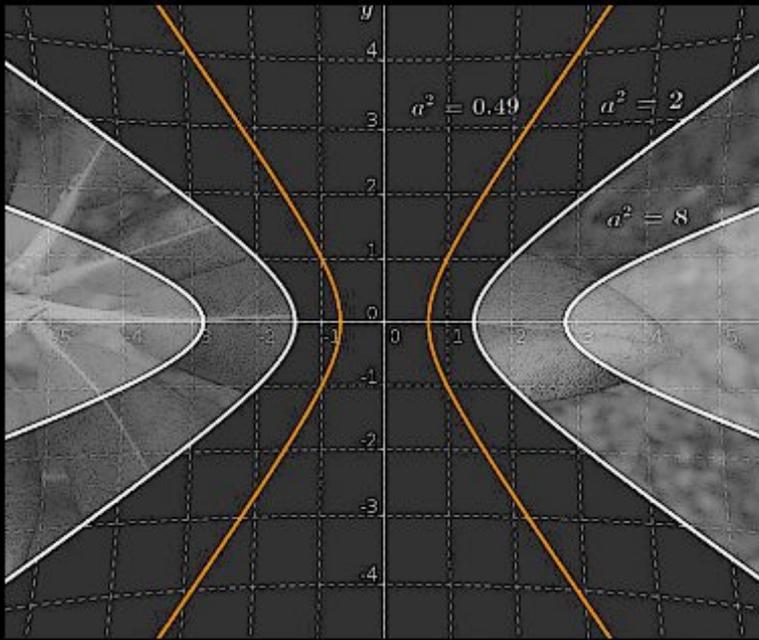


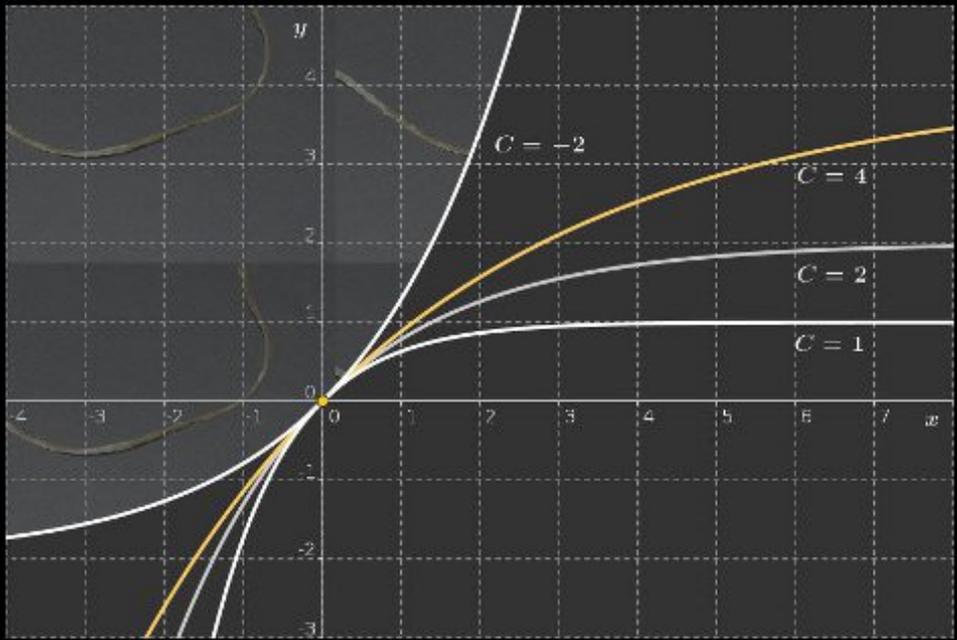
*Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar*

1

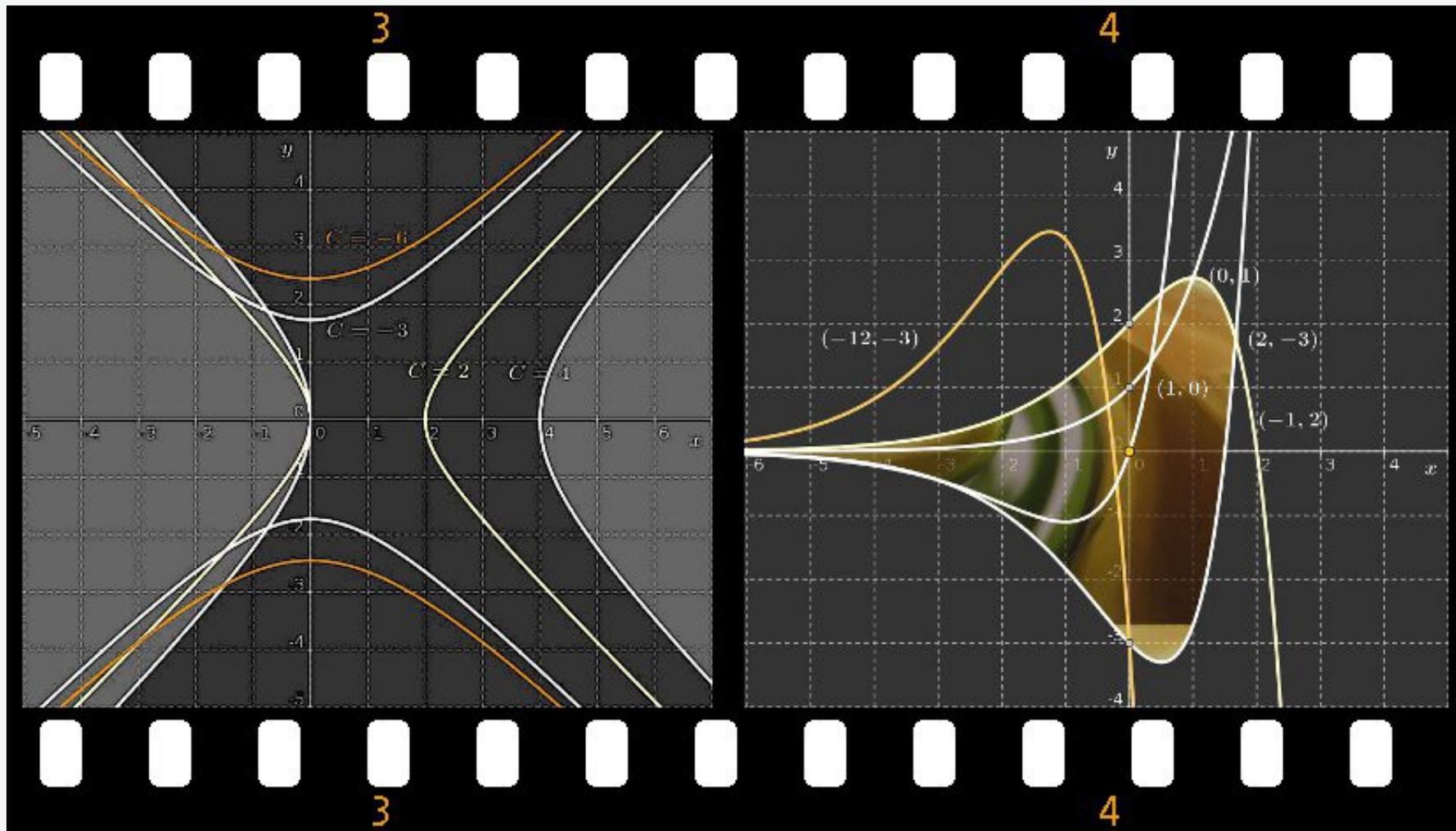


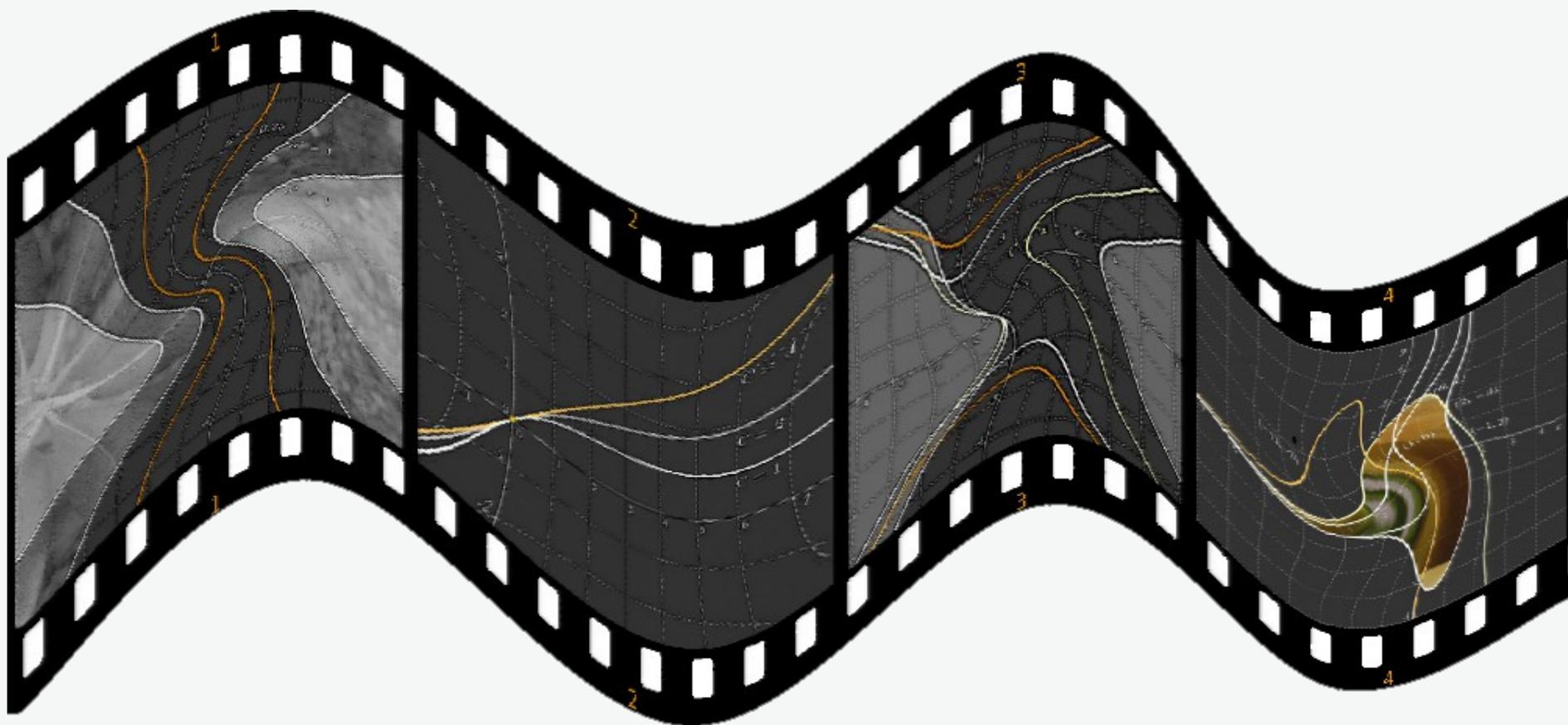
1

2



2





Aufgabe 5:

Bestimmen Sie eine DGL der Hyperbel:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1} = 1$

Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben eine DGL der Kurvenschar:

Aufgabe 6:  $y = C \left( 1 - e^{-\frac{x}{C}} \right)$

Aufgabe 7:  $y = \frac{C}{x}$

Aufgabe 8:  $x^2 - y^2 = C x$

Aufgabe 9:  $y = C e^{\frac{x}{C}}$

Aufgabe 10:  $y = e^x (a x + b)$

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 5

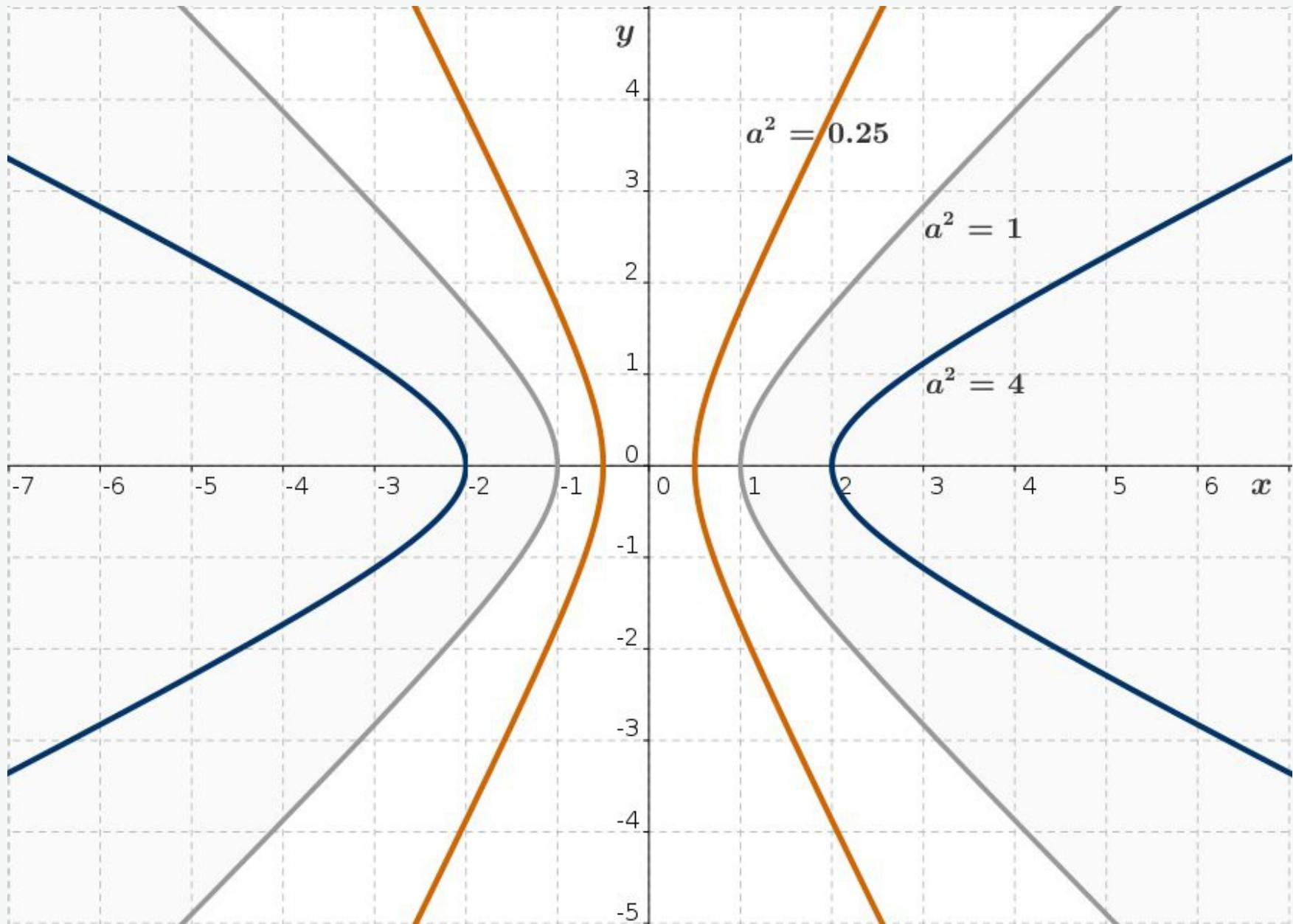


Abb. 5-1: Einige Kurven  $y = f(x)$ , die den Werten  $a^2 = 0.25, 1, 4$  entsprechen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1} = 1, \quad F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1} - 1 = 0$$

Differenzieren gibt uns die Gleichung

$$\frac{2x}{a^2} - 2yy' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a^2} = yy', \quad \frac{x^2}{a^2} = xyy'$$

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = xyy' - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad xyy' - y^2 = 1$$

Die Differentialgleichung der Hyperbelschar  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1} = 1$  ist

$$xyy' - y^2 = 1$$

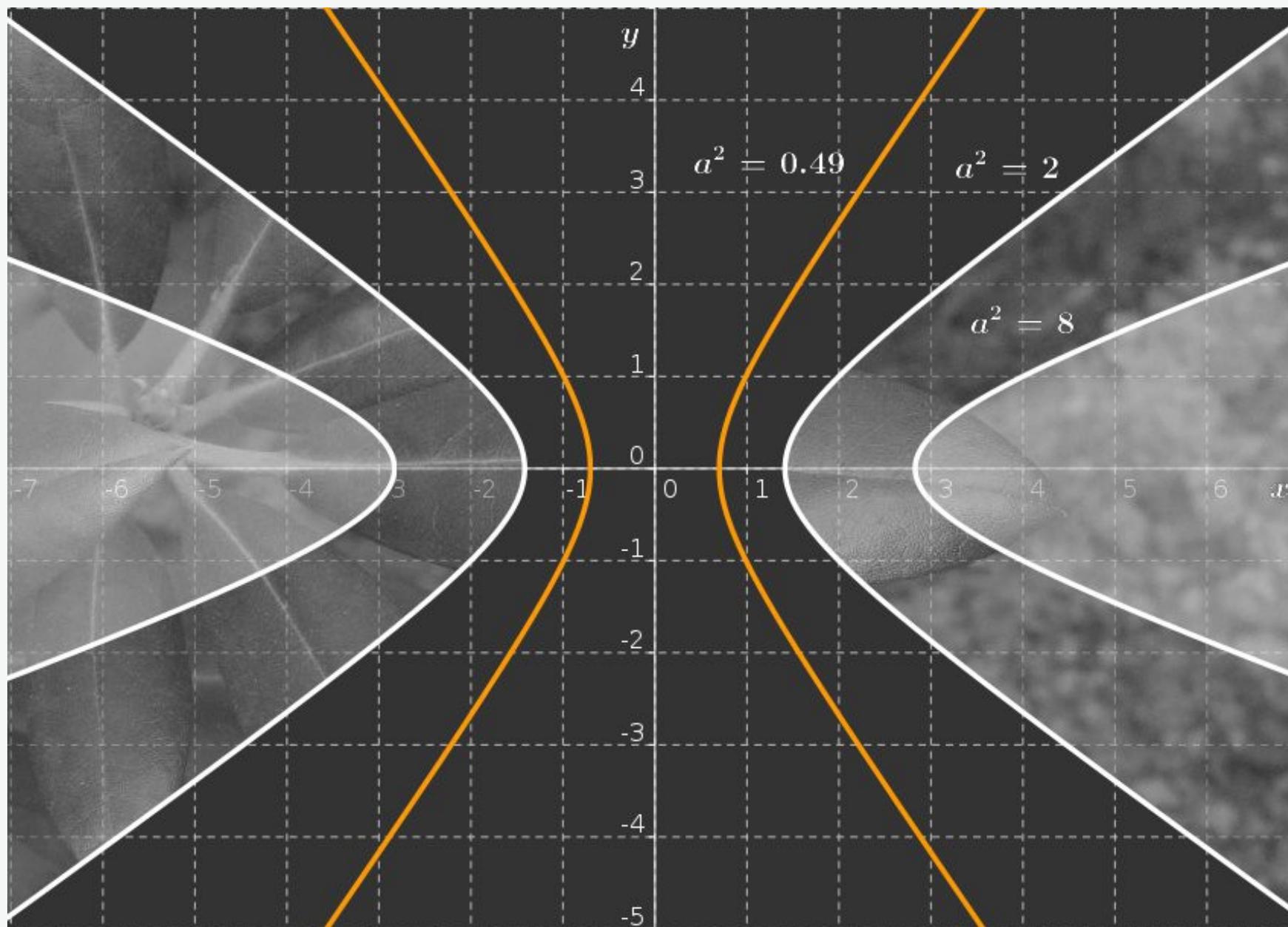


Abb. 5-1: Einige Kurven der Aufgabe

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 6

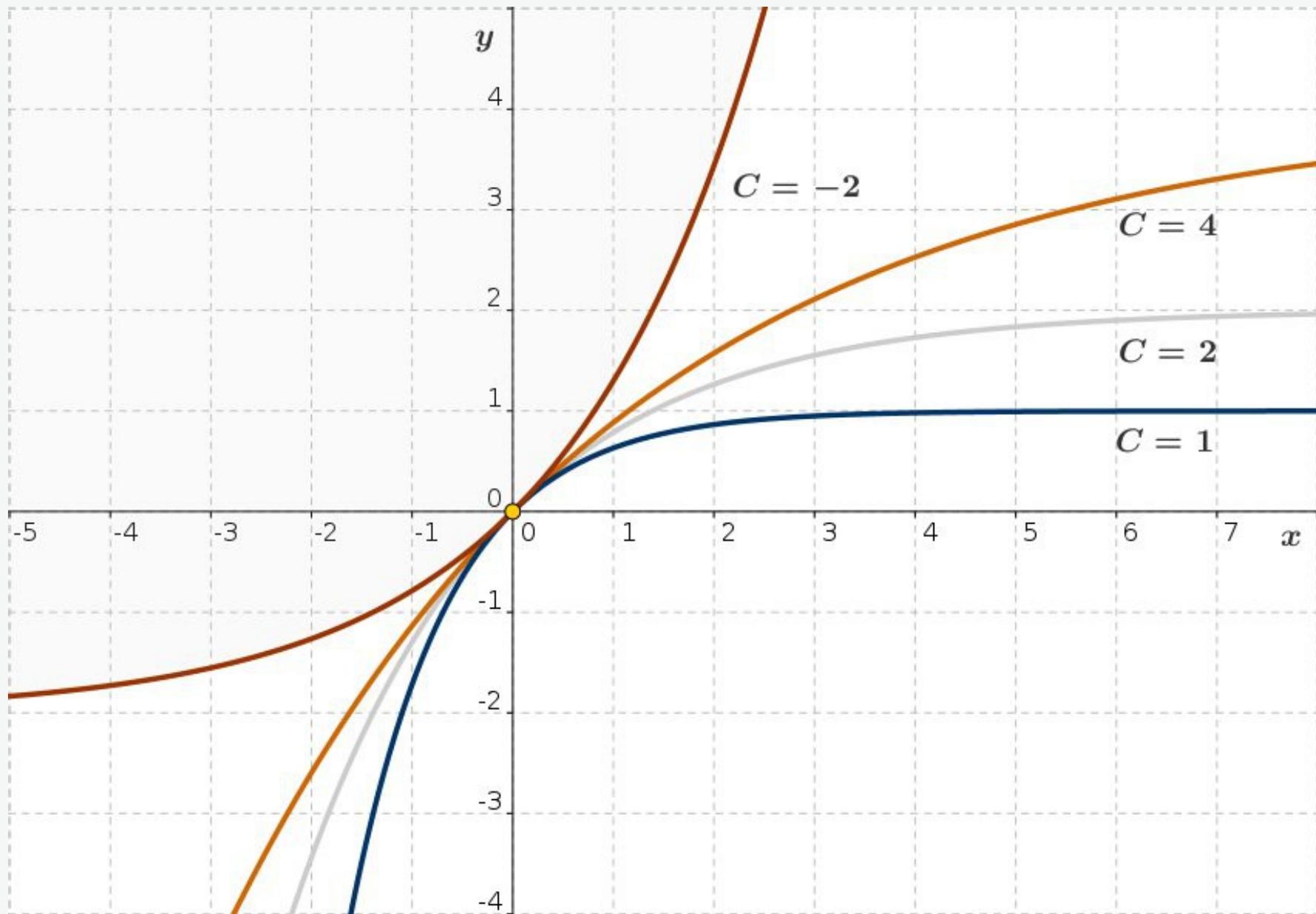


Abb. 6-1: Einige Kurven  $y = f(x)$ , die den Werten  $C = -2, 1, 2, 4$  entsprechen

$$y = C \left( 1 - e^{-\frac{x}{C}} \right), \quad y' = e^{-\frac{x}{C}}$$

$$\ln y' = -\frac{x}{C}, \quad C = -\frac{x}{\ln y'}$$

$$y = C \left( 1 - e^{-\frac{x}{C}} \right) = -\frac{x}{\ln y'} (1 - y')$$

Die Differentialgleichung der Kurvenschar ist

$$y \ln y' + x (1 - y') = 0$$



Abb. 6-1: Einige Kurven der Aufgabe

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 7

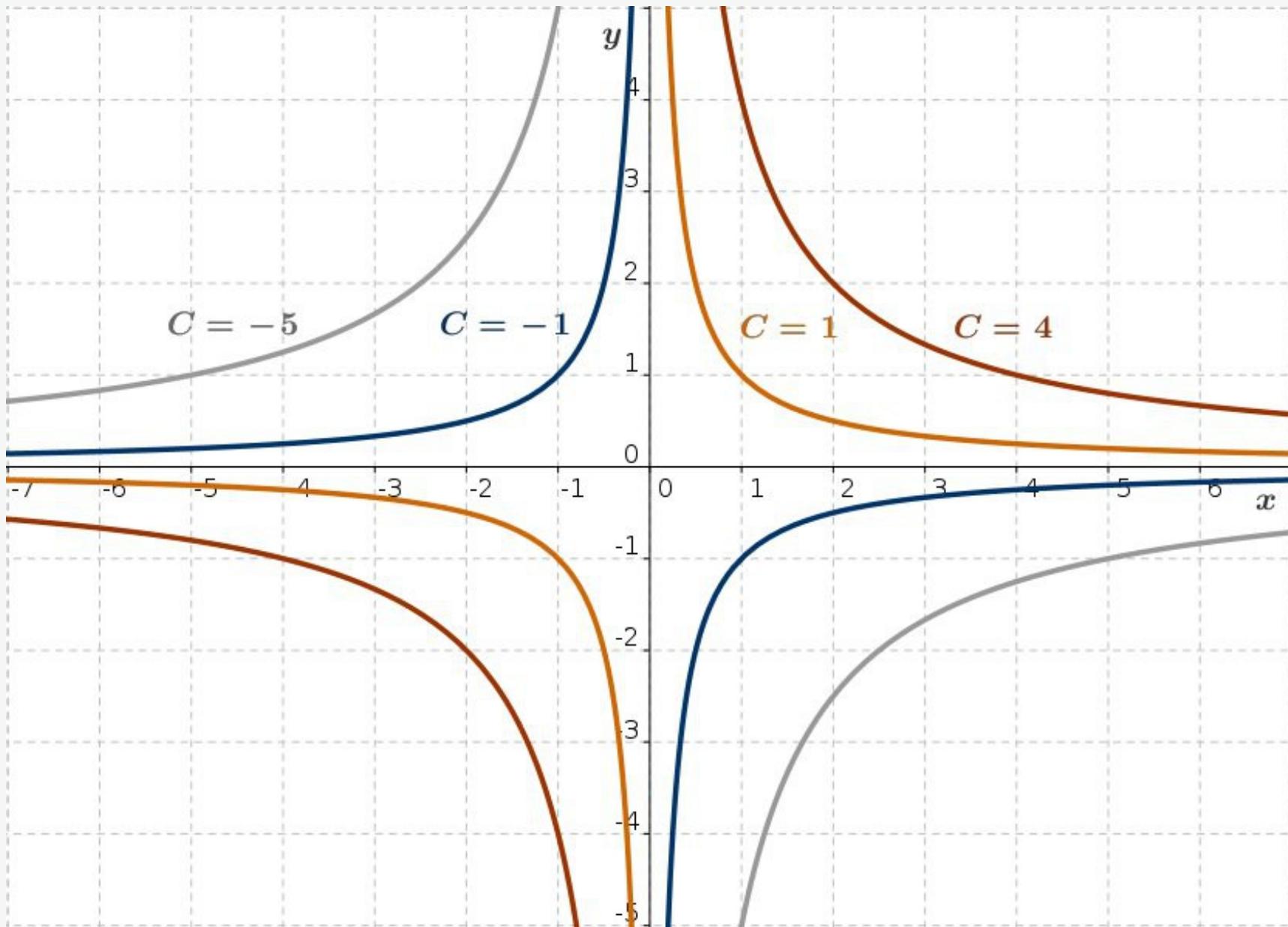


Abb. 7: Einige Kurven  $y = f(x)$ , die den Werten  $C = -5, -1, 1, 4$  entsprechen

Lösung 7:  $y = \frac{C}{x}, \quad y' = -\frac{C}{x^2} \Rightarrow C = -x^2 y'$

$$y = \frac{C}{x} = -\frac{-x^2 y'}{x} = -x y'$$

Die Differentialgleichung der Kurvenschar ist

$$y = -x y' \Leftrightarrow x y' + y = 0$$

Lösung 8:  $x^2 - y^2 = C x, \quad C = 2x - 2y y'$

$$x^2 - y^2 = 2x(x - y y')$$

Die Differentialgleichung der Kurvenschar ist

$$x^2 + y^2 = 2x y y'$$

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 8

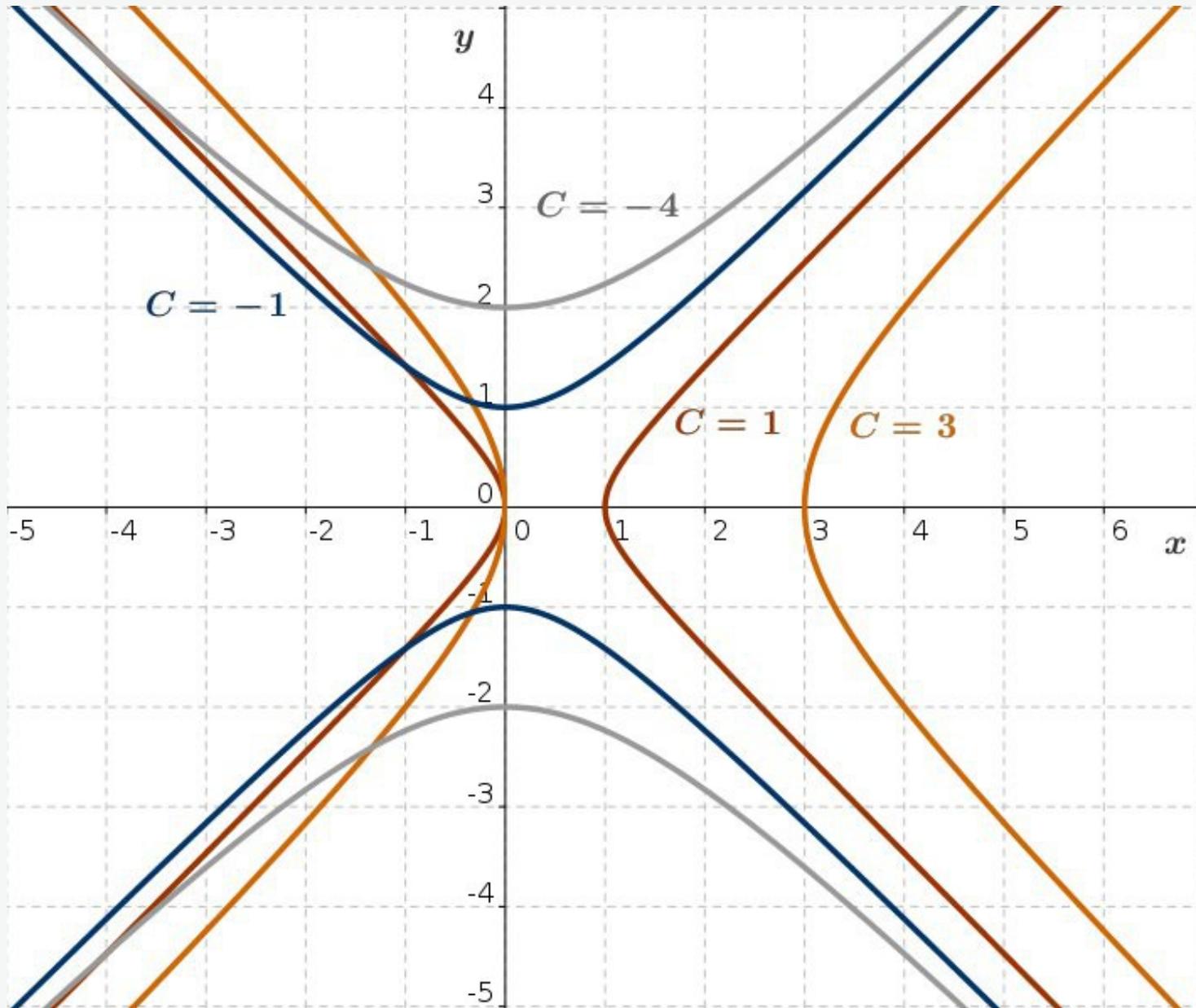


Abb. 8: Einige Kurven  $y = f(x)$ , die den Werten  $C = -4, -1, 1, 3$  entsprechen

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 9

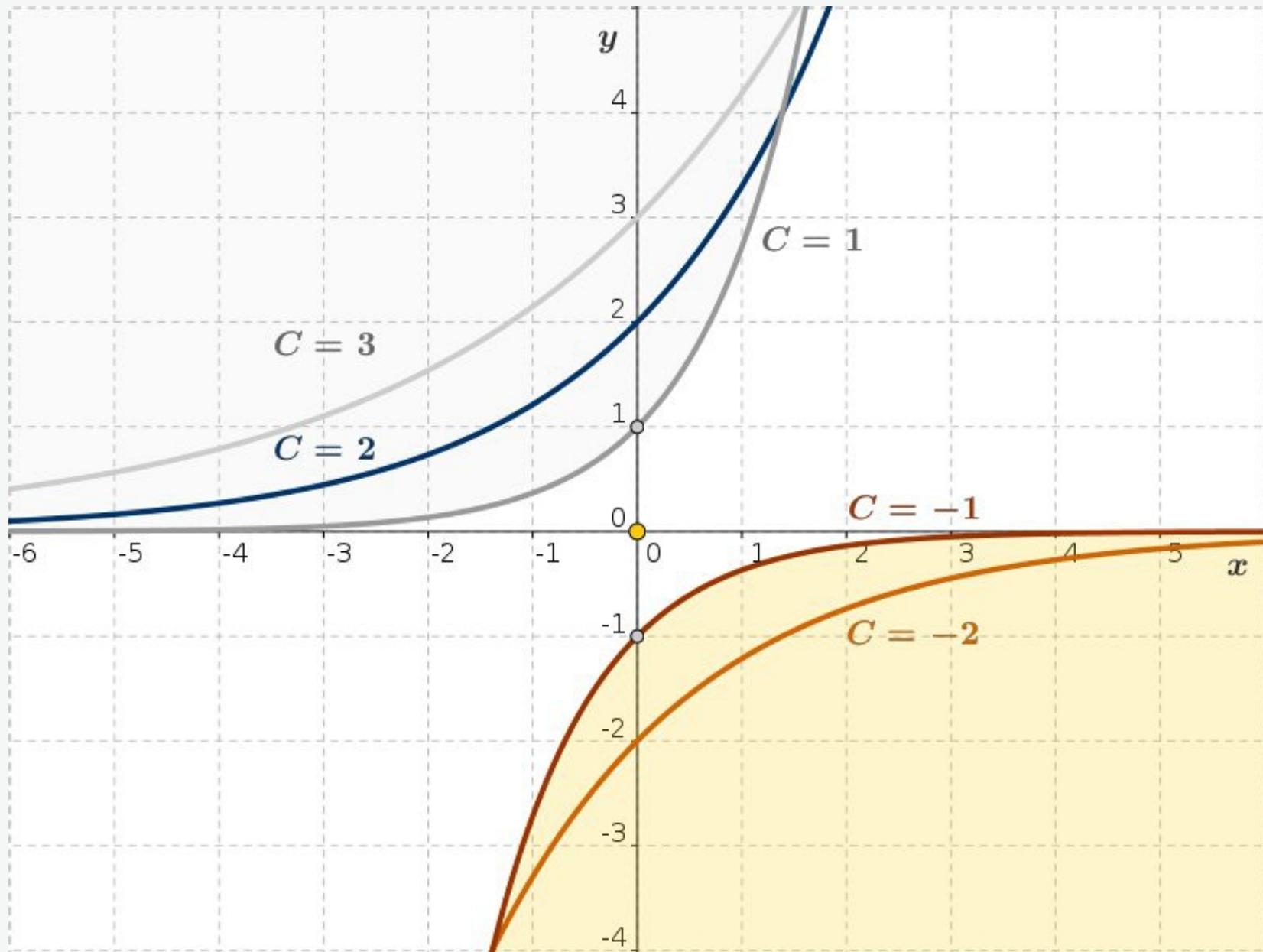


Abb. 9: Einige Kurven  $y = f(x)$ , die den Werten  $C = -2, -1, 2, 3$  entsprechen

$$y = C e^{\frac{x}{C}}, \quad y' = e^{\frac{x}{C}},$$

$$\ln y' = \ln \left( e^{\frac{x}{C}} \right) = \frac{x}{C}, \quad C = \frac{x}{\ln y'}$$

$$y = C e^{\frac{x}{C}}, \quad y = \frac{x}{\ln y'} e^{\frac{x}{\ln y'}} = \frac{x}{\ln y'} e^{\ln y'} = \frac{x y'}{\ln y'}$$

Die Differentialgleichung der Kurvenschar ist

$$y \ln y' = x y'$$

# Erstellung einer DGL für eine Kurvenschar: Lösung 10

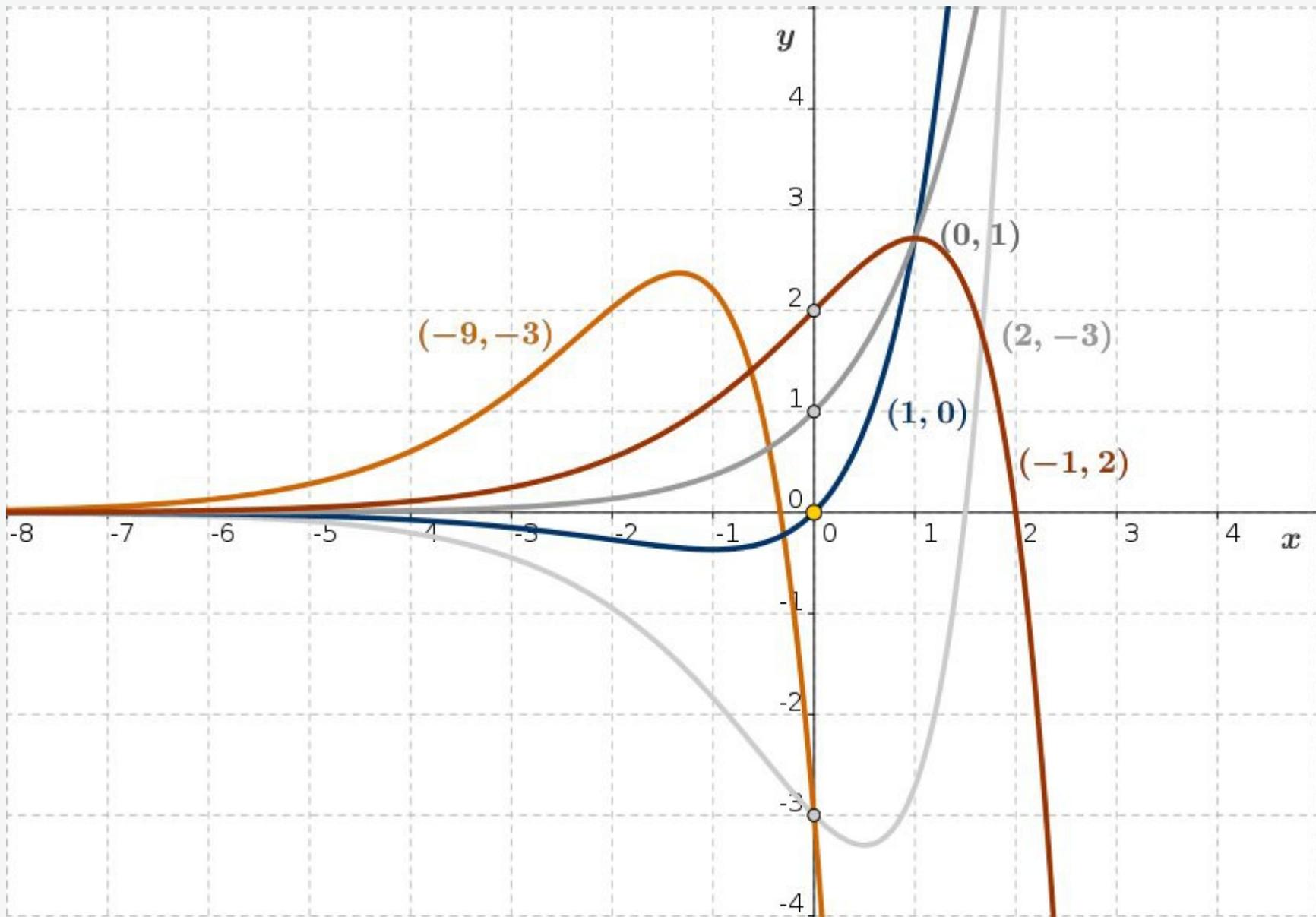


Abb. 10: Einige Kurven  $y = f(x)$  mit den eingezeichneten Werten von  $a$  und  $b$ :  $(a, b)$

$$y(x) = e^x (a x + b)$$

$$y = e^x (a x + b)$$

$$y' = e^x (a x + b) + a e^x = y + a e^x$$

$$a e^x = y' - y$$

$$y'' = y' + a e^x = y' + y' - y = 2 y' - y$$

$$y'' = 2 y' - y \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 2 y' + y = 0$$

Die Differentialgleichung der Kurvenschar ist

$$y'' - 2 y' + y = 0$$

