



<http://www.youtube.com/watch?v=M7A-cJGlDgA>

*Geometrische Aufgaben, die zu DGL mit
getrennten Variablen führen*



Vor etwa 4 Jahrhunderten studierten Wissenschaftler geometrische und mechanische Probleme, die mit DGLen gelöst werden können. Die Analyse der charakteristischen Eigenschaften solcher Probleme und der Methoden, welche damals für ihre Lösung benutzt wurden, führt uns auf die Beschreibung durch DGLen. Drei Probleme mögen als Beispiel dienen.

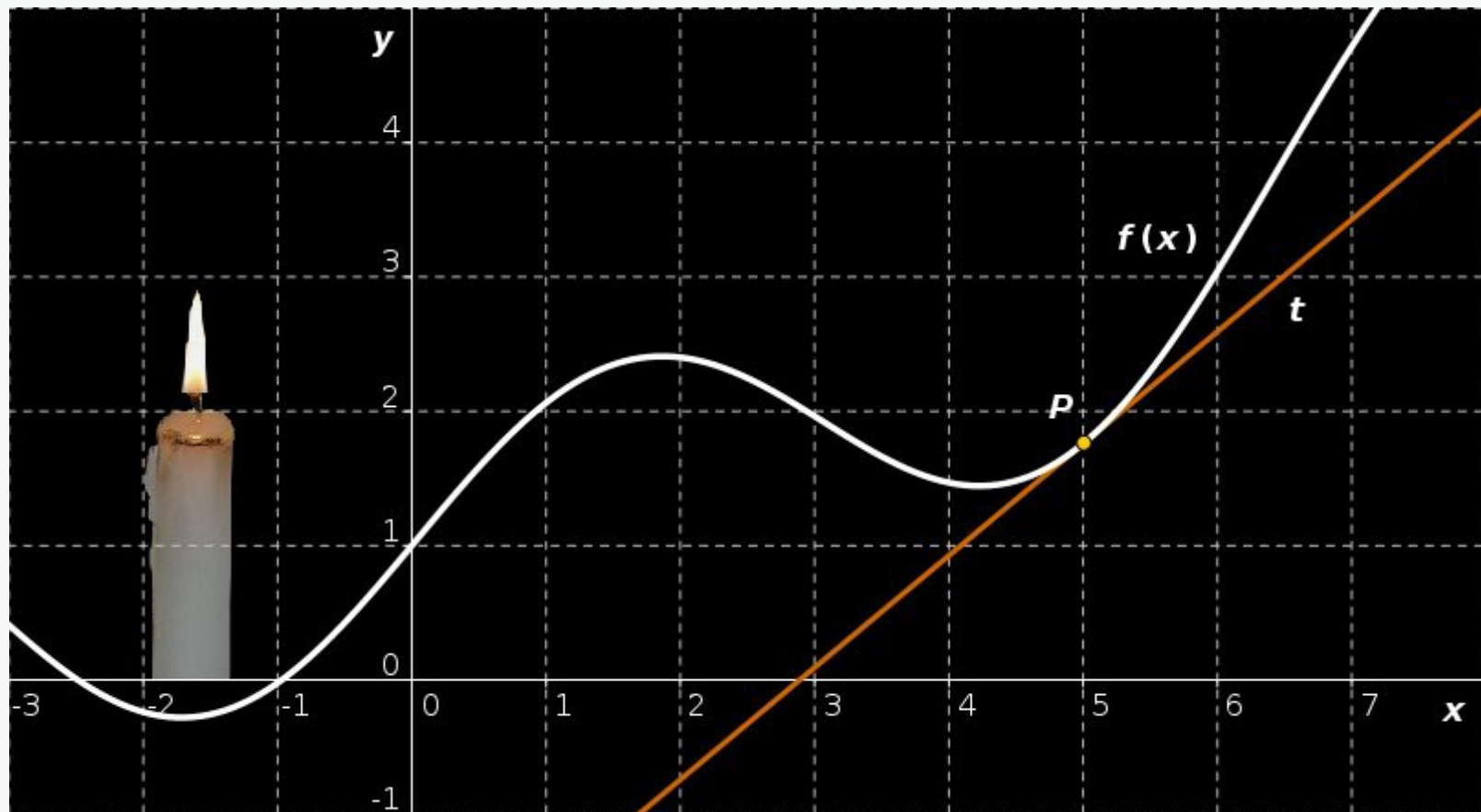


Abb. 1-1: Zum geometrischen Problem, das von de Beune formuliert wurde

Florimond de Beaune (1601-1652) war ein französischer Mathematiker.

Beaune war ein Jugendfreund von René Descartes und hat zu dessen Geometrie eine Reihe von Anmerkungen verfasst, die von Frans van Schooten (1615-50) in seine Ausgabe der Cartesischen Geometrie aufgenommen worden sind.

Bekannter ist de Beaune durch die so genannte Beaunesche Aufgabe, die in Descartes' Briefen erwähnt wird: Bestimmung einer krummen Linie (Kurve) aus einer Eigenschaft ihrer Tangente. Die Aufgabe konnte erst 1693 mit Hilfe der Integralrechnung durch Johann Bernoulli gelöst werden.

Wikipedia

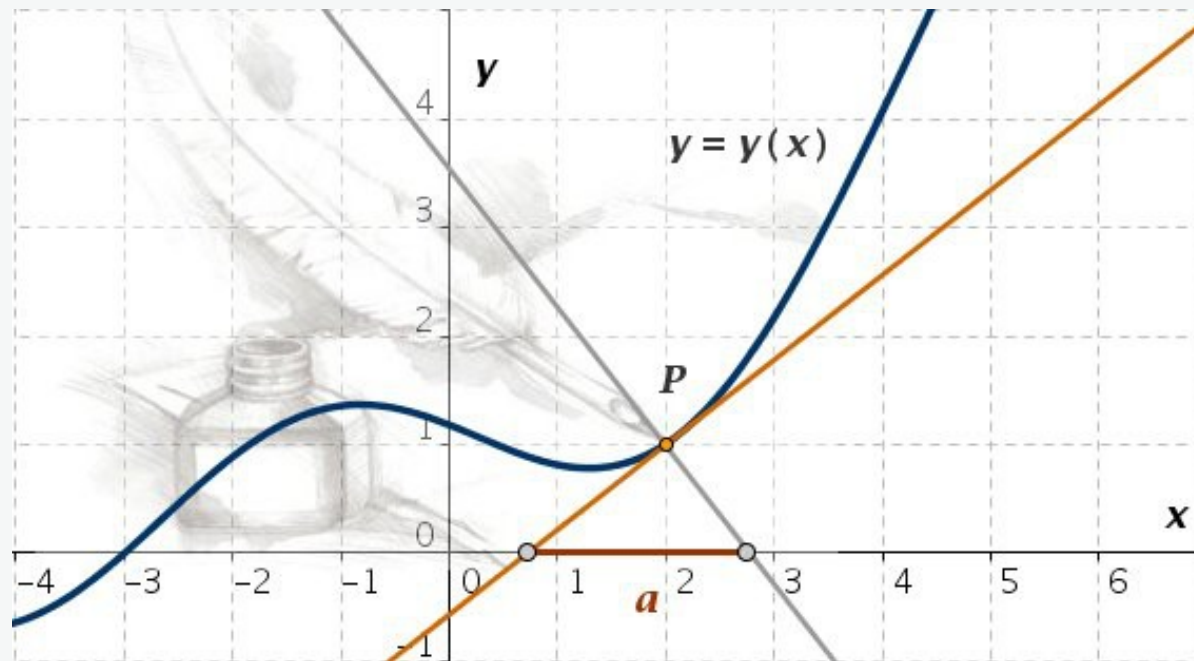


Abb. 1-2: Zum geometrischen Problem, das von de Beaune formuliert wurde

De Beaune formulierte 1638 folgendes geometrisches Problem:

Gesucht ist eine Kurve $y(x)$, bei der für jeden auf der Kurve liegenden Punkt P die Normale und die Tangente aus der x -Achse ein Stück von konstanter Länge a ausschneiden.

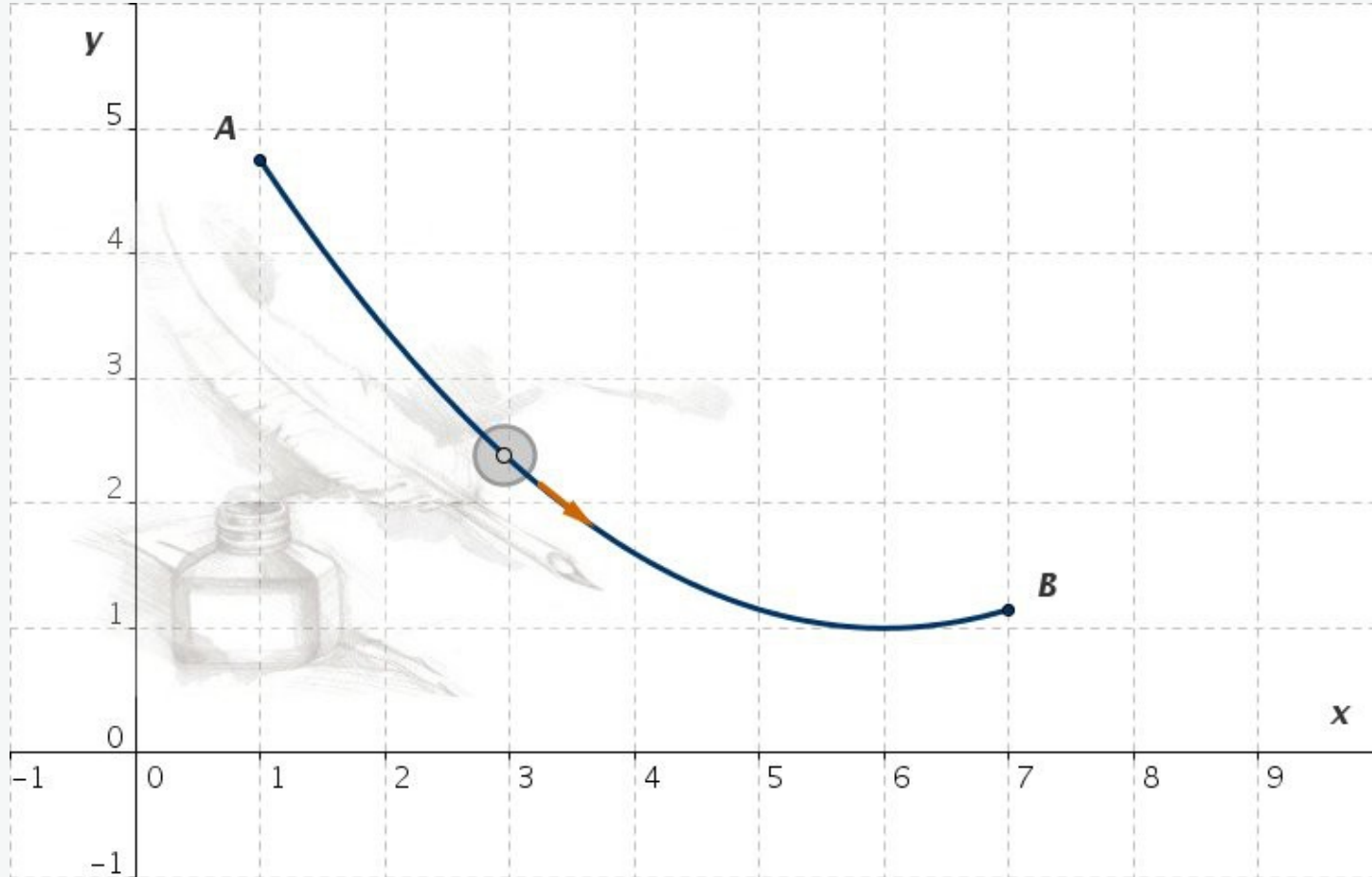


Abb. 1-3: Zum geometrischen Problem, das von Leibniz formuliert wurde

Das zweite Problem hat [Gottfried Wilhelm Leibniz](#) 1687 vorgeschlagen:

“Gesucht ist eine Kurve $y(x)$, auf der ein der Schwerkraft unterworfener Körper mit konstanter Vertikalgeschwindigkeit gleitet.”

Bernoullis Beispiel einer der ersten Differentialgleichungen: Aufgabe 1

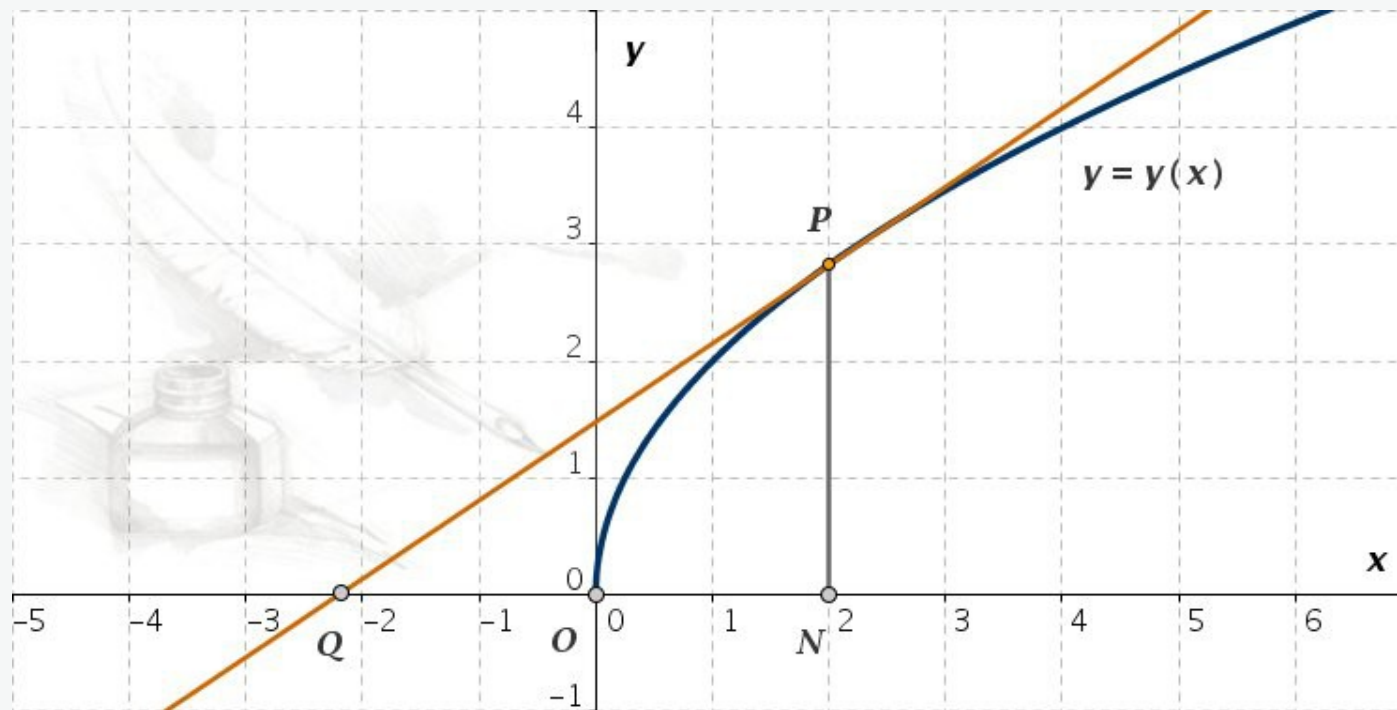


Abb. 1-4: Zum geometrischen Problem, das von Bernoulli formuliert wurde

Johann Bernoulli Beispiel einer ersten Differentialgleichung ist:

Bei welcher Kurve OP ist die Koordinate PN gleich dem geometrische Mittel aus einer Strecke der Länge a und dem x -Achsenabschnitt QN der Tangente?

PN ist die y -Koordinate von P , und QP ist eine Tangente der Kurve, also ist

$$y' = \frac{PN}{QN}$$

PN ist das geometrische Mittel von a und QN , d.h. $PN^2 = a QN$, also

$$\frac{a}{PN} = \frac{PN}{QN}$$

Dies kann als Differentialgleichung

$$\frac{a}{y} = y' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{y} = \frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad a dx = y dy$$

geschrieben werden. Sie kann durch Trennung der Variablen leicht gelöst werden.

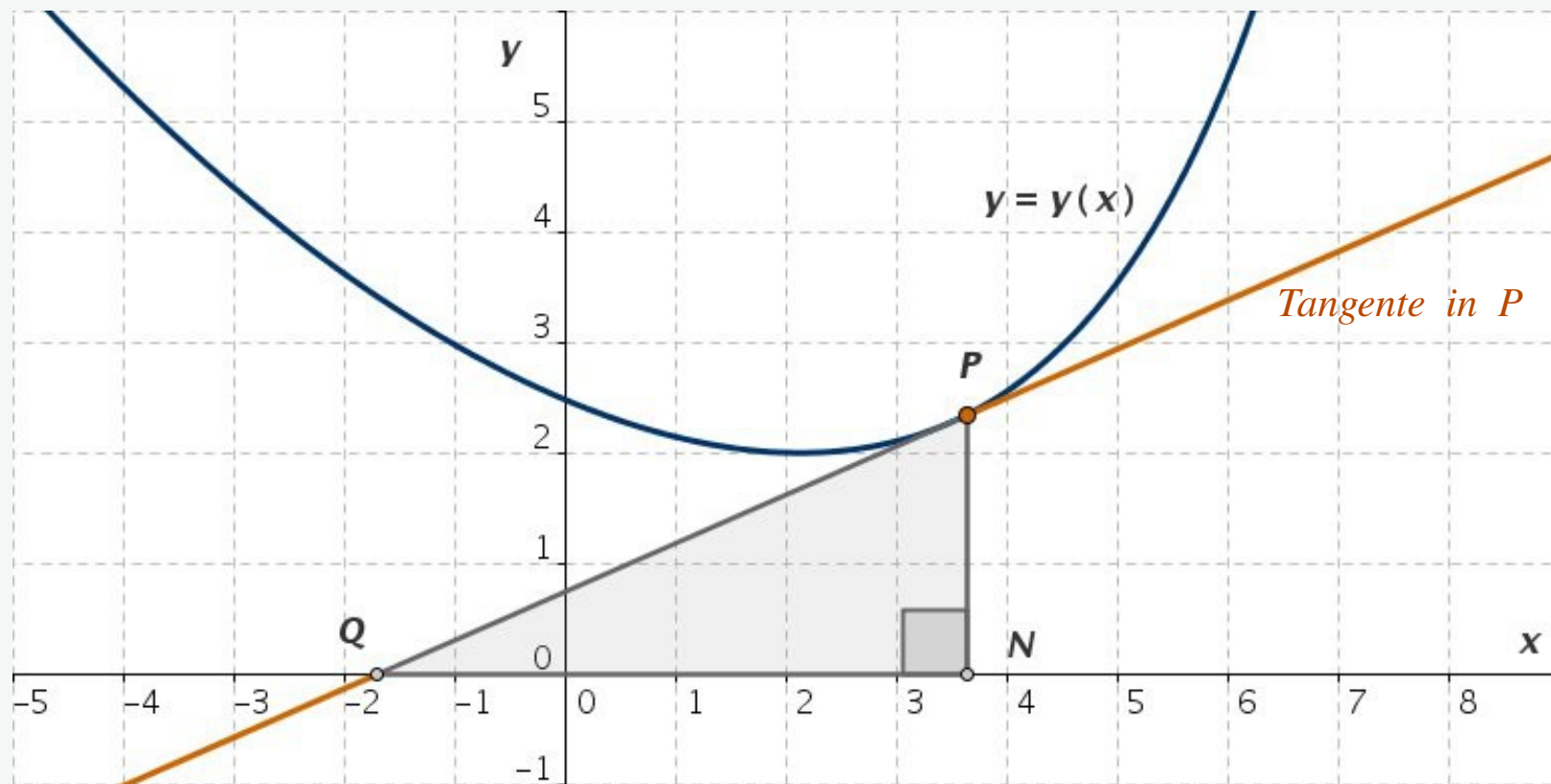


Abb. 2-1: Das Dreieck PQN, das durch eine Tangente PQ der Kurve $y = y(x)$ im Punkt P, die x-Achse und die zur x-Achse orthogonale Linie PN gebildet wird

Gesucht ist eine Kurve $y(x)$, bei der für jeden auf der Kurve liegenden Punkt P die Tangente, die Normale zur x-Achse und die x-Achse ein Dreieck konstanter Fläche a^2 bilden.

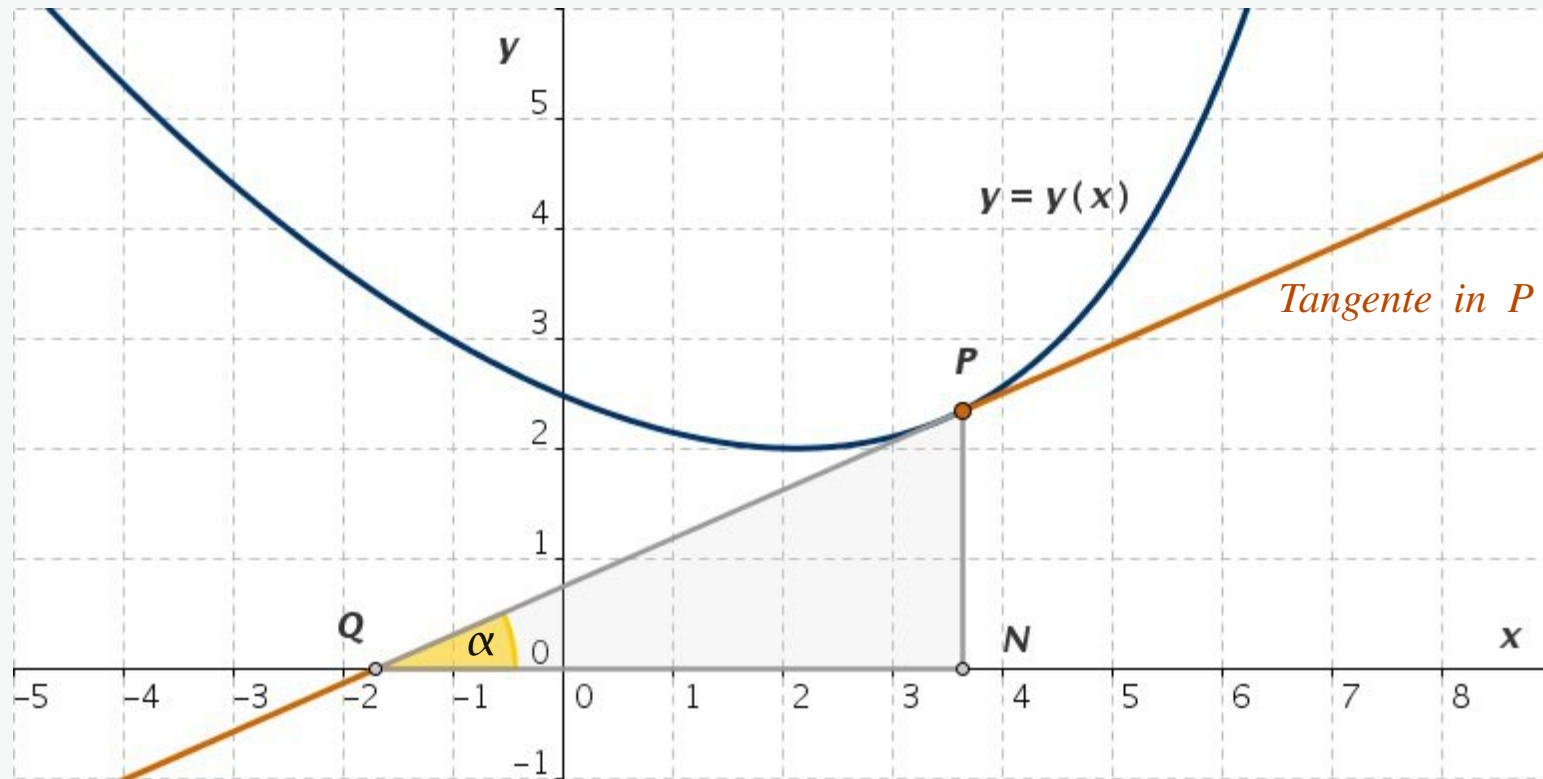


Abb. 2-2: Das Dreieck PQN und der Winkel α , $\tan \alpha = y'$, $y' > 0$

$$A = \frac{1}{2} |QN| \cdot |NP| = \frac{1}{2} |QN| y, \quad \tan \alpha = \frac{|NP|}{|QN|} = \frac{y}{|QN|} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = y', \quad |QN| = \frac{y}{y'}, \quad A = \frac{1}{2} \frac{y}{y'} y = \frac{y^2}{2 y'}, \quad \frac{y^2}{2 y'} = a^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{2a^2}, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2a^2} \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x}{2a^2} + C \Rightarrow$$

$$y = -\frac{2a^2}{x + 2Ca^2} = \frac{2a^2}{C_1 - x}, \quad C_1 \equiv -2Ca^2$$

Jetzt betrachten wir den Fall, dass $y' < 0$ ist (entsprechende Abbildung folgt)

$$A = -\frac{y^2}{2y'} = a^2, \quad \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2a^2} \int dx \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{2a^2} - C \Rightarrow$$

$$y = \frac{2a^2}{x - 2Ca^2} = \frac{2a^2}{C_1 + x}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form:

$$y = \frac{2a^2}{C_1 \pm x}$$

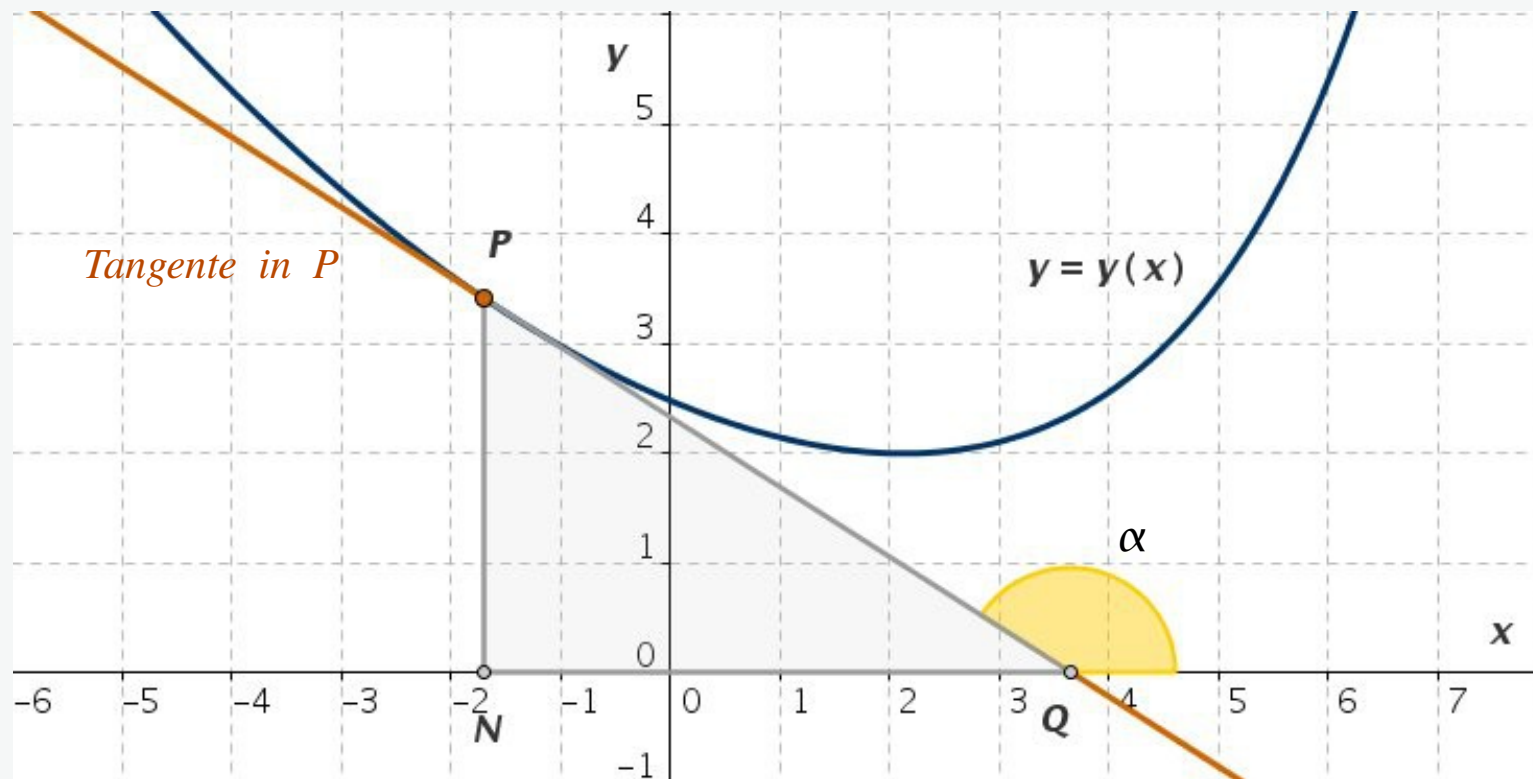


Abb. 2-3: Das Dreieck PQN, der Winkel α , $\tan \alpha = y'$, $y' < 0$

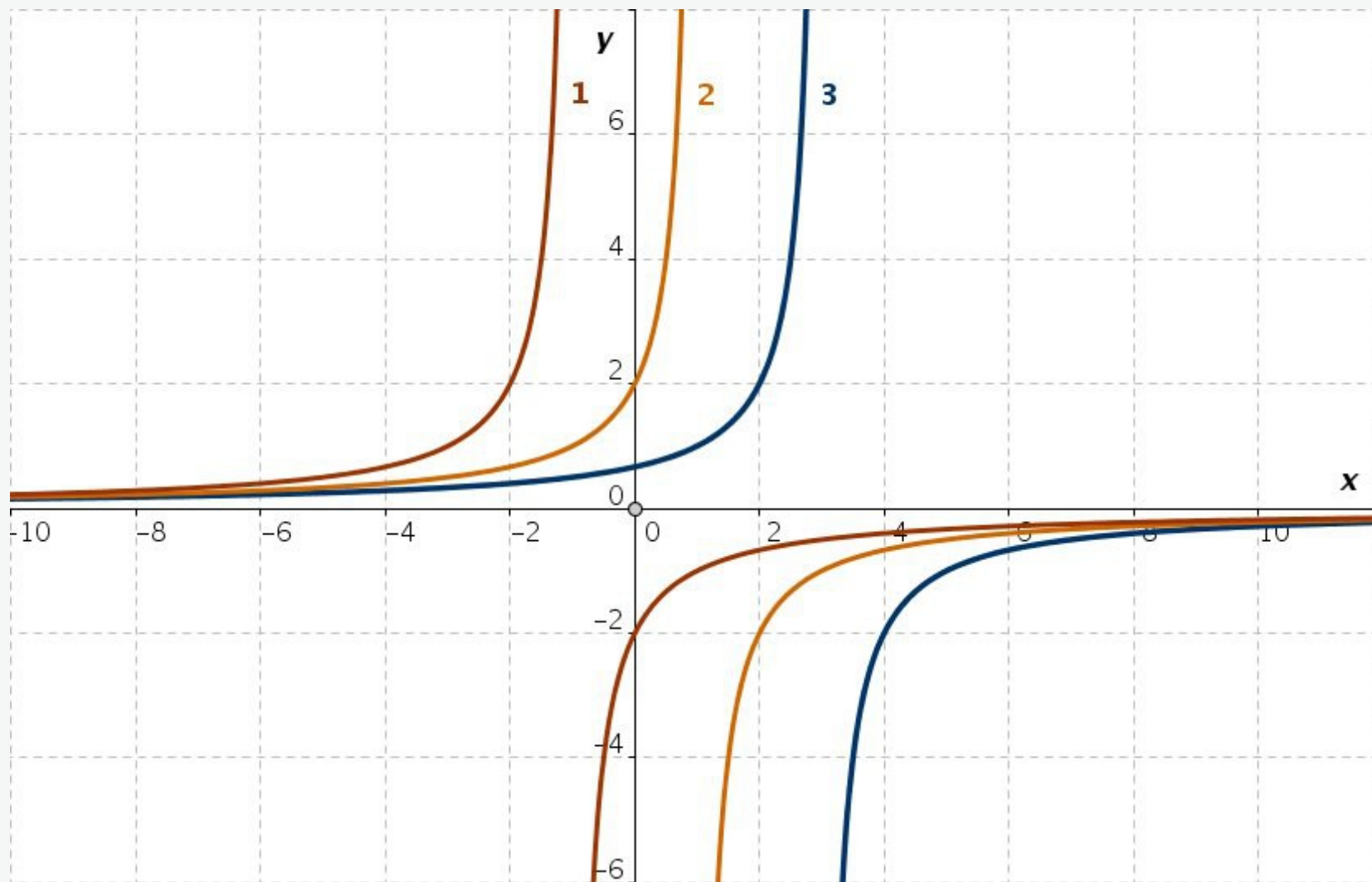


Abb. 2-4: Integralkurven, die der Lösung $y(x) = \frac{2a^2}{C-x} = \frac{2}{C-x}$ ($a=1$) entsprechen:
1) $C = -1$, 2) $C = 1$, 3) $C = 3$

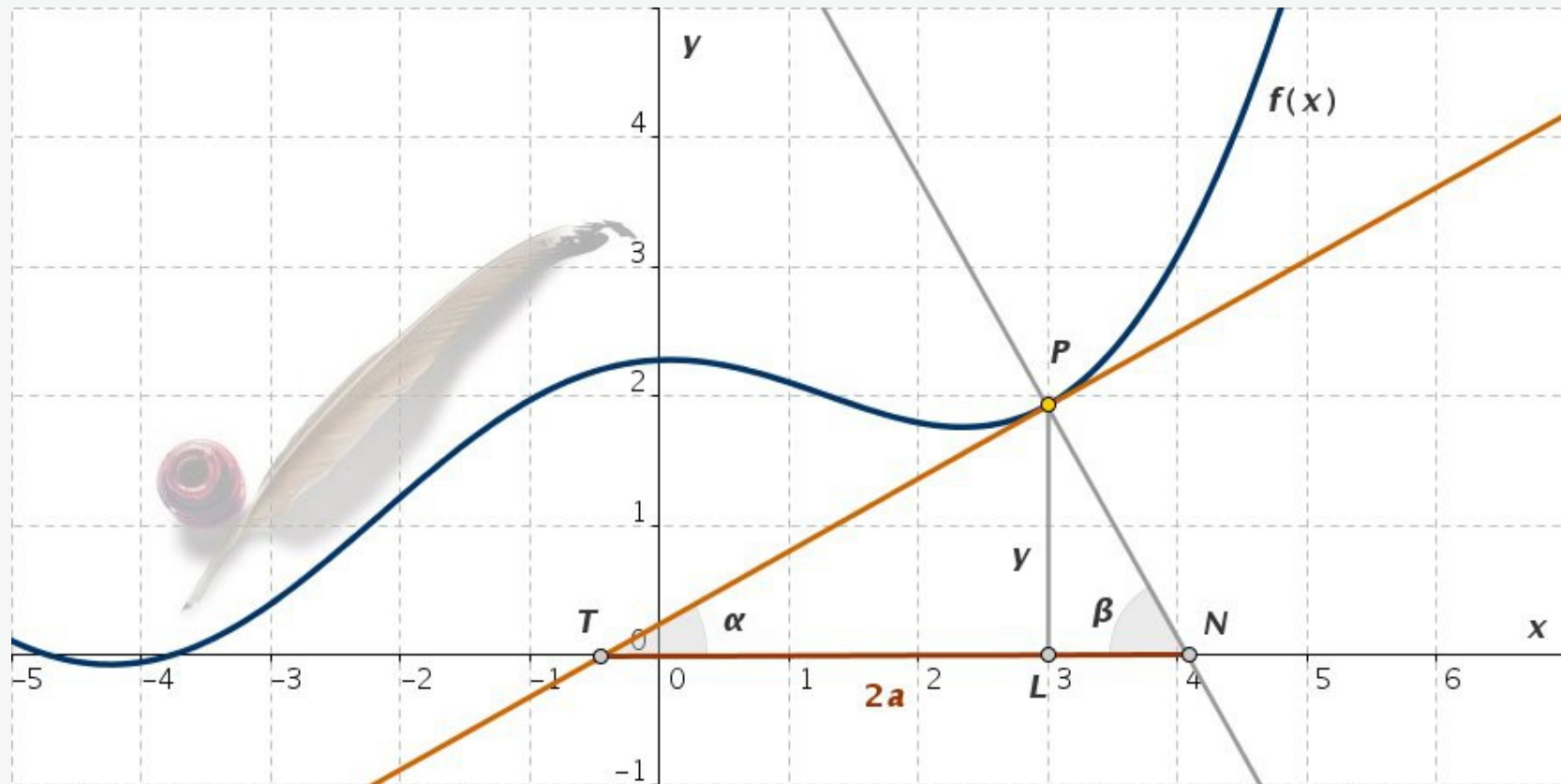


Abb. 3-1: Zum geometrischen Problem, das von de Beaune formuliert wurde

Gesucht ist eine Kurve $y = f(x)$, bei der für jeden auf der Kurve liegenden Punkt P die Normale und die Tangente aus der x -Achse ein Stück von konstanter Länge $2a$ ausschneiden.



$$|TN| = |TL| + |LN| = 2a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|PL|}{|TL|} = \frac{y}{|TL|} = y', \quad |TL| = \frac{y}{y'}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|PL|}{|NL|} = \frac{y}{|NL|}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{y'}$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{y}{|NL|}, \quad |NL| = y y'$$

$$2a = \frac{y}{y'} + y y', \quad (y')^2 - 2a \frac{y'}{y} + 1 = 0$$

$$(y')^2 + p y' + q = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$p = -\frac{2a}{y}, \quad q = 1, \quad y'_{1,2} = \frac{1}{y} \left(a \pm \sqrt{a^2 - y^2} \right)$$

$$\frac{y \, dy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = dx, \quad 0 < y \leq a$$

Fall 1:

$$\int \frac{y \, dy}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx, \quad u = a + \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$u' = \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad du = \frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{a^2 - y^2} \, du = y \, dy, \quad (u - a) \, du = y \, dy$$

$$\int \frac{y \, dy}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} = \int \frac{(u - a) \, du}{u} = \int \left(1 - \frac{a}{u} \right) du = u - a \ln u$$

$$u - a \ln u = x + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left(a + \sqrt{a^2 - y^2} \right) = x + C_1$$

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left(a + \sqrt{a^2 - y^2} \right) - x = C_2 \quad (C_2 = C_1 - a)$$

Fall 2:

$$\int \frac{y \, dy}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx, \quad u = a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$u' = \frac{du}{dy} = -\frac{1}{2} (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad du = -\frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln(a - \sqrt{a^2 - y^2}) + x = C_3$$

$$\frac{y \, dy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = dx :$$

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \pm x = C$$

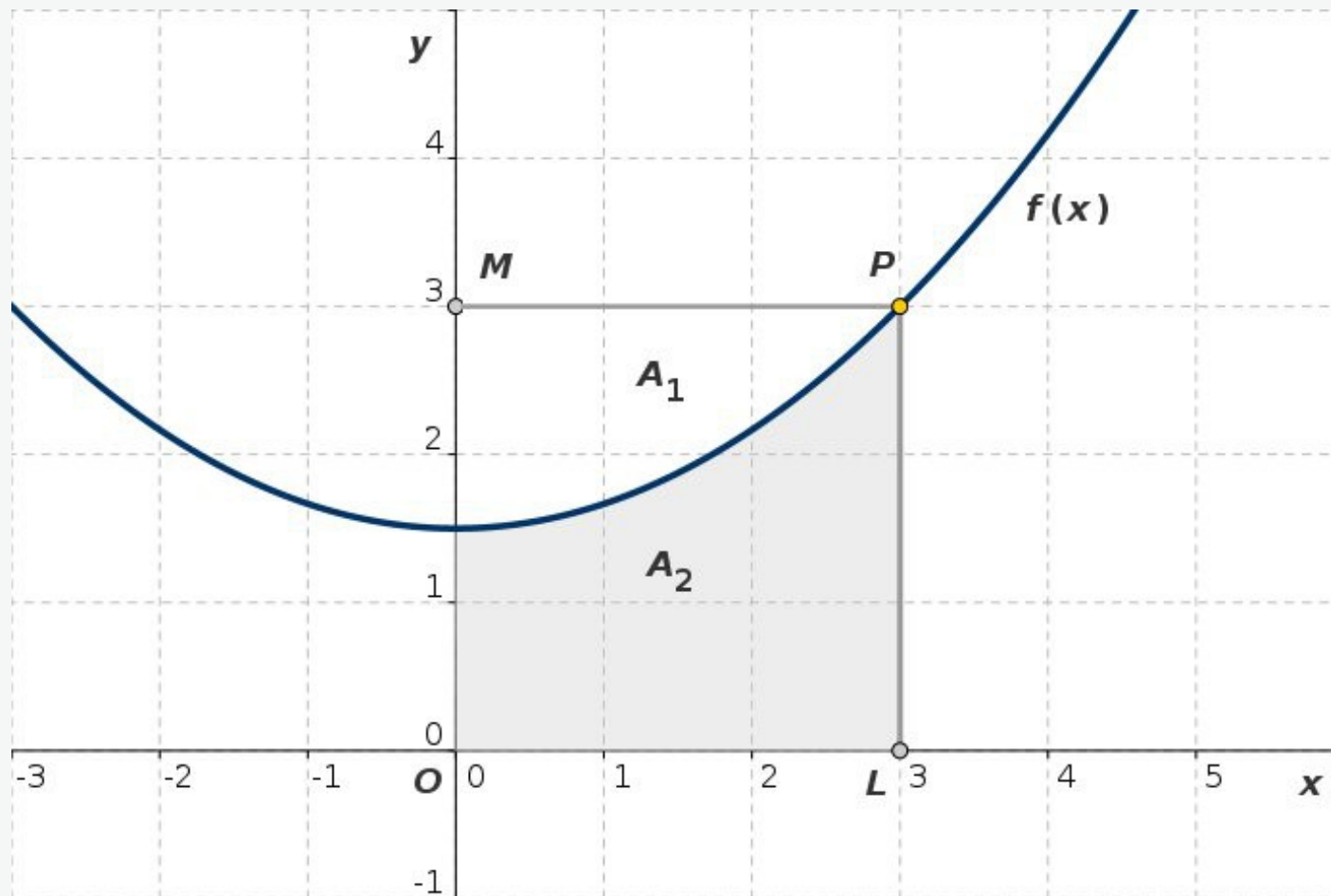


Abb. 4-1: Zur geometrischen Deutung der Aufgabe

Gesucht sind Kurven mit folgenden Eigenschaften: durch jeden Punkt der Kurve seien zwei zur x - und y -Achsen parallele Geraden gezogen mit entsprechenden Schnittpunkten mit den Achsen (Punkte L und M in Abb. 4-1). Die Fläche des Vierecks $OMPL$ wird durch die Kurve der Funktion $y = f(x)$ im Verhältnis 1 : 2 geteilt.

Entsprechend der geometrischen Interpretation des Integrals ist die Fläche des Viereckteils unter der Kurve, also die Fläche zwischen Kurve und x -Achse im Intervall I , gleich

$$A_2 = \int_0^{x_L} y(x) dx, \quad I = [0, x_L]$$

Dabei ist:

$$A_2 = 2 A_1, \quad A_1 + A_2 = x_L f(x_L) \quad \Leftrightarrow \quad 3 A_1 = x_L f(x_L)$$

$$A_1 = \frac{1}{3} x_L f(x_L) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2 A_1 = \frac{2}{3} x_L f(x_L) = \int_0^{x_L} y(x) dx$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach x und integrieren anschließend:

$$\frac{2}{3} (y + x y') = y \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{2x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}$$

Integration:

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |x| + \ln |C_1| = \ln(\sqrt{x}) + \ln |C_1| = \ln |C_1 \sqrt{x}|$$

$$y = C_1 \sqrt{x}, \quad x = C y^2$$

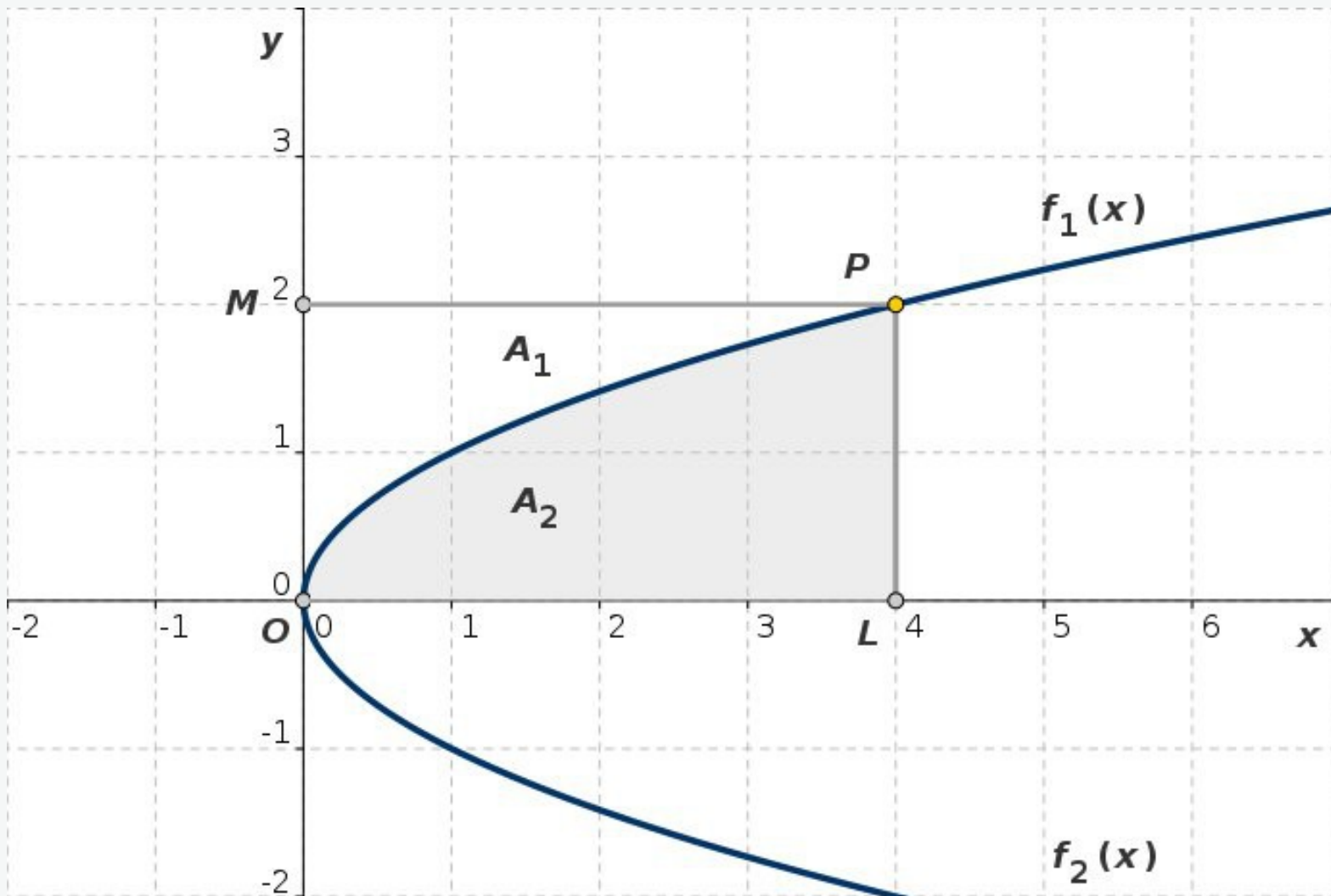


Abb. 4-2: Zur geometrischen Interpretation der Lösung der Aufgabe

$$x = y^2, \quad C = 1 : \quad f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = -\sqrt{x}$$

Wir prüfen die Lösung entsprechend der Funktion in Abbildung 4-2:

$$A_2 = \int_0^{x_L} y(x) dx = \int_0^{x_L} \sqrt{x} dx, \quad I = [0, x_L]$$

$$A_2 = \int_0^{x_L} x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{x_L} = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^{x_L} = \frac{2}{3} x_L \sqrt{x_L}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{x_L} (y(x_L) - y(x)) dx = \int_0^{x_L} (\sqrt{x_L} - \sqrt{x}) dx = \sqrt{x_L} \int_0^{x_L} dx - \int_0^{x_L} x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= x_L \sqrt{x_L} - \frac{2}{3} x_L \sqrt{x_L} = \frac{1}{3} x_L \sqrt{x_L} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass

$$A_2 = 2 A_1$$