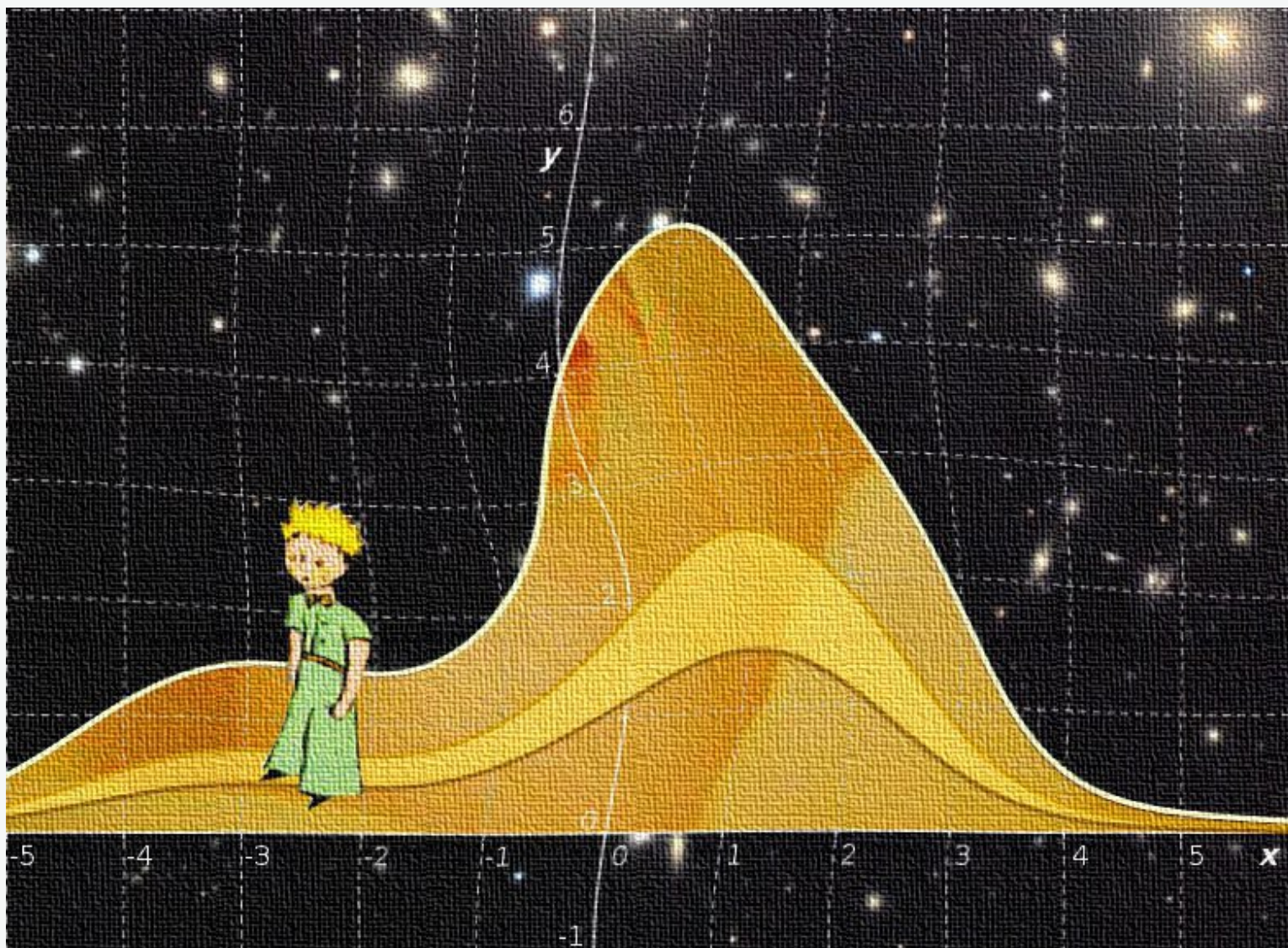
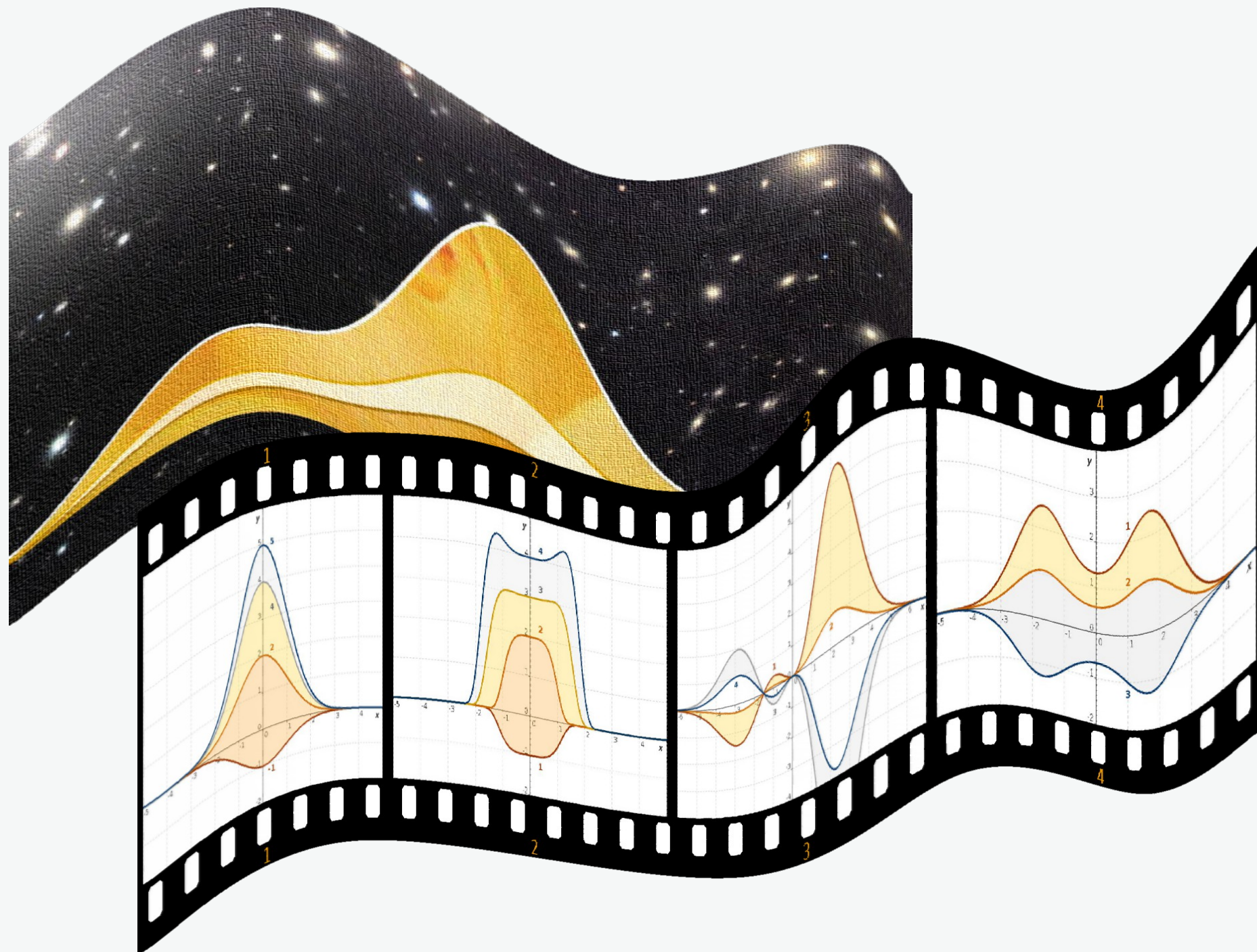




Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Sanddünen und Integralkurven





Definition:

Eine Differenzialgleichung 1. Ordnung heißt linear, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist. Die Funktion $g(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet.

homogene DGL 1. Ordnung

$$g(x) = 0: \quad y' + f(x) \cdot y = 0$$

inhomogene DGL 1. Ordnung

$$g(x) \neq 0: \quad y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

lässt sich durch Trennung der Variablen wie folgt lösen. Wir trennen die beiden Variablen

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -f(x) dx$$

Dann werden beide Seiten integriert. Die Integrationskonstante schreiben wir in logarithmischen Form $\ln |C|$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = - \int f(x) dx + \ln |C|$$

Die logarithmischen Terme werden noch zusammengefasst

$$\ln |y| - \ln |C| = \ln \left| \frac{y}{C} \right| = - \int f(x) dx$$

Durch Umkehrung erhalten wir die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung in der Form

$$y = C \cdot e^{-\int f(x) dx} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Lösen Sie die folgenden homogenen linearen DGL
1. Ordnung

Aufgabe 1: $x^2 y' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

Aufgabe 2: $y' + x y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(0) = 2$

Aufgabe 3: $y' + 2x^3 y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(0) = 3$

Aufgabe 4: $y' + (a x^3 + b x^5) y = 0$

Aufgabe 5: $y' + \left(\frac{x}{2} - \frac{6(x^2 + x)}{2x^3 + 3x^2} \right) y = 0$

$$y(1) = 2, \quad y(1) = 1, \quad y(-2) = 1, \quad y(-3) = 1$$

Aufgabe 6: $y' + \left(x - \frac{4x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} \right) y = 0$

$$y(1) = 2, \quad y(-2) = 1, \quad y(1) = -1$$

Aufgabe 7: $y' + \left(\frac{x}{5} - \frac{\cos x}{\sin x + 2} \right) y = 0$

$$y(0) = 4, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2}$$

$$x^2 y' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$x^2 y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der homogenen DGL 1. Ordnung:

$$y' + f(x) \cdot y = 0, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL hat folgende Form:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x) dx} = C \cdot e^{-\int \frac{dx}{x^2}} = C \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$1) \quad y(1) = 1, \quad C_1 = e^{-1}, \quad y_1 = C_1 e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} - 1}$$

$$2) \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3, \quad C_2 = -3 e^{-2}, \quad y_2 = C_2 e^{\frac{1}{x}} = -3 e^{\frac{1}{x} - 2}$$

Homogene lineare DGL 1. Ordnung: Lösung 1

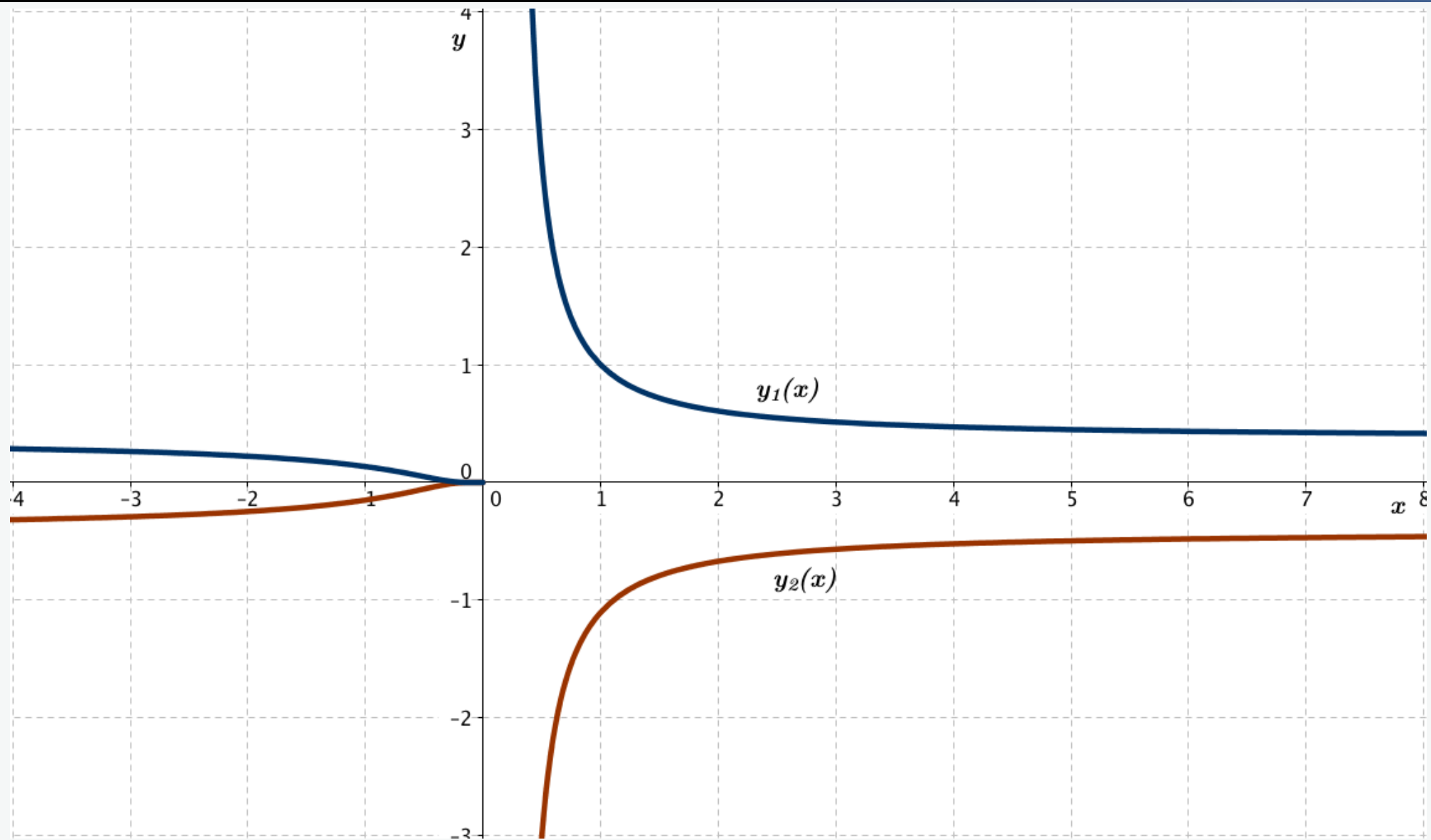


Abb. L1: Die Integralkurven der DGL

$$y_1 = e^{\frac{1}{x}} - 1, \quad y_2 = -3e^{\frac{1}{x}} - 2$$

$$y' + x y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -x y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int x \, dx, \quad \ln |y| = - \frac{x^2}{2} + \ln |C|, \quad \ln \left| \frac{y}{C} \right| = - \frac{x^2}{2}$$

$$y = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Spezielle Lösungen:

$$y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1, \quad y_1 = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2, \quad y_2 = 2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die Abbildung auf der nächsten Seite: Die Integralkurven der DGL entsprechen folgenden Werten der Integrationskonstante

$$y_i = C_i e^{-\frac{x^2}{2}} : \quad C_1 = -1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 4, \quad C_4 = 5$$

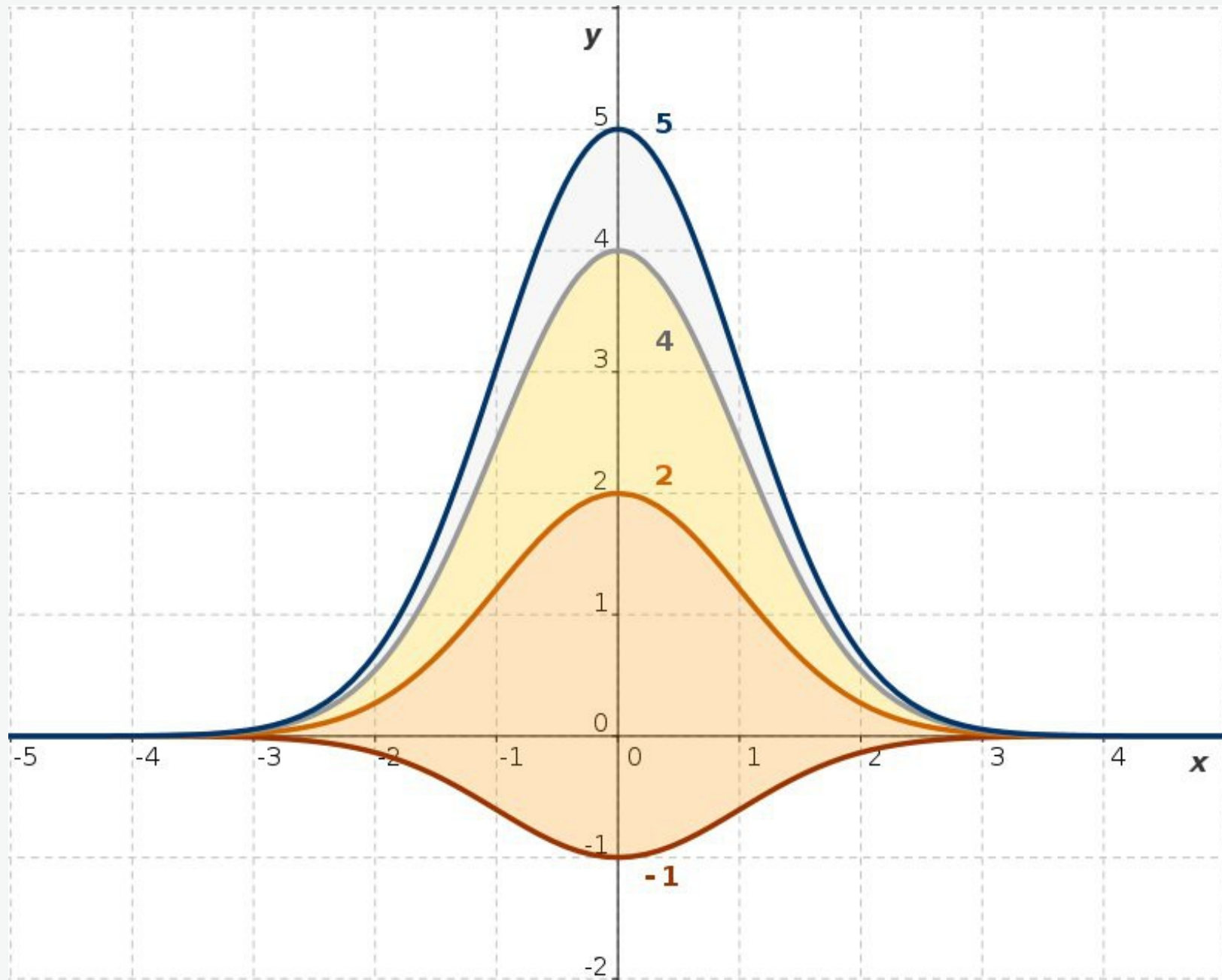


Abb. L2: Die Integralkurven der DGL

$$y' + 2x^3 y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2x^3 y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x^3 dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = -\frac{x^4}{2} + \ln |C|$$

$$y = C e^{-\frac{x^4}{2}}$$

Spezielle Lösungen:

$$y(0) = -1, \quad C = -1, \quad y = -e^{-\frac{x^4}{2}}$$

$$y(0) = 3, \quad C = 3, \quad y = 3 e^{-\frac{x^4}{2}}$$

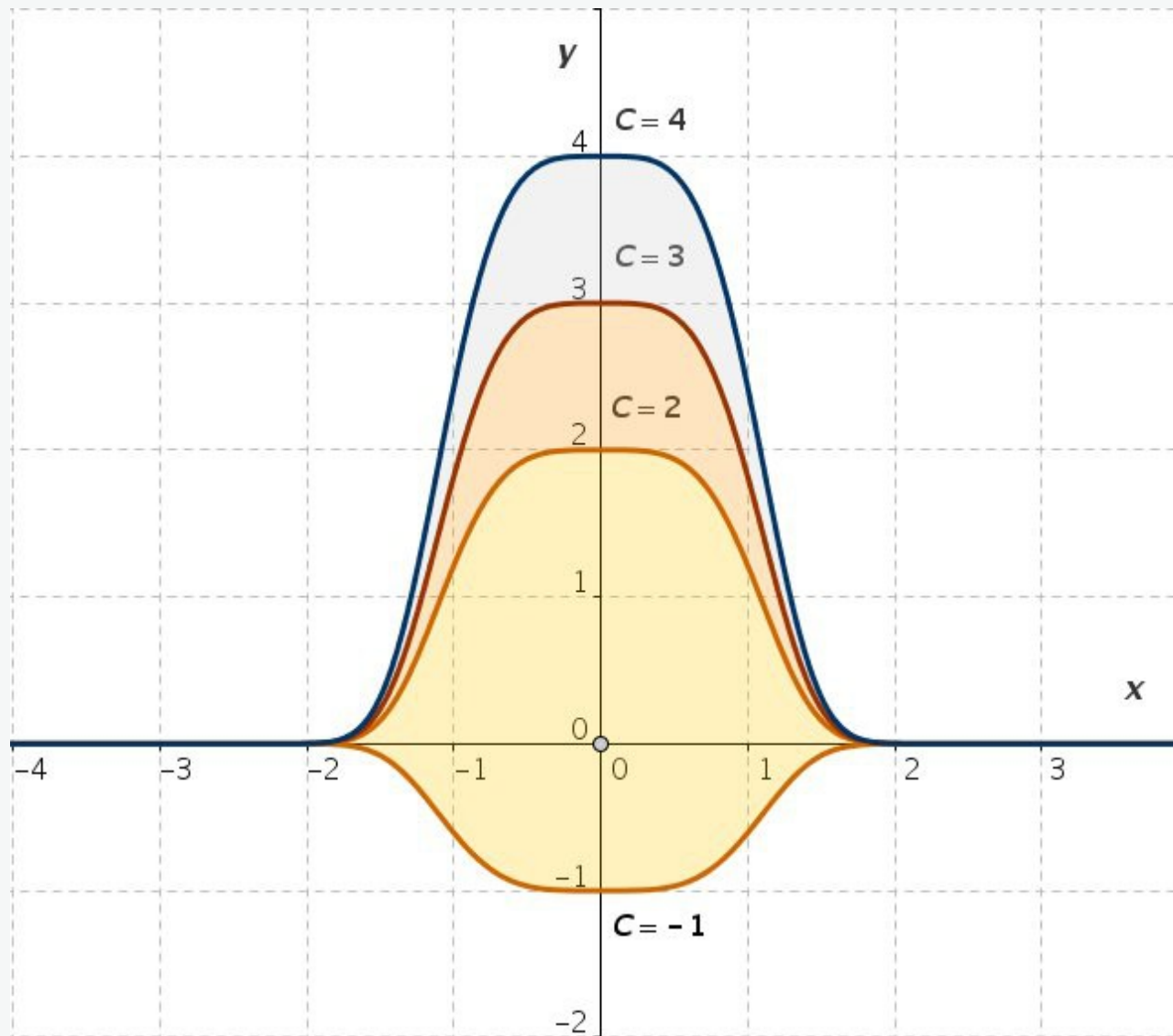


Abb. L3: Integralkurven der DGL

$$y = C e^{-\frac{x^4}{2}}$$

$$y' + (a x^3 + b x^5) y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -(a x^3 + b x^5) y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int (a x^3 + b x^5) dx, \quad \ln |y| = -\frac{a}{4} x^4 - \frac{b}{6} x^6 + \ln |C|$$

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = -\frac{a}{4} x^4 - \frac{b}{6} x^6, \quad y = C e^{-\frac{a}{4} x^4 - \frac{b}{6} x^6}$$

Die Abbildung auf der nächsten Seite: Die Integralkurven der DGL entsprechen folgenden Werten der Integrationskonstante und der Parameter

$$1) \quad C = -1, \quad a = 1, \quad b = 1$$

$$2) \quad C = 2, \quad a = 2, \quad b = 2$$

$$3) \quad C = 3, \quad a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$4) \quad C = 4, \quad a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3}$$

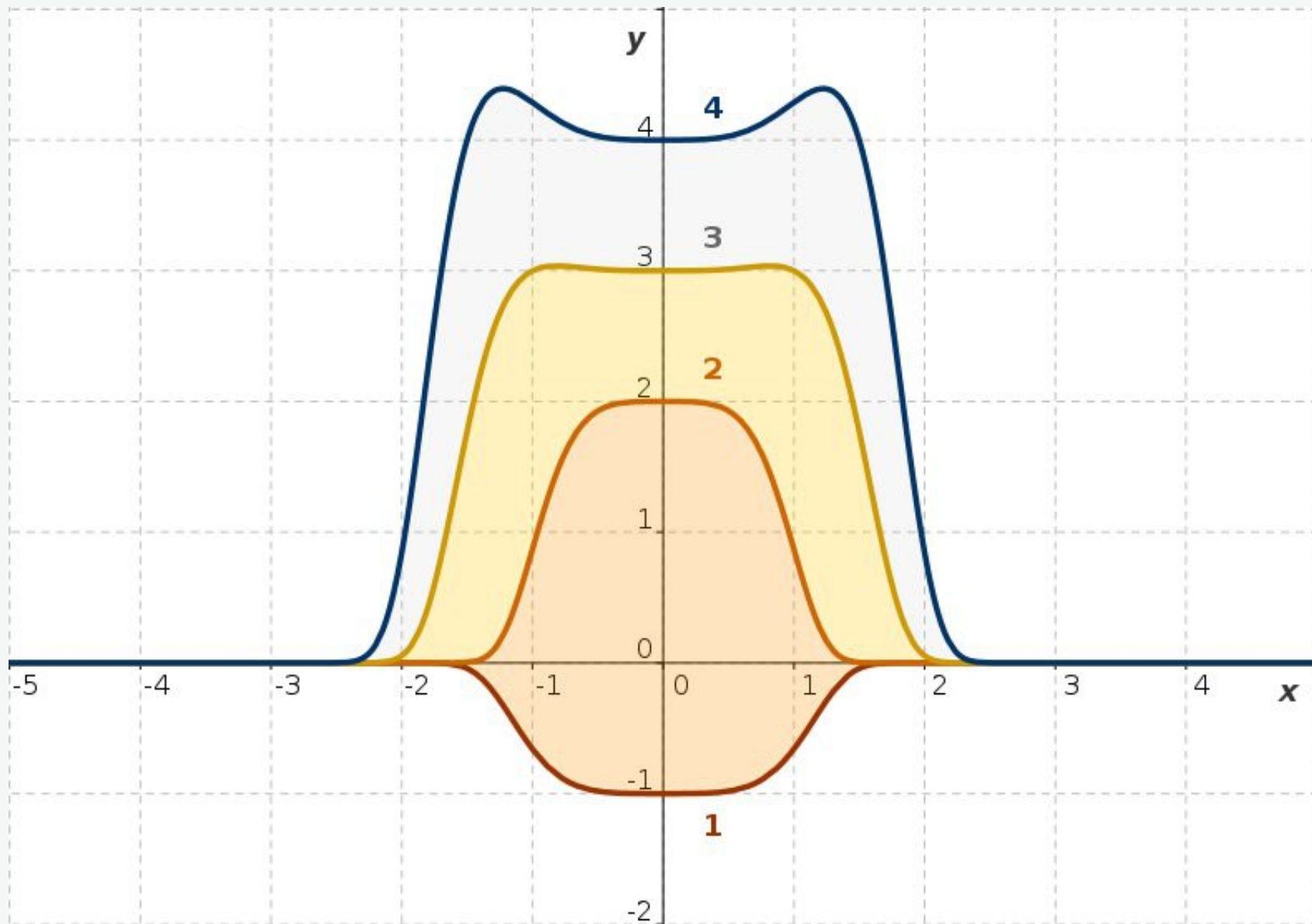


Abb. L4: Integralkurven der DGL

$$y' + \left(\frac{x}{2} - \frac{6(x^2 + x)}{2x^3 + 3x^2} \right) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{x}{2} + \frac{6(x^2 + x)}{2x^3 + 3x^2} \right) y, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{x}{2} + \frac{6(x^2 + x)}{2x^3 + 3x^2} \right) dx$$

$$\ln |y| = -\frac{x^2}{4} + 6 \int \frac{x^2 + x}{2x^3 + 3x^2} dx = -\frac{x^2}{4} + \int \frac{du}{u} =$$

$$u = 2x^3 + 3x^2, \quad du = 6(x^2 + x) dx$$

$$= -\frac{x^2}{4} + \ln |u| + \ln |C| = -\frac{x^2}{4} + \ln |Cu|$$

$$\ln \left| \frac{y}{C(2x^3 + 3x^2)} \right| = -\frac{x^2}{4}$$

Allgemeine Lösung: $y = C x^2 (2x + 3) e^{-\frac{x^2}{4}}$

$$y = C x^2 (2x + 3) e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Spezielle Lösungen:

$$1) \ y(1) = 2, \quad y_1(x) = \frac{2}{5} x^2 (2x + 3) e^{-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$2) \ y(1) = 1, \quad y_2(x) = \frac{1}{5} x^2 (2x + 3) e^{-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$3) \ y(-2) = 1, \quad y_3(x) = -\frac{1}{4} x^2 (2x + 3) e^{-\frac{x^2}{4} + 1}$$

$$4) \ y(-3) = 1, \quad y_4(x) = -\frac{1}{27} x^2 (2x + 3) e^{-\frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}}$$

Eine graphische Darstellung der Integralkurven, die diesen Lösungen entsprechen, folgt.

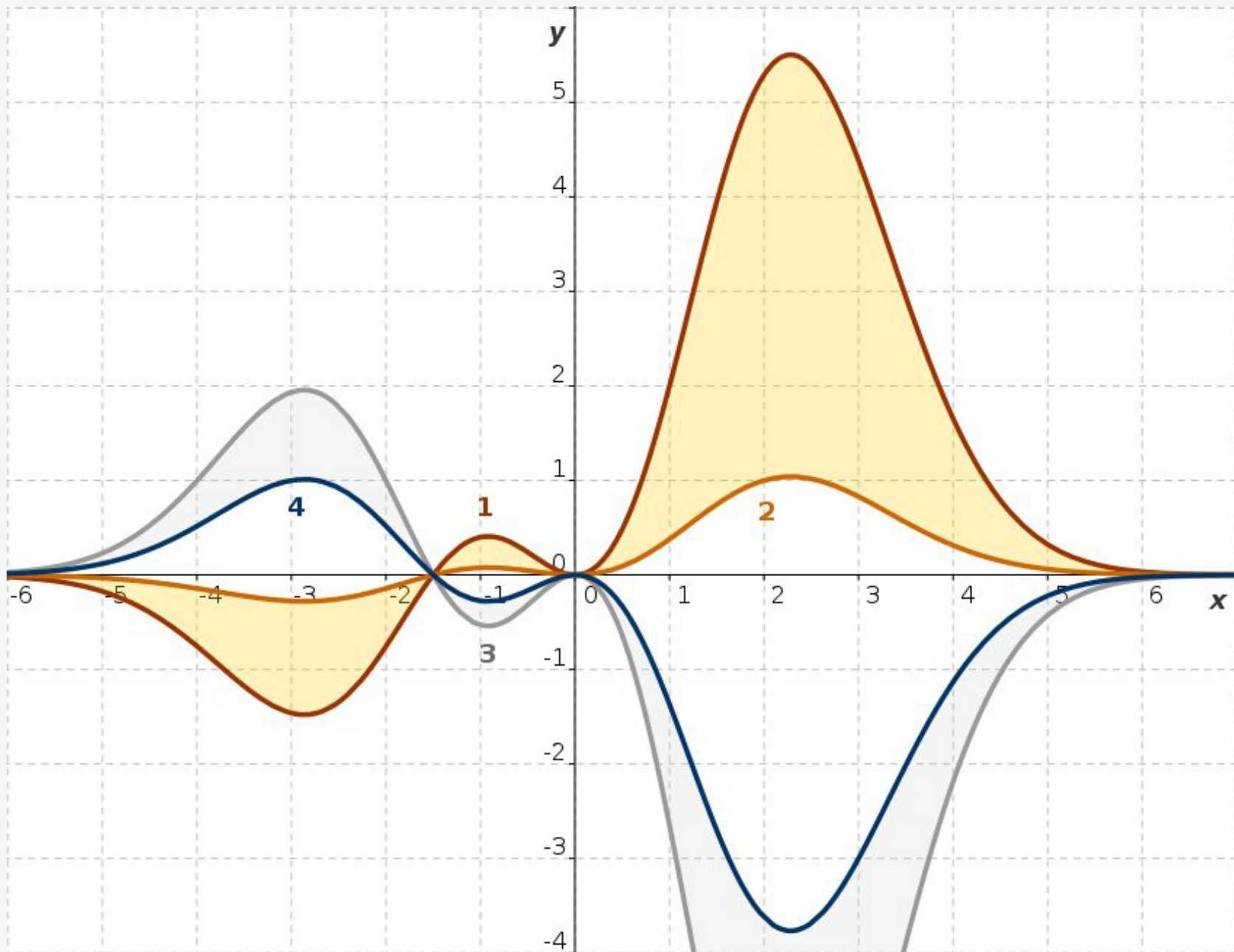


Abb. L5 Die speziellen Lösungen der DGL

$$y' + \left(x - \frac{4x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 2} \right) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(-x + \frac{4x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 2} \right) y, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left(-x + \frac{4x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 2} \right) dx$$

$$\begin{aligned} \ln |y| &= -\frac{x^2}{2} + 4 \int \frac{x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 2} dx = -\frac{x^2}{2} + \int \frac{du}{u} = \\ &= -\frac{x^2}{2} + \ln |u| + \ln |C| = -\frac{x^2}{2} + \ln |Cu| \end{aligned}$$

$$u = x^4 + 2x^2 + 2, \quad du = 4x(x^2 + 1) dx$$

$$\ln \left| \frac{y}{C(x^4 + 2x^2 + 2)} \right| = -\frac{x^2}{2}$$

Allgemeine Lösung: $y = C(x^4 + 2x^2 + 2) e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$y = C (x^4 + 2x^2 + 2) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Spezielle Lösungen:

$$1) \ y(1) = 2, \quad y_1(x) = \frac{2}{5} (x^4 + 2x^2 + 2) e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$2) \ y(-2) = 1, \quad y_2(x) = \frac{1}{26} (x^4 + 2x^2 + 2) e^{-\frac{x^2}{2} + 2}$$

$$3) \ y(1) = -1, \quad y_3(x) = -\frac{1}{5} (x^4 + 2x^2 + 2) e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

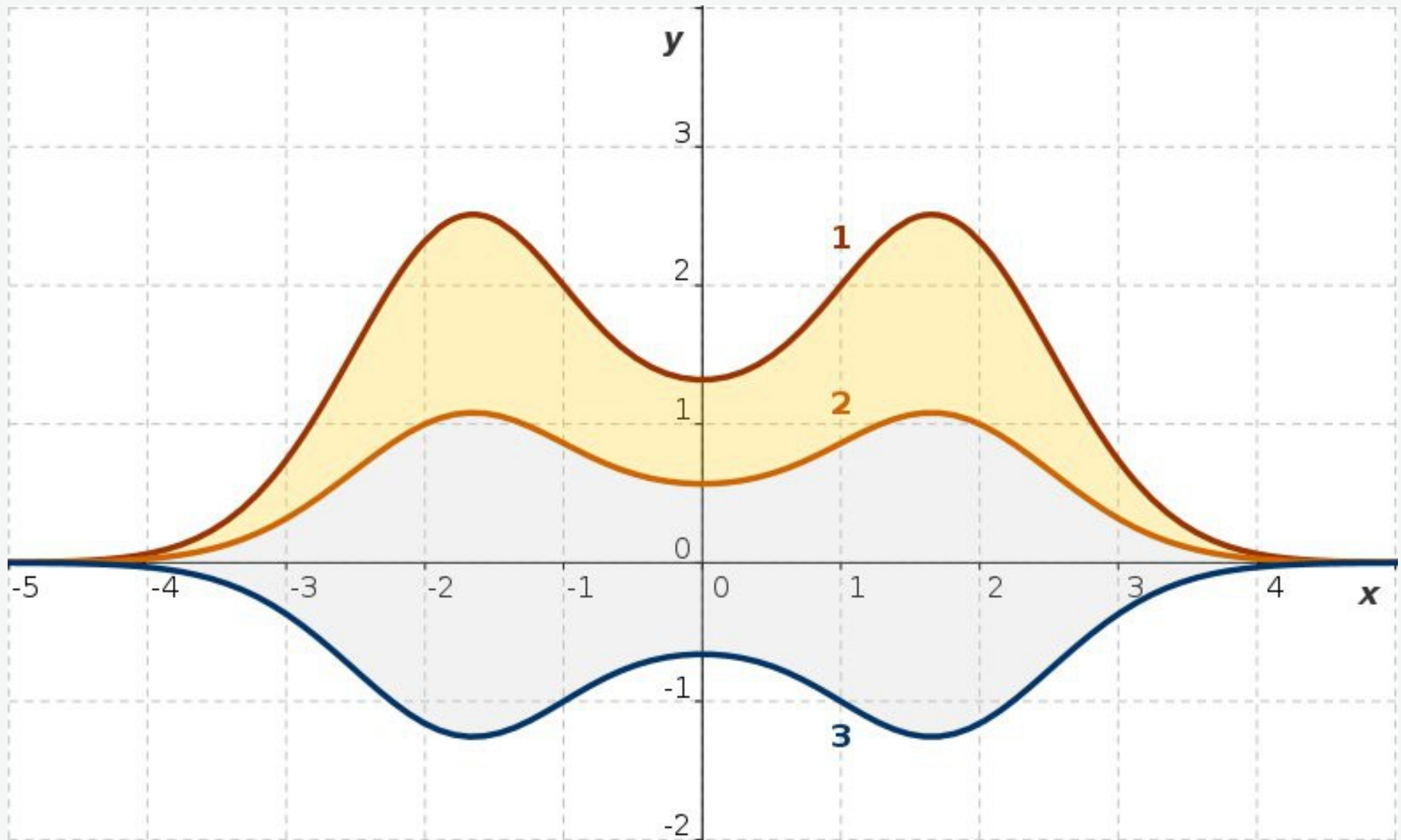


Abb. L6: Die speziellen Lösungen der DGL

$$y' + \left(\frac{x}{5} - \frac{\cos x}{\sin x + 2} \right) y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{x}{5} + \frac{\cos x}{\sin x + 2} \right) dx$$

$$\ln |y| = -\frac{x^2}{10} + \int \frac{du}{u} = -\frac{x^2}{10} + \ln |C u|$$

$$u = \sin x + 2$$

$$\ln \left| \frac{y}{C u} \right| = -\frac{x^2}{10}, \quad y = C u e^{-\frac{x^2}{10}} = C (\sin x + 2) e^{-\frac{x^2}{10}}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = C (2 + \sin x) e^{-\frac{x^2}{10}}$$

$$y = C (2 + \sin x) e^{-\frac{x^2}{10}}$$

$$1) \ y(0) = 4, \quad y_1 = 2 (2 + \sin x) e^{-\frac{x^2}{10}}$$

$$2) \ y(-1) = 1, \quad y_2 = \frac{2 + \sin x}{2 - \sin(1)} e^{-\frac{1}{10}(x^2 - 1)}$$

$$3) \ y(1) = 3, \quad y_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 + \sin x}{2 + \sin(1)} e^{-\frac{1}{10}(x^2 - 1)}$$

Eine graphische Darstellung der Integralkurven, die diesen Lösungen entsprechen, folgt.

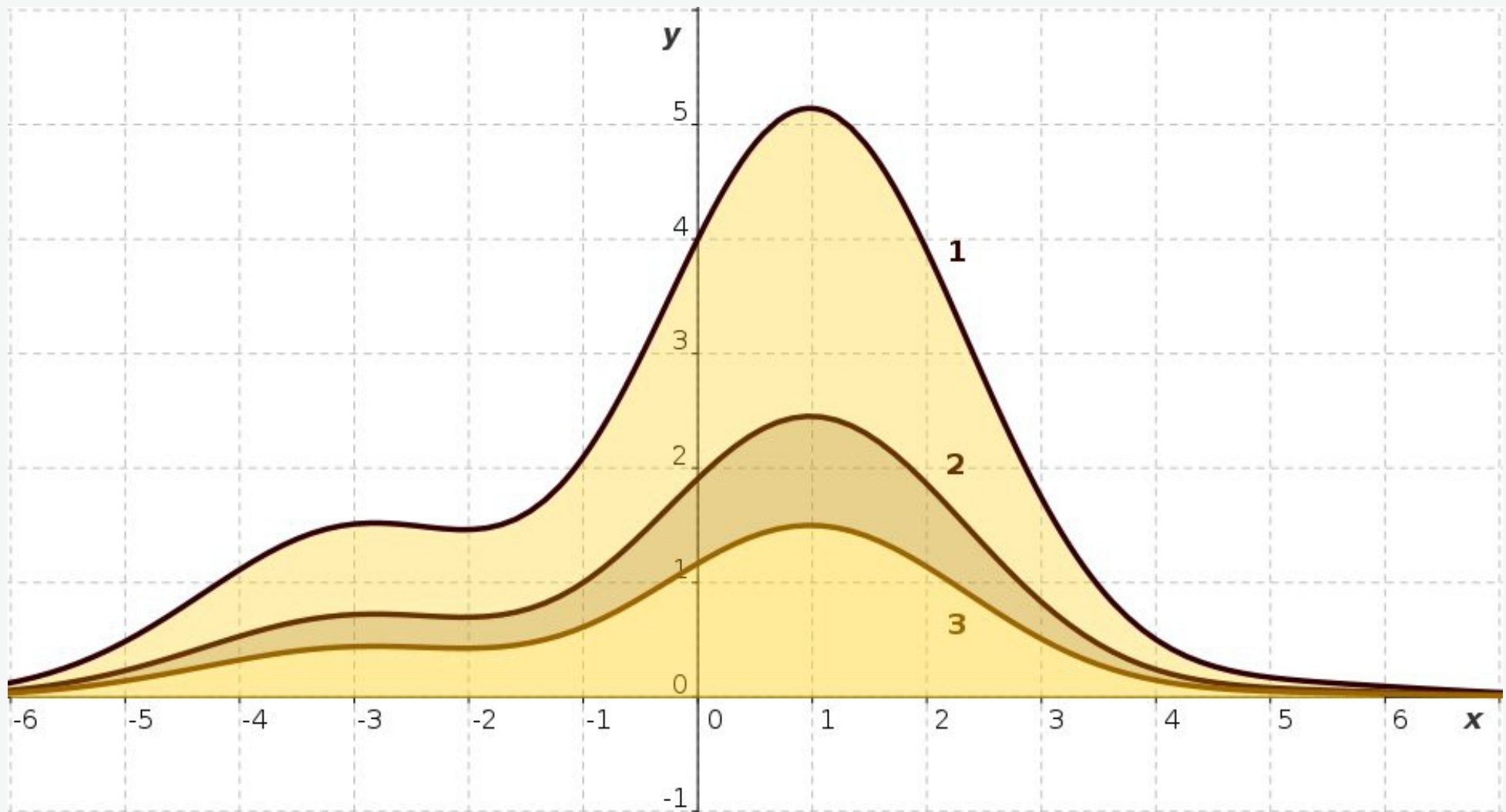


Abb. L7-1: Die speziellen Lösungen der DGL



Sternenhintergrund: <http://www.awesomestories.com/images/user/65e38ed5d5.jpg>

*Abb. L7-2: Eine mit GIMP verarbeitete Darstellung von Integralkurven der Aufgabe 7.
Der optische Eindruck von Sanddünen der Sahara*