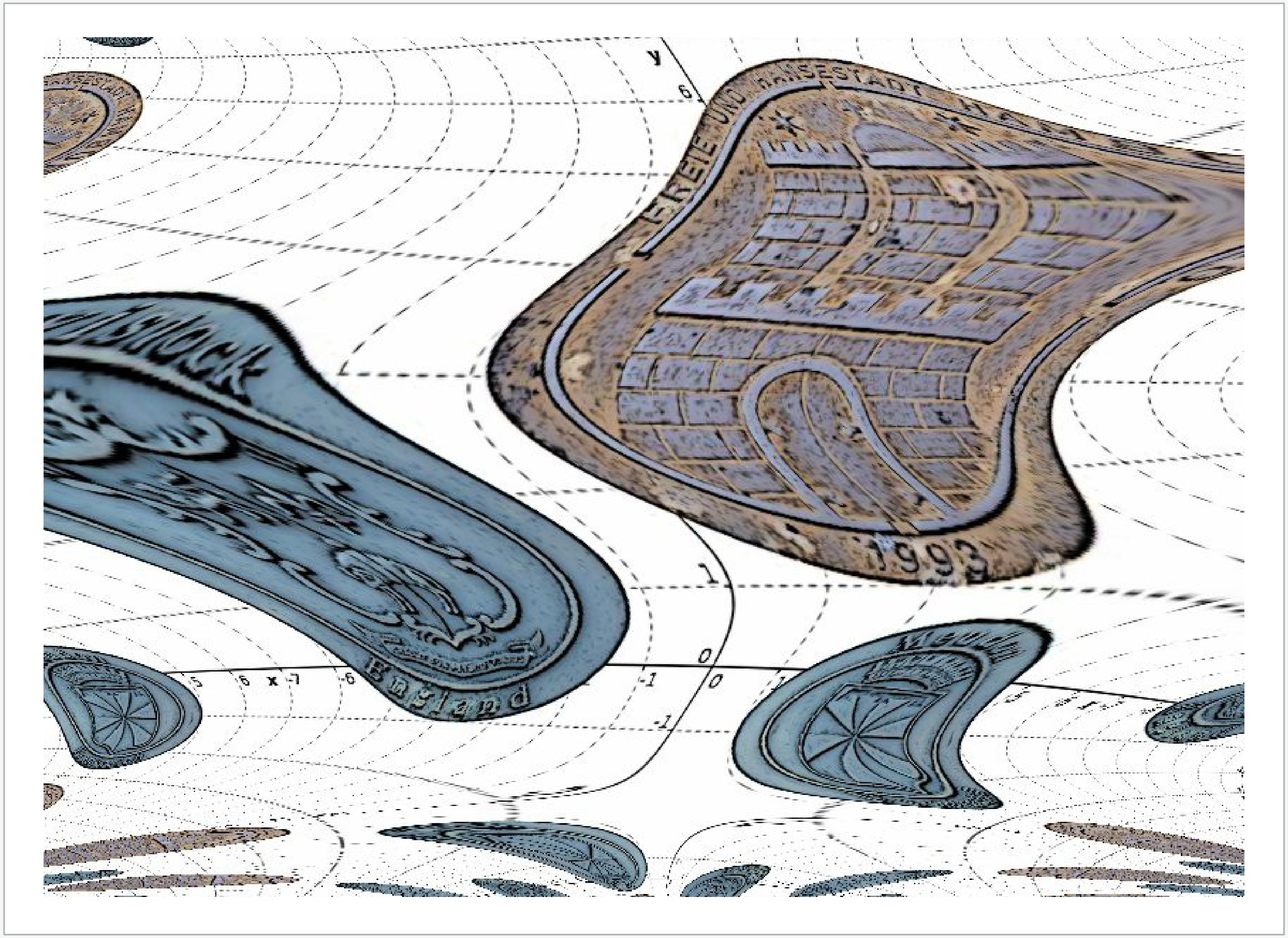
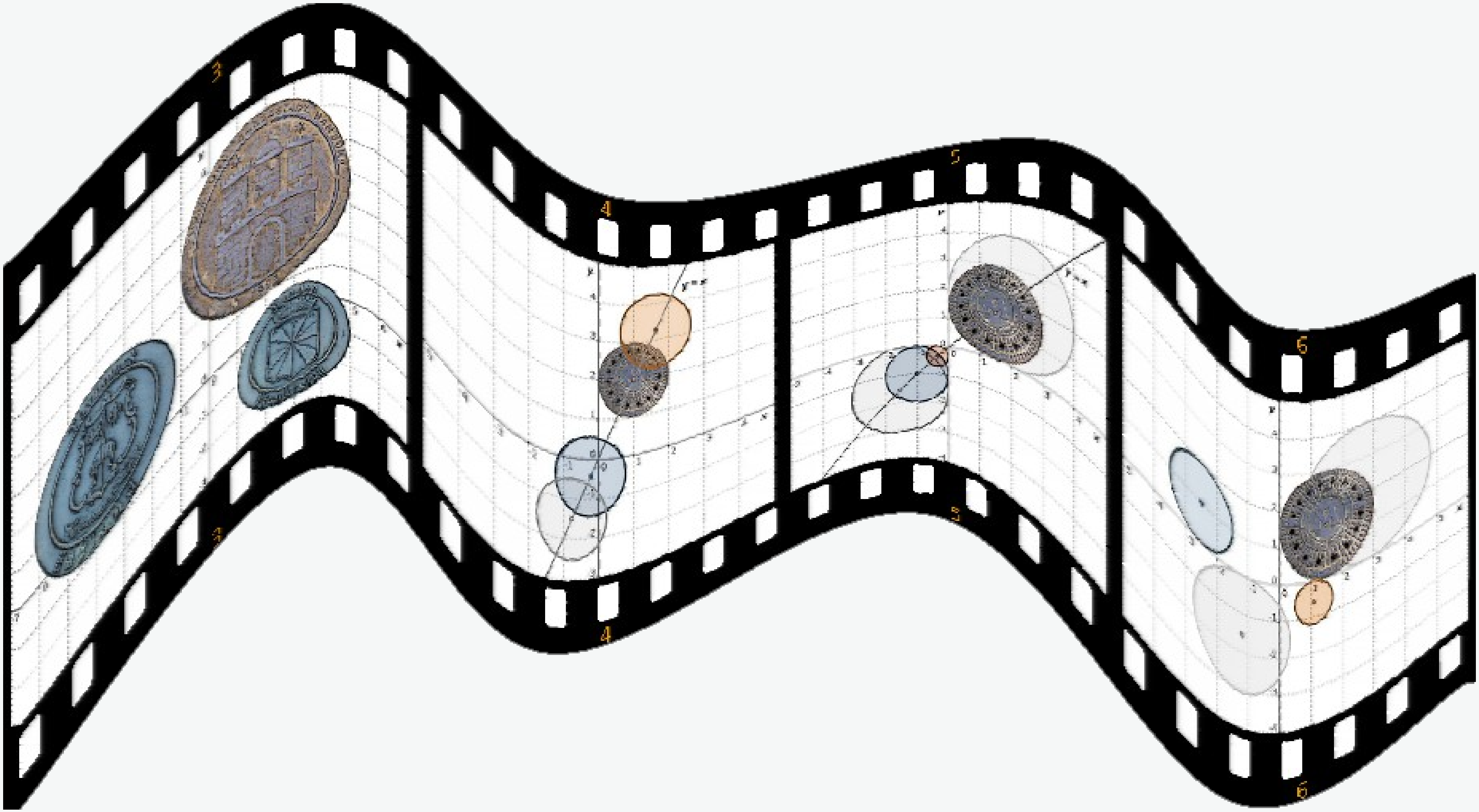



*Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar*



Um eine DGL zu erstellen, die eine gegebene Gleichung

$$F\,(x\,,\,y\,,\,C_1\,,\,C_2\,,\,\ldots\,,\,C_n) = 0$$

für eine Kurvenschar erfüllt, wird die Gleichung $n$ mal differenziert

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,y'^{\,2} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y'' = 0$$

. . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y}\,y^{\,n} = 0$$

$y = y\,(x)$ ist eine $n$ mal differenzierbare Funktion.

Es folgen Erklärungen anhand von Beispielen.

$$x^2 + C\, y^2(x) - 2\, y(x) = 0$$

Wir zeichnen einige Kurven, die bestimmten Werten von $C$ entsprechen:

*Abbildung 1-1:*

$$(c) \qquad C = 1: \quad x^2 + y^2 - 2\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$(e_1) \qquad C = \frac{1}{2}: \quad x^2 + \frac{1}{2}\, y^2 - 2\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}\, (y - 2)^2 = 2$$

$$(e_2) \qquad C = 2: \quad x^2 + 2\, y^2 - 2\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$(e_3) \qquad C = 3: \quad x^2 + 3\, y^2 - 2\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

*Abbildung 1-2:*

$$(h_1) \qquad C = -1: \quad x^2 - y^2 - 2\, y = 0$$

$$(h_2) \qquad C = -2: \quad x^2 - 2\, y^2 - 2\, y = 0$$

$$(h_3) \qquad C = -5: \quad x^2 - 5\, y^2 - 2\, y = 0$$

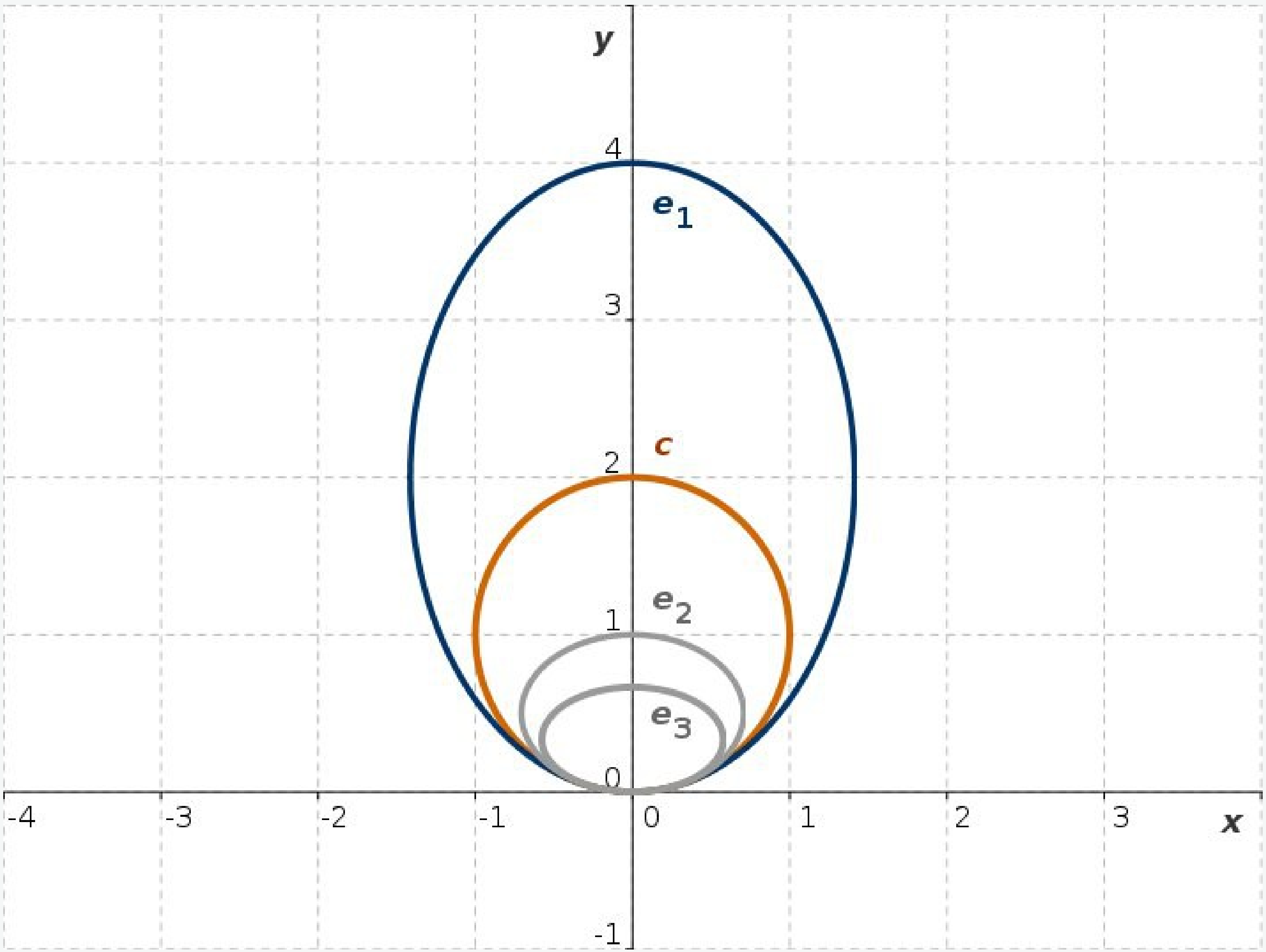



*Abb. 1-1: Einige Kurven der Gleichung F (x, C) = 0*

$$F(x, C) = x^2 + C\,y^2(x) - 2\,y(x)$$

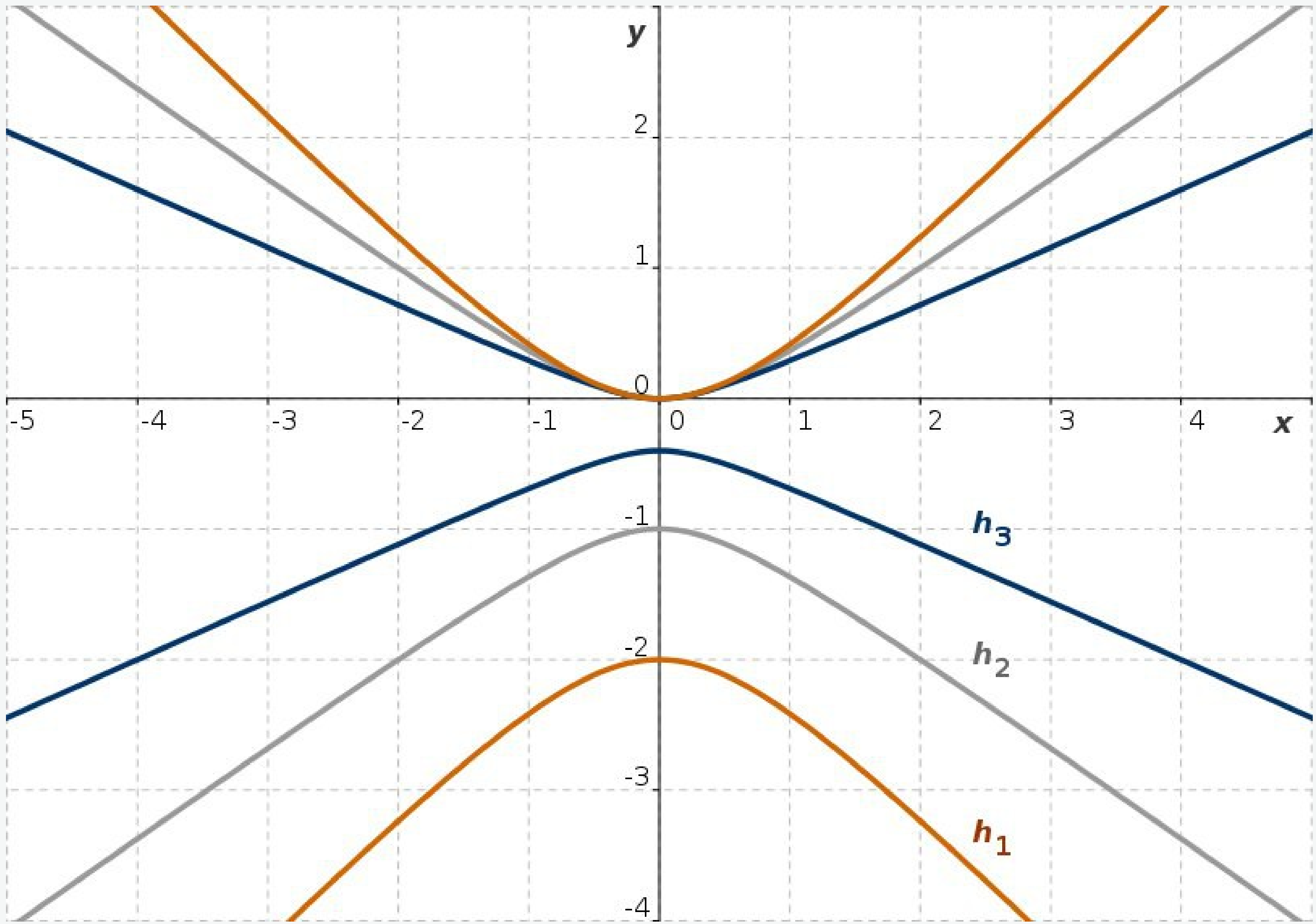



*Abb. 1-2: Einige Kurven der Gleichung F (x, C) = 0*

$$F(x, C) = x^2 + C\, y^2(x) - 2\, y(x)$$

$$F(x, C) = x^2 + C\,y^2(x) - 2\,y(x)$$

$$\frac{d\,F(x, C)}{dx} = 2\,x + 2\,C\,y(x)\,y'(x) - 2\,y'(x) = 0$$

$$x + C\,y(x)\,y'(x) - y'(x) = 0$$

$$C = \frac{y' - x}{y\,y'}, \qquad y\,y' \neq 0$$

$$C \quad \text{in} \quad x^2 + C\,y^2 - 2\,y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{y' - x}{y\,y'} \cdot y^2 - 2\,y = 0, \qquad x^2 + \frac{y}{y'}\,(y' - x) - 2\,y = 0$$

$$(x^2 - y)\,y' - x\,y = 0$$

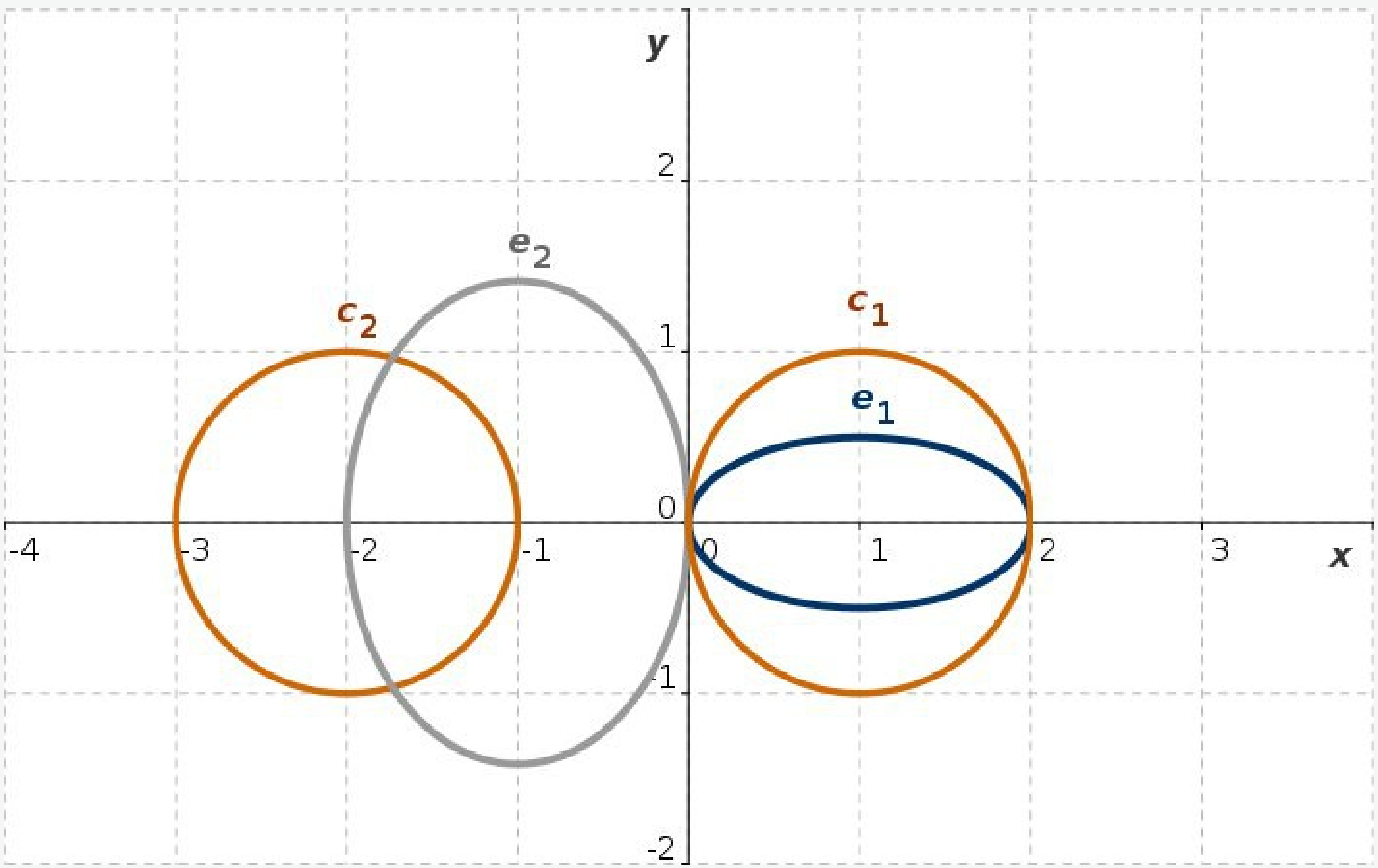



*Abb. 2: Einige Kurven der Gleichung F (x, C) = 0*

$$(x - C_1)^2 + C_2\, y^2 = 1, \qquad F(x, C) = (x - C_1)^2 + C_2\, y^2 - 1 = 0$$

$$c_1: \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 1, \qquad\qquad c_2: \quad C_1 = -2, \quad C_2 = 1$$

$$e_1: \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 4, \qquad\qquad e_2: \quad C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

$$F(x, C) = (x - C_1)^2 + C_2\, y^2(x) - 1 = 0$$

$$\frac{d\, F(x, C)}{dx} = 2\,(x - C_1) + 2\, C_2\, y(x)\, y'(x) = 0$$

$$x - C_1 + C_2\, y\, y' = 0$$

$$\frac{d^2 F(x, C)}{dx^2} = 1 + C_2 \left[ (y')^2 + y\, y'' \right] = 0, \qquad C_2 = -\frac{1}{(y')^2 + y\, y''}$$

$$x - C_1 + C_2\, y\, y' = 0, \qquad x - C_1 - \frac{y\, y'}{(y')^2 + y\, y''} = 0$$

$$C_1 = x - \frac{y\, y'}{(y')^2 + y\, y''}$$

$$(x - C_1)^2 + C_2\, y^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left( \frac{y\, y'}{(y')^2 + y\, y''} \right)^2 - \frac{y^2}{(y')^2 + y\, y''} = 1 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\text{DGL}: \quad y^3\, y'' + \left( (y')^2 + y\, y'' \right)^2 = 0$$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie eine DGL aller Kreise einer Ebene.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine DGL, die alle Kreise mit Radius $R = 1$ beschreibt, deren Mittelpunkte auf der Geraden $y = 2x$ liegen.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine DGL aller Kreise, für die die $x$- und $y$-Achsen Tangenten sind und die im ersten und dritten Quadranten liegen.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine DGL aller Kreise, für die die $x$-Achse Tangente ist.

Die kanonische Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $R$ ist

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$

Für unsere Zwecke werden wir die Gleichung in folgende Form umschreiben:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2, \qquad x_M = C_1, \qquad y_M = C_2, \qquad R = C_3$$

Wir nehmen an, dass $y = y(x)$ eine dreimal differenzierbare Funktion ist und differenzieren dreimal die kanonische Gleichung des Kreises. Das erste Differenzieren gibt uns die Gleichung

$$x - C_1 + (y(x) - C_2)\, y'(x) = 0 \qquad \bullet$$

Das zweite Differenzieren ergibt die Gleichung:

$$1 + y'^2(x) + (y(x) - C_2)\, y''(x) = 0 \qquad \bullet\bullet$$

Das dritte Differenzieren – die Gleichung:

$$3\, y'(x)\, y''(x) + (y(x) - C_2)\, y'''(x) = 0 \qquad \bullet\bullet\bullet$$

Wir setzen den Term $y(x) - C_2$ von Gleichung ● ●

$$y - C_2 = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

in Gleichung ● ● ● ein

$$3\, y'\, y'' + (y - C_2)\, y''' = 0\,, \quad \Rightarrow \quad 3\, y'\, y'' - \frac{(1 + y'^2)}{y''}\, y''' = 0$$

Die DGL aller Kreisen der Ebene hat die Form:

$$3\, y'\, y''^2 - (1 + y'^2)\, y''' = 0$$

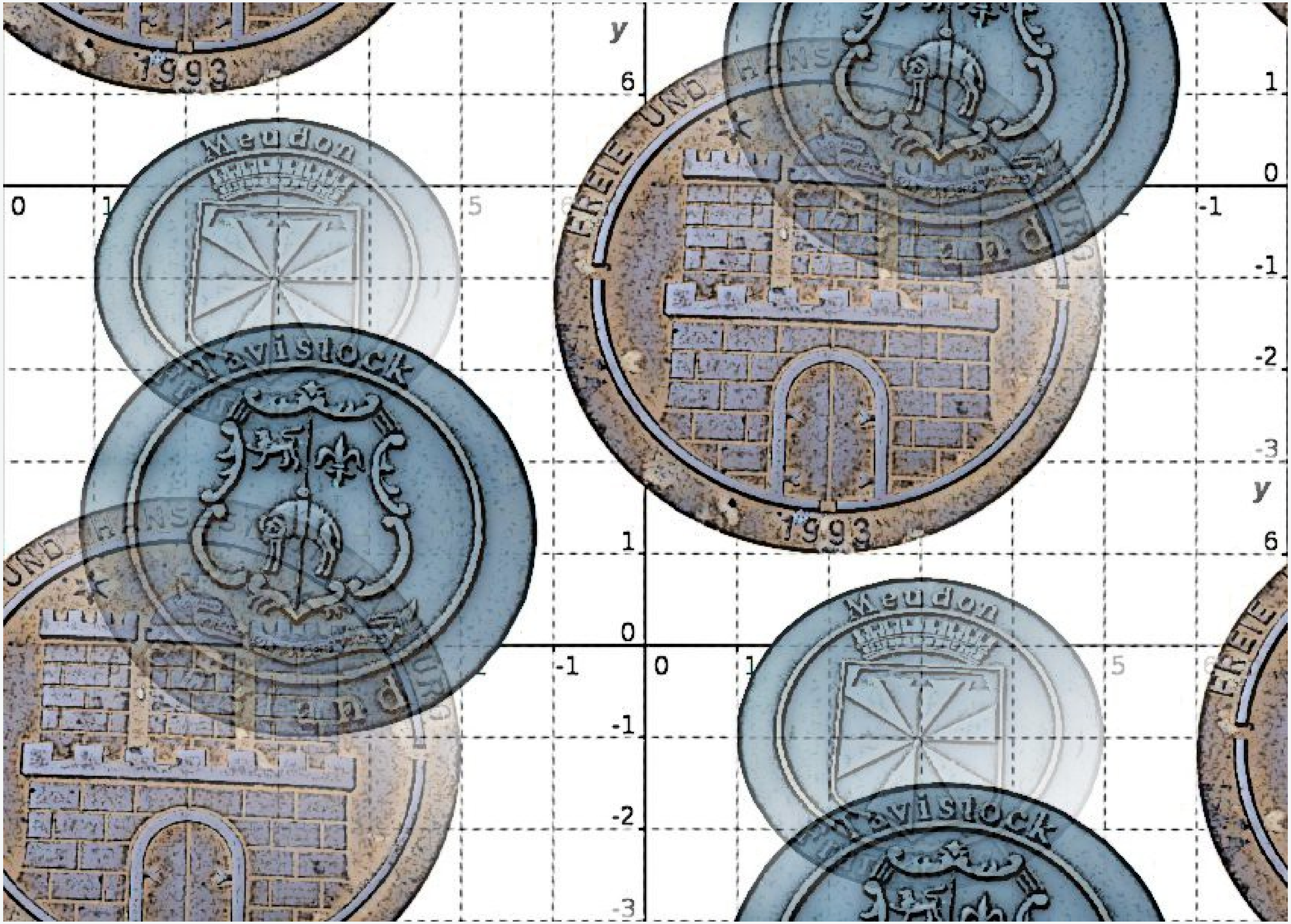



*Abb. L1: Eine Darstellung der Aufgabe*

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 2

Die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $M$ und Radius $R = 1$ ist

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = 1$$

Die Mittelpunkte aller Kreise liegen auf der Geraden $y = 2\,x$, d.h.

$$(x - x_M)^2 + (y - 2\,x_M)^2 = 1$$

oder

$$(x - C)^2 + (y(x) - 2\,C)^2 = 1, \qquad x_M = C$$

Das ist eine einparametrige Schar von Kreisen. Durch Differentiation ergibt sich aus dieser Gleichung:

$$x - C + (y(x) - 2\,C)\; y'(x) = 0, \qquad C = \frac{x + y\,y'}{1 + 2\,y'}$$

$$\left( x - \frac{x + y\,y'}{1 + 2\,y'} \right)^2 + \left( y - 2\,\frac{x + y\,y'}{1 + 2\,y'} \right)^2 = 1$$

$$(2\,x\,y' - y\,y')^2 + (y - 2\,x)^2 = (1 + 2\,y')^2$$

$$((2\,x - y)\,y')^2 + (y - 2\,x)^2 = (1 + 2\,y')^2$$

$$\Rightarrow \quad (2\,x - y)^2\,(1 + y'^2) = (1 + 2\,y')^2$$

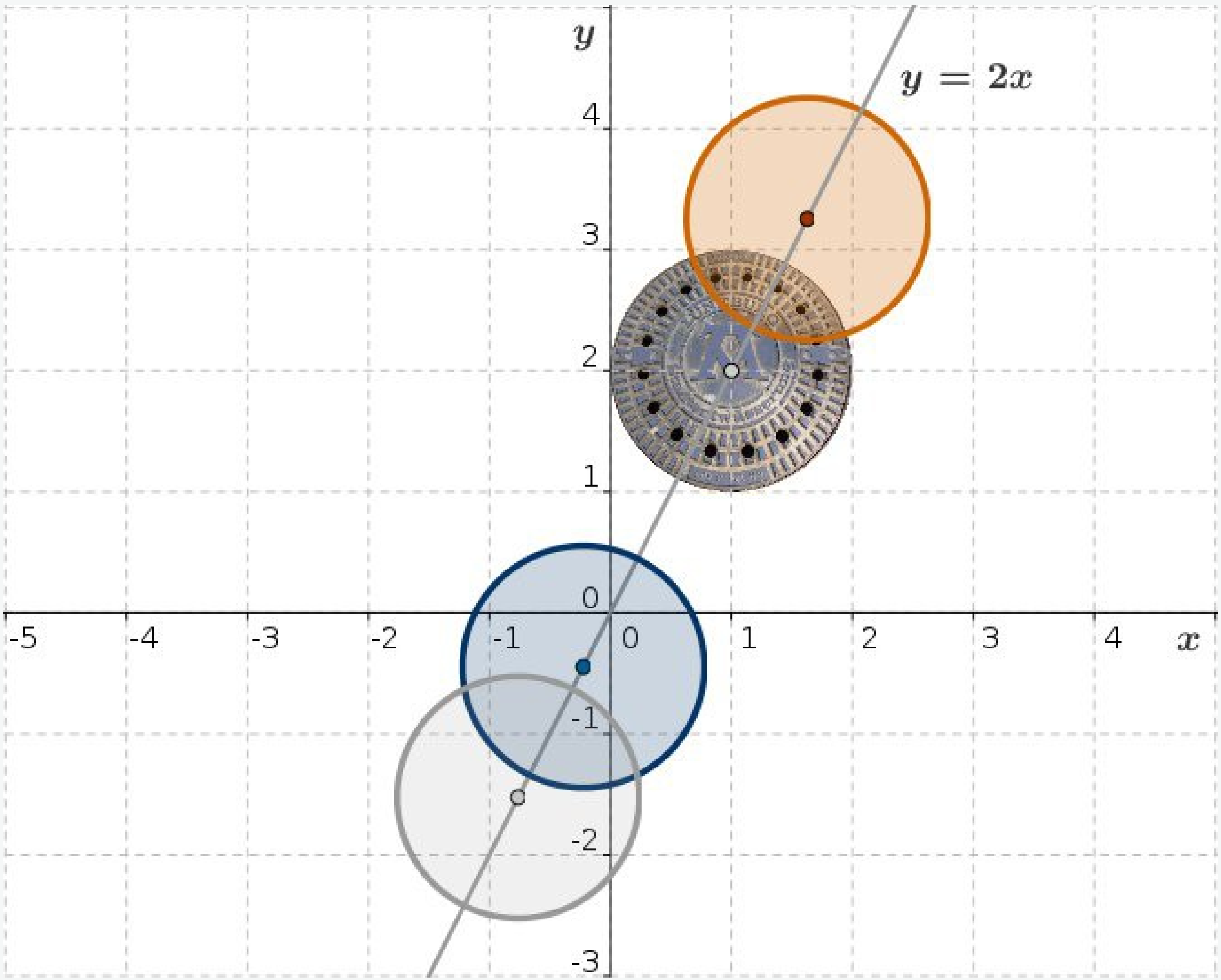



*Abb. L2: Eine Darstellung der Aufgabe*

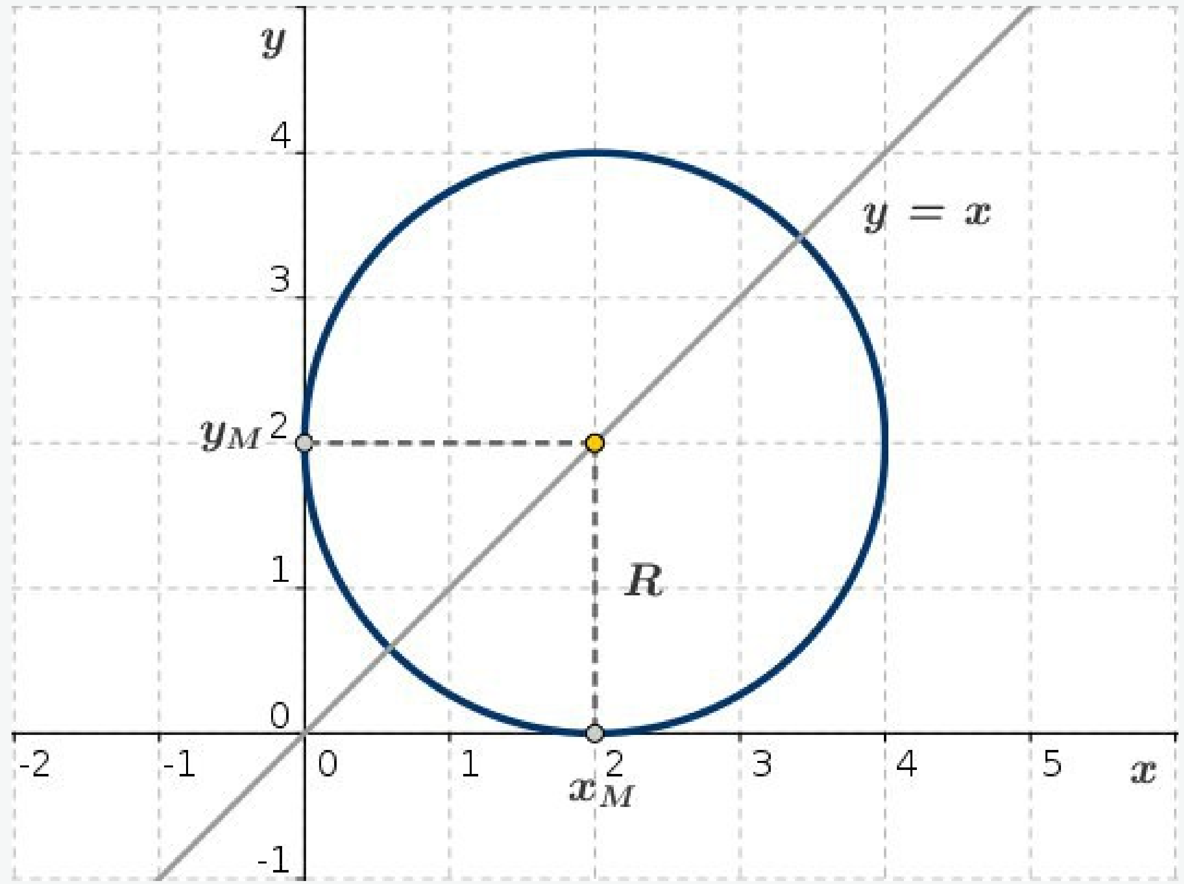



*Abb. L3-1: Zur Darstellung der Aufgabe*

Laut Aufgabe liegen die Mittelpunkte aller Kreise auf der Geraden $y = x$, und die $x$- und die $y$-Achse sind Kreistangenten, d.h.

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2, \qquad x_M = y_M = C, \quad R = |C|$$

$$(x - C)^2 + (y(x) - C)^2 = C^2$$

$$(x - C)^2 + (y(x) - C)^2 = C^2$$

$$x - C + (y(x) - C)\; y'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{x + y\, y'}{1 + y'}$$

$$\left(x - \frac{x + y\, y'}{1 + y'}\right)^2 + \left(y - \frac{x + y\, y'}{1 + y'}\right)^2 = \left(\frac{x + y\, y'}{1 + y'}\right)^2$$

$$y'^2 (x - y)^2 + (y - x)^2 = x^2 + 2\, x\, y\, y' + (y\, y')^2$$

$$\Rightarrow \quad y'^2 (x^2 - 2\, x\, y) - 2\, x\, y' + y^2 - 2\, x\, y = 0$$

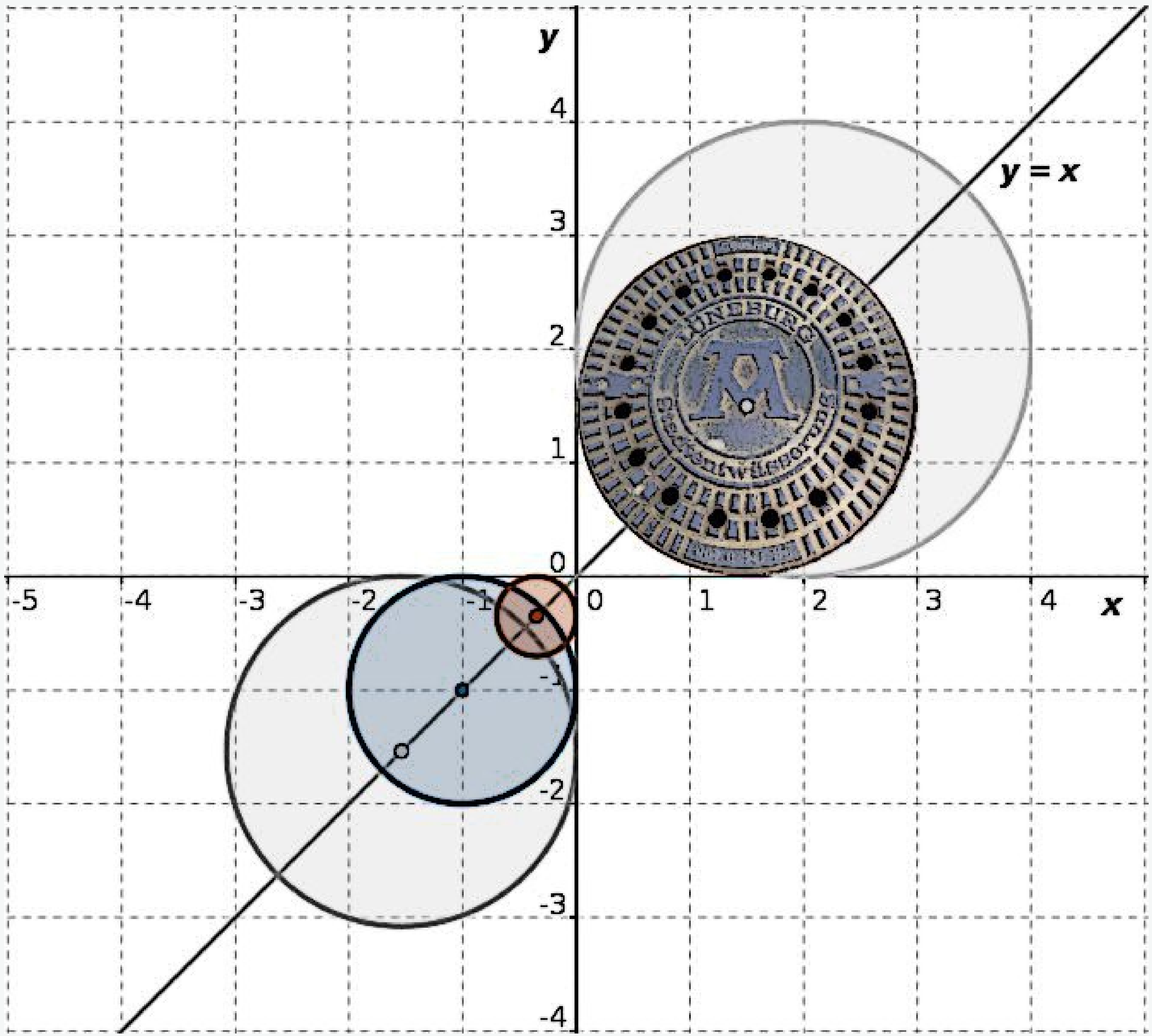



*Abb. L3-2: Eine Darstellung der Aufgabe*

Die Gleichung des Kreises der Aufgabe hat die Form:

$$(x - C_1)^2 + (y(x) - C_2)^2 = C_2^2$$

Das erste Differenzieren führt auf die Gleichung:

$$x - C_1 + (y - C_2)\, y' = 0$$

Das zweite Differenzieren – auf die Gleichung:

$$1 + y''(y - C_2) + (y')^2 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{y''}\left(1 + (y')^2 + y\, y''\right)$$

$$C_1 = x - \frac{y'}{y''}\left(1 + (y')^2\right)$$

Die DGL aller Kreise mit der $x$-Achse als Tangente ist

$$y^2 (y'')^2 + 2\, y\, y''(1 + (y')^2) - y'^2 \left(1 + (y')^2\right)^2 = 0$$

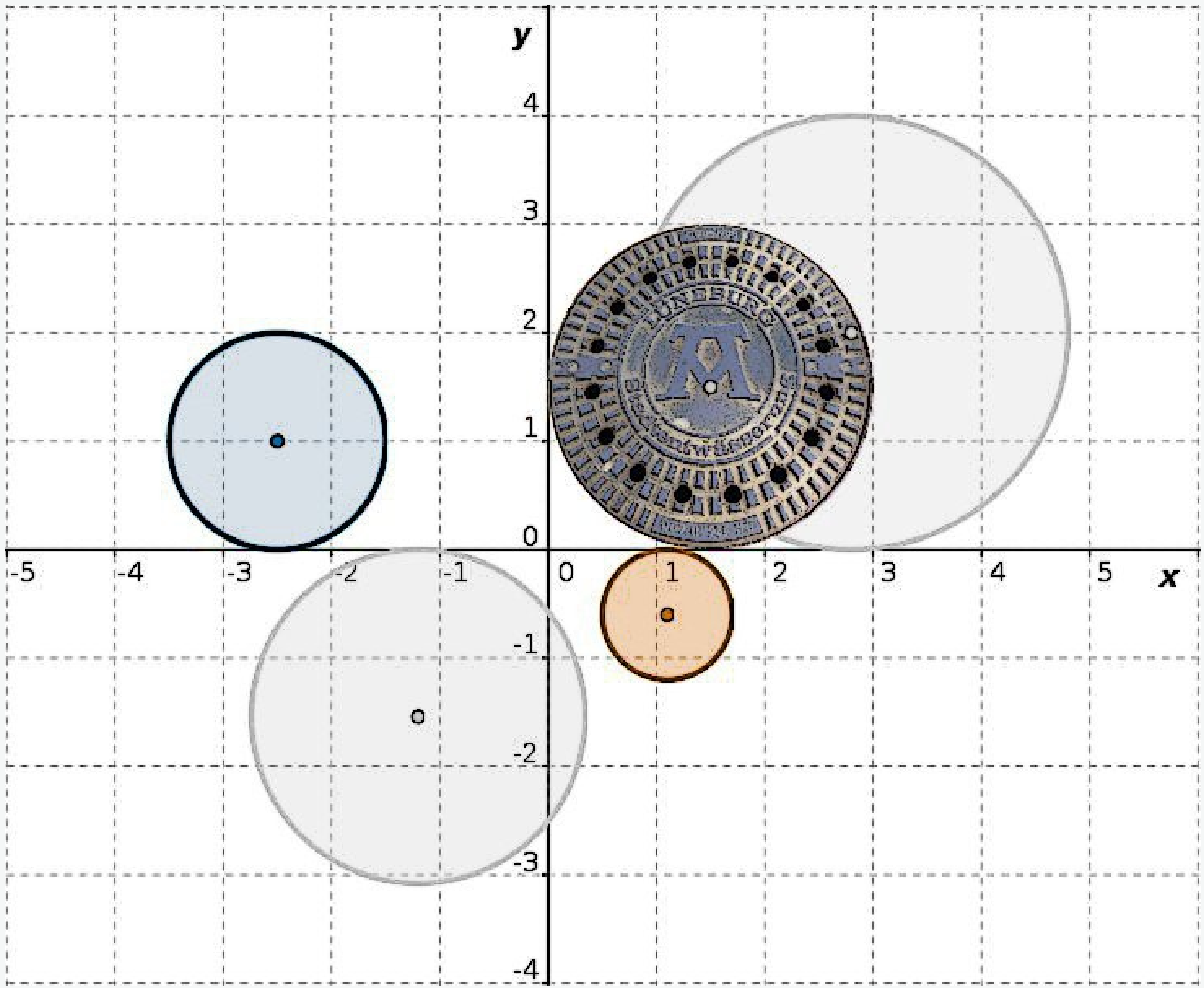



*Abb. L4: Eine Darstellung der Aufgabe*