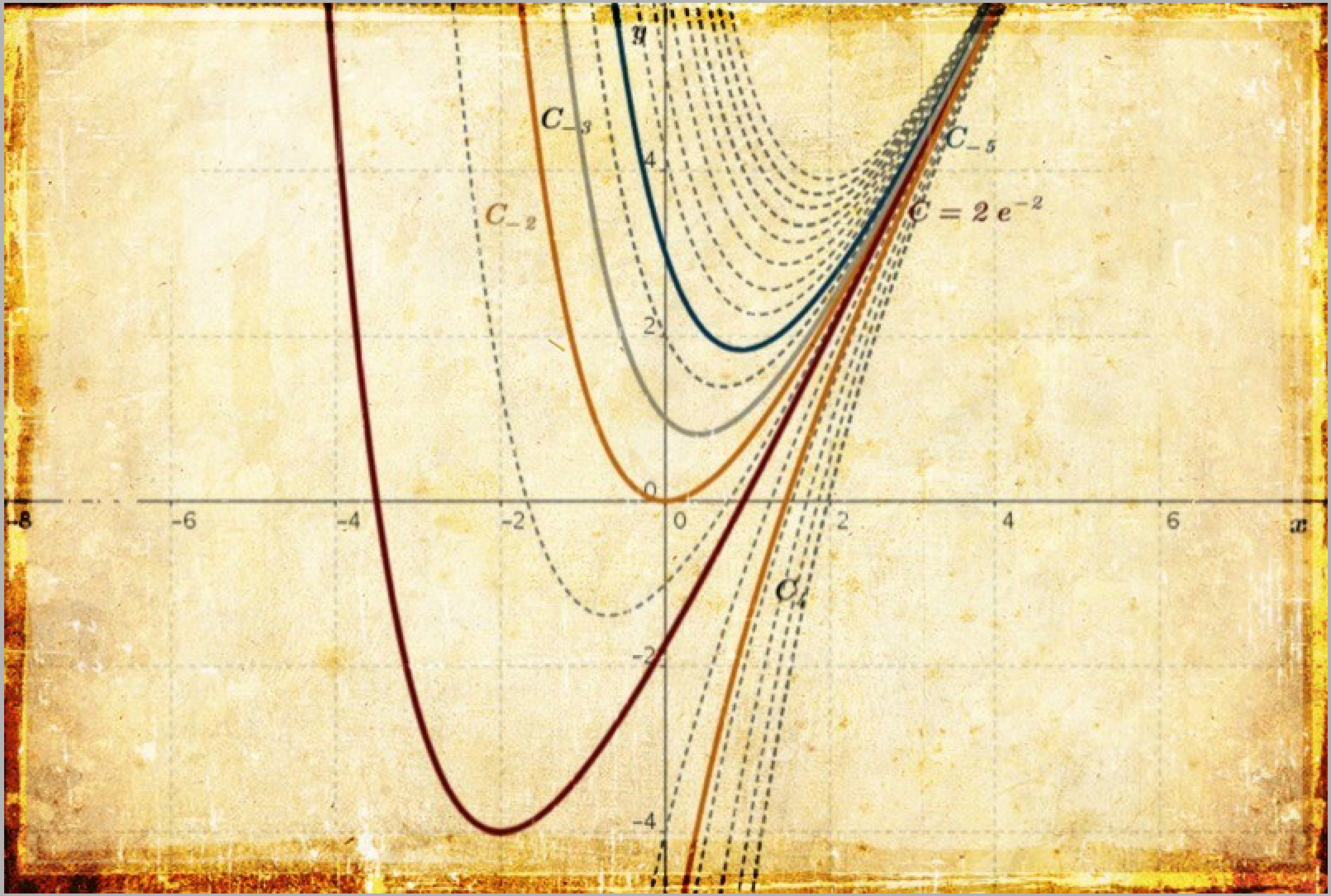
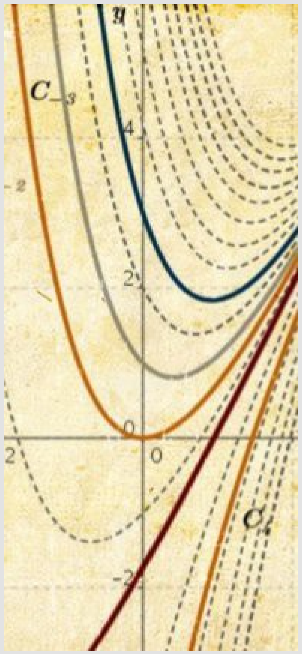


Integration durch Substitution

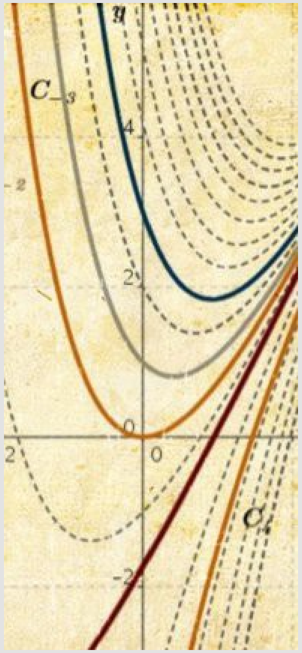
1-E



In einigen Fällen ist es möglich, eine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine DGL 1. Ordnung zurückzuführen, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Wir werden folgende DGLen behandeln:

$$y' = f(a x + b y + c)$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$



Eine Differentialgleichung $y' = f(a\,x + b\,y + c)$ lässt sich durch die lineare Substitution

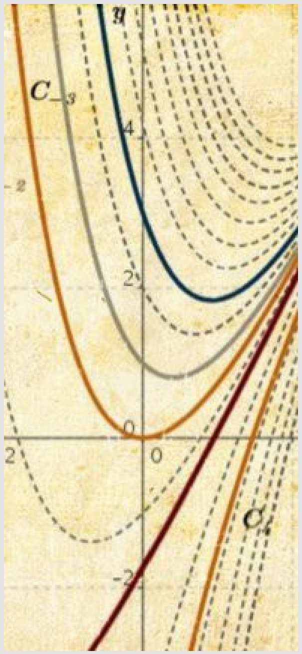
$$u = a\,x + b\,y + c$$

lösen. Dabei ist zu beachten, dass y und u Funktionen der Variablen x sind

$$u' = a + b\,y', \qquad y' = \frac{u' - a}{b}, \qquad y' = f(u)$$

$$u' = b\,f(u) + a$$

Diese Differentialgleichung kann durch die Trennung der Variablen gelöst werden.



Lösen Sie folgende DGL 1. Ordnung durch eine geeignete Substitution

Aufgabe 1: $y' = 2x - y, \quad y(0) = 3$

Aufgabe 2: $y' = x + y, \quad y(0) = 3$

Aufgabe 3: $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1, \quad y(4) = 2$

Aufgabe 4: $y' = (2y + x)^2$

$$\boxed{y' = 2x - y, \qquad y(0) = 3}$$

$$u = 2x - y, \qquad u' = 2 - y' \quad \Rightarrow \quad y' = 2 - u'$$

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad u = 2 - u' \quad \Leftrightarrow \quad u' = 2 - u$$

$$\frac{du}{dx} = 2 - u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2 - u} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u - 2} = -\int dx$$

$$\ln|u - 2| = -x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{u - 2}{C}\right| = -x$$

$$\frac{u - 2}{C} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = C\, e^{-x} + 2 \qquad (C \in \mathbb{R})$$

$$u = 2x - y = C\, e^{-x} + 2, \qquad y = -C\, e^{-x} + 2x - 2$$

$$y(0) = -C - 2 = 3, \qquad C = -5$$

Spezielle Lösung: $\quad y = 5\, e^{-x} + 2x - 2$

Wir bestimmen weiter andere speziellen Lösungen dieser Differentialgleichung:

2) $y' = 2x - y, \qquad y(0) = 1$

$C = -3, \qquad y = 3\, e^{-x} + 2x - 2$

3) $y' = 2x - y, \qquad y(0) = 0$

$C = -2, \qquad y = 2\,(e^{-x} + x - 1)$

4) $y' = 2x - y, \qquad y(-2) = -4$

$C = 2\, e^{-2}, \qquad y = 2\,(x + e^{-x-2} - 1)$

Entsprechende Integralkurven werden in der Abbildung *L1-1* dargestellt.

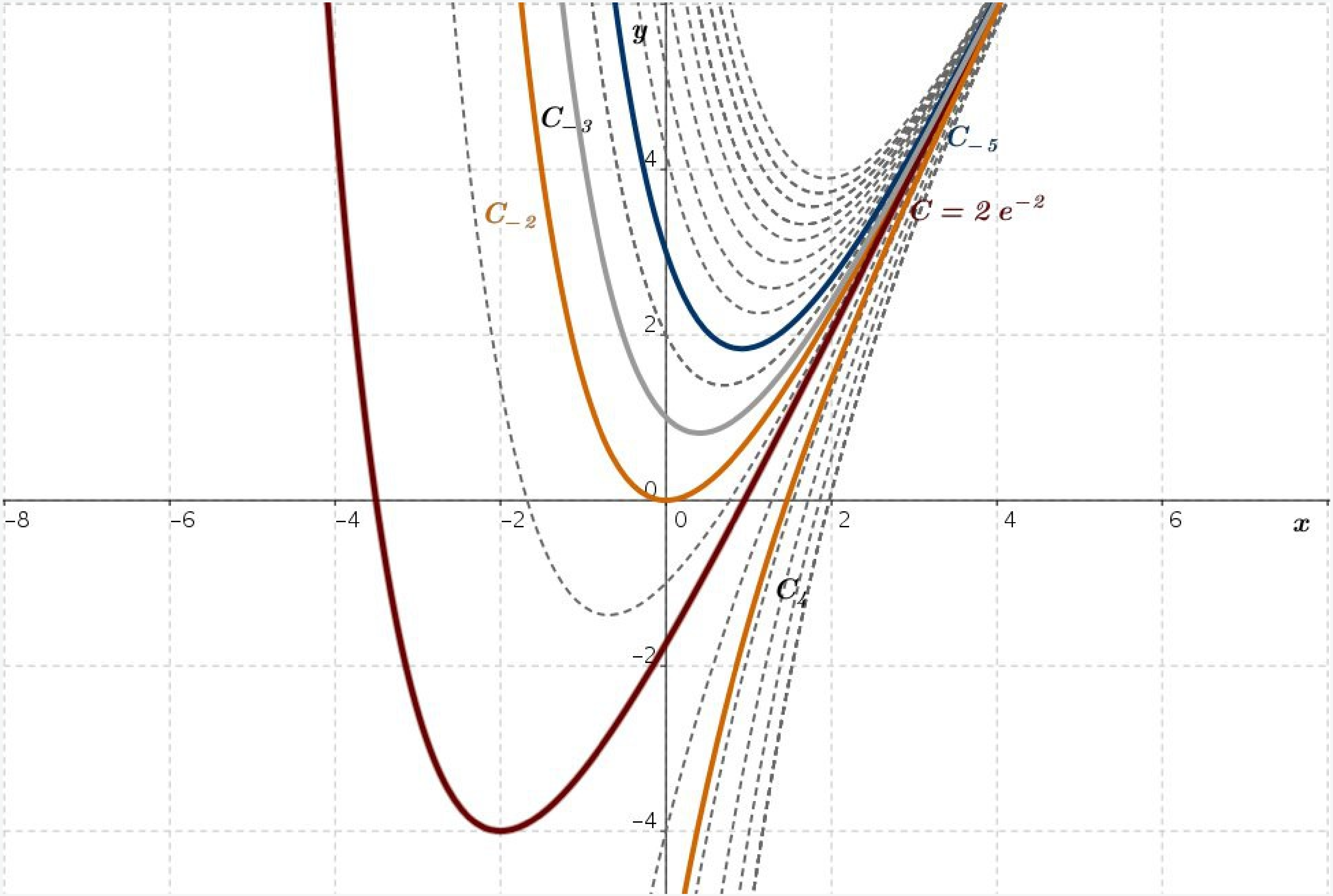


Abb. L1-1: Integralkurven der DGL

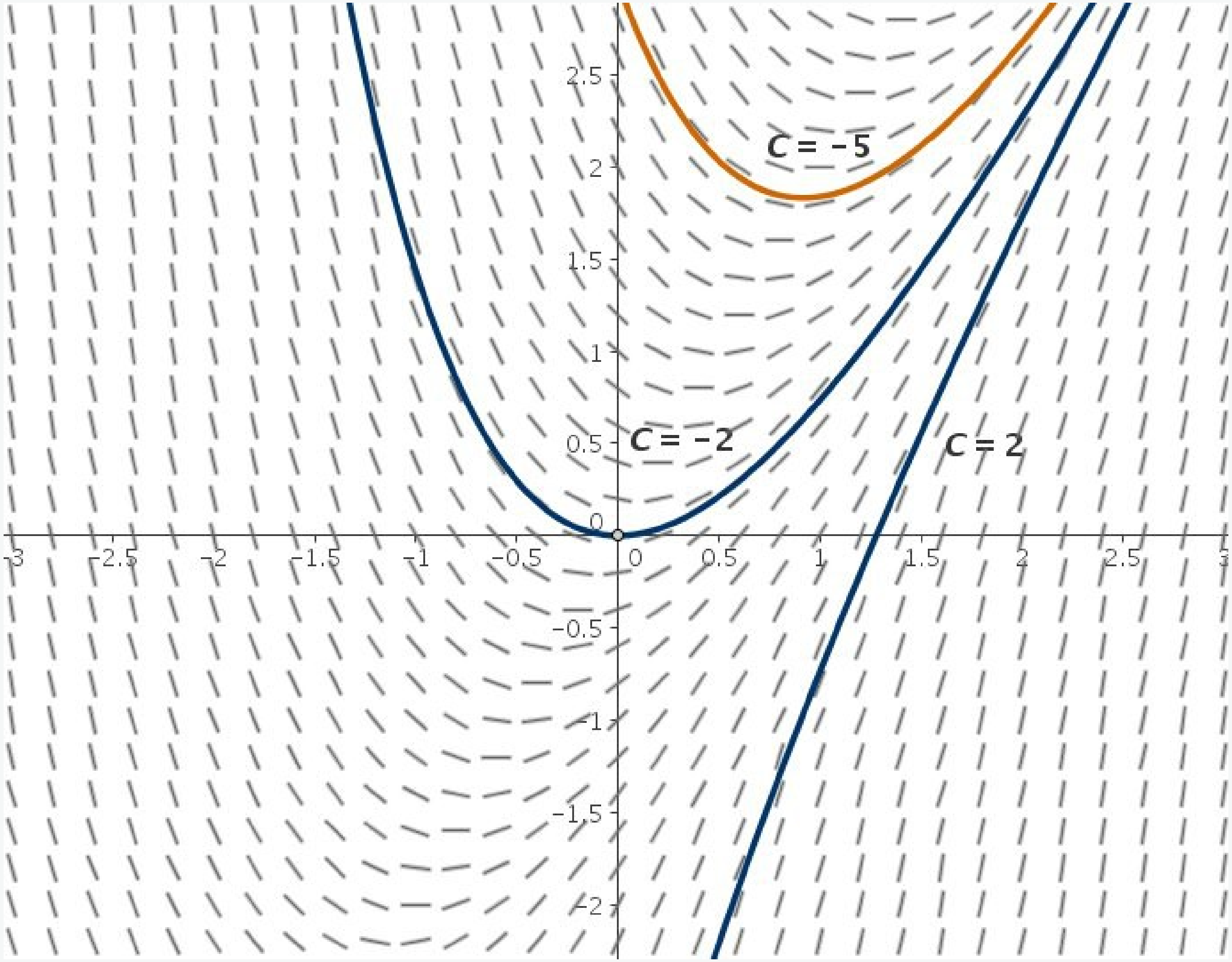


Abb. L1-2: Richtungsfeld der DGL, Integralkurven. Die rote Kurve ($C = -5$) entspricht der speziellen Lösung der Gleichung mit $y(0) = 3$

$$y' = x + y, \qquad z = x + y \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + y', \quad z' - 1 = z$$

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int dx, \qquad \ln|1+z| = x + \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{1+z}{C}\right| = x, \qquad 1 + z = C\,e^x, \qquad y = C\,e^x - x - 1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^x - x - 1$

$$y(0) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 4$$

Spezielle Lösung: $\quad y = 4\,e^x - x - 1$

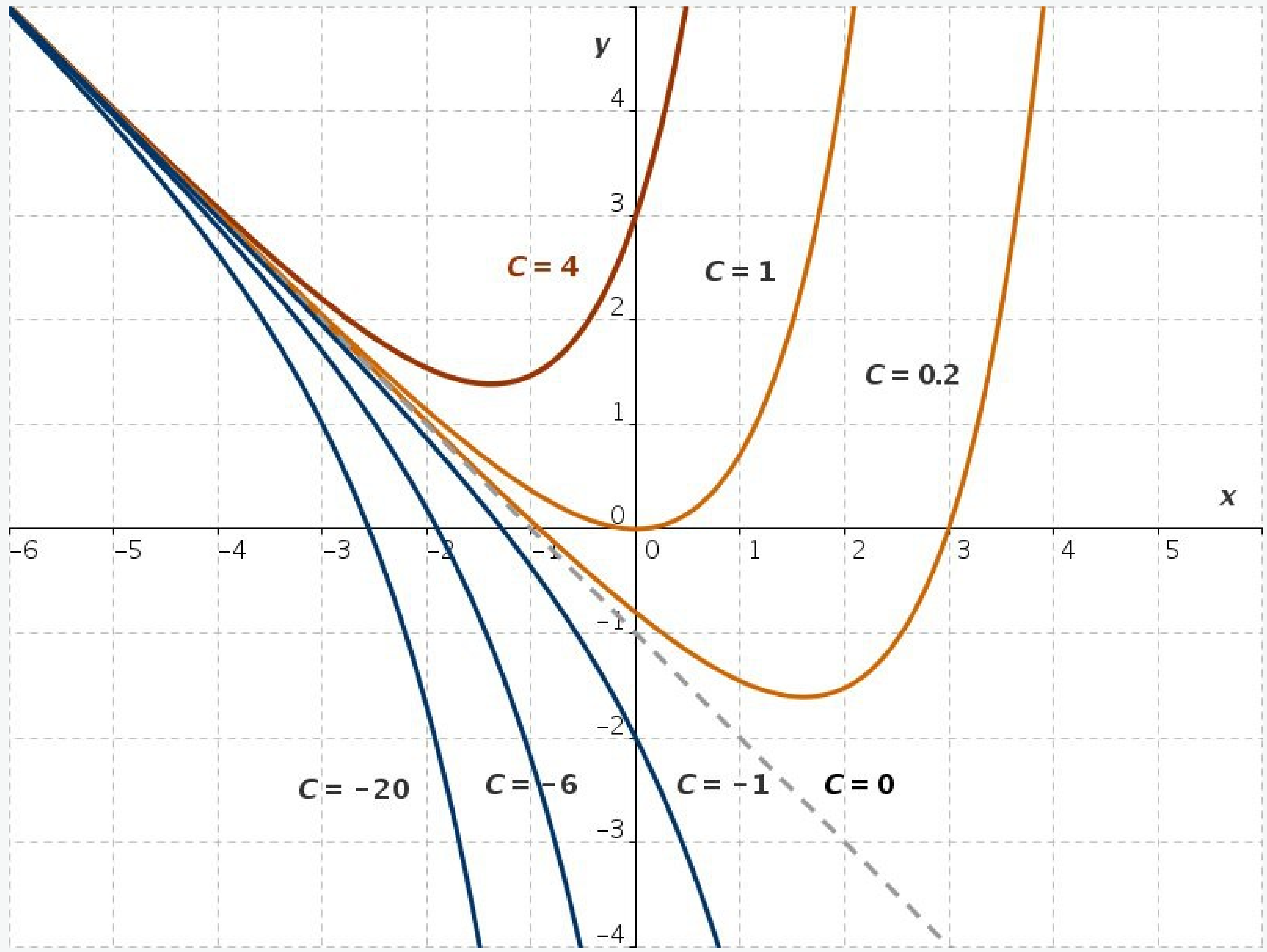


Abb. L2-1: Integralkurven der DGL $y' = x + y$. Die rote Kurve mit $C = 4$ entspricht der speziellen Lösung der Gleichung mit $y(0) = 3$

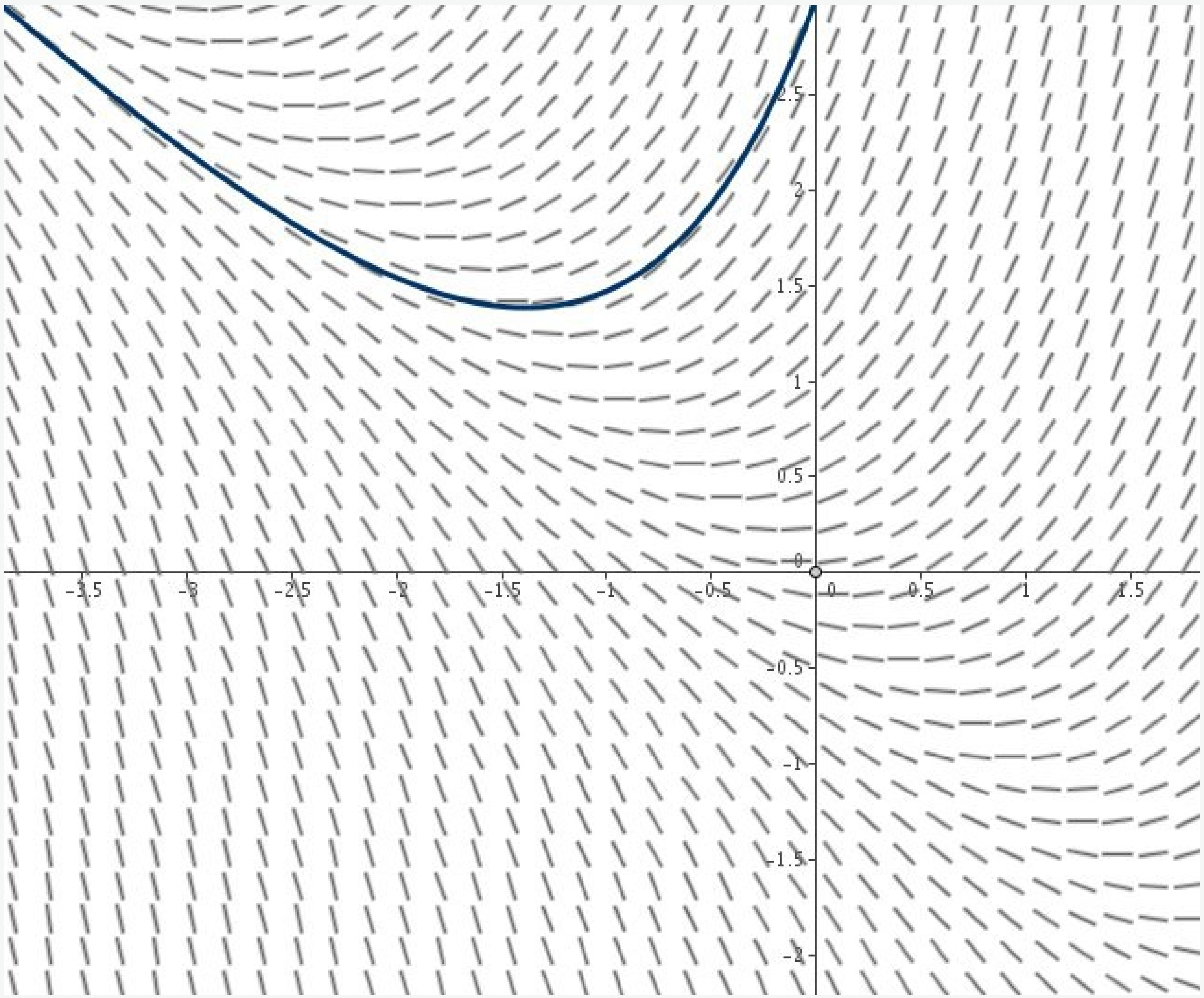


Abb. L2-2: Richtungsfeld der DGL $y' = x + y$. Die blaue Kurve entspricht $y = f(x)$, der speziellen Lösung der Gleichung mit $y(0) = 3$

$$y = 4\ e^x - x - 1$$

$$y' = \frac{1}{x - y} + 1$$

$$u = x - y, \quad \frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad u' = 1 - y' \quad \Rightarrow \quad y' = 1 - u'$$

$$y' = 1 - u', \qquad y' = \frac{1}{u} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - u' = \frac{1}{u} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$u' = -\frac{1}{u}, \qquad \int u\, du = -\int dx, \qquad u^2 = -2x + C \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2 = -2x + C, \qquad y = x \pm \sqrt{-2x + C}$$

$$y(4) = 2: \quad 2 = 4 \pm \sqrt{-8 + C} \quad \Leftrightarrow \quad -2 = \pm\sqrt{-8 + C} \quad \Rightarrow$$

$$-2 = -\sqrt{-8 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 12$$

Spezielle Lösung: $\quad y = x - \sqrt{12 - 2x}, \quad C = 12$

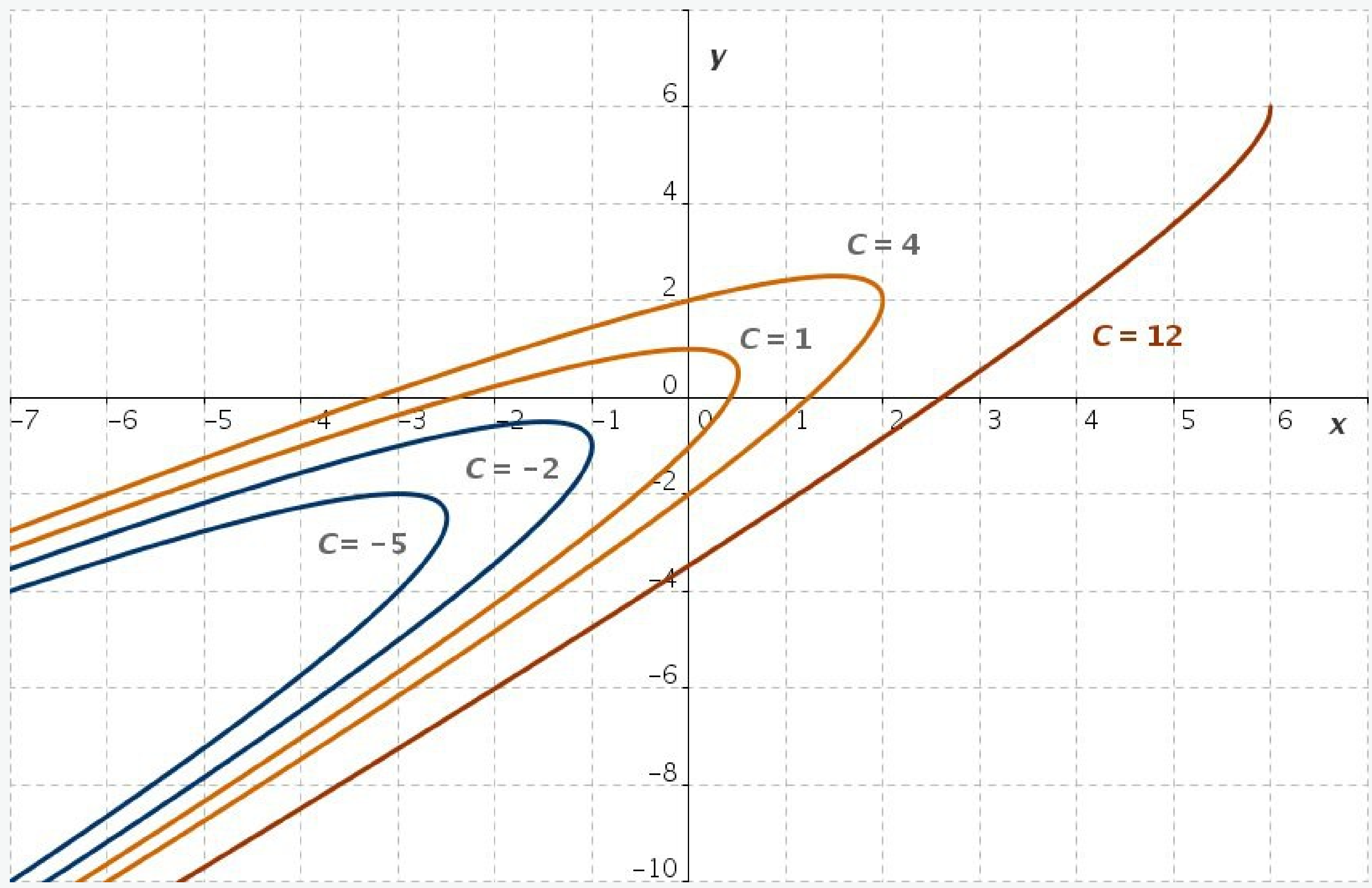


Abb. L3-1: Integralkurven der DGL $y' = 1/(x - y) + 1$. Die rote Kurve ($C = 12$) entspricht der speziellen Lösung der Gleichung mit $y(4) = 2$. Die Kurven mit der Bezeichnung $C = -5, -2, 1, 4$ entsprechen der Gleichung $C = 2x + (x - y)^2$

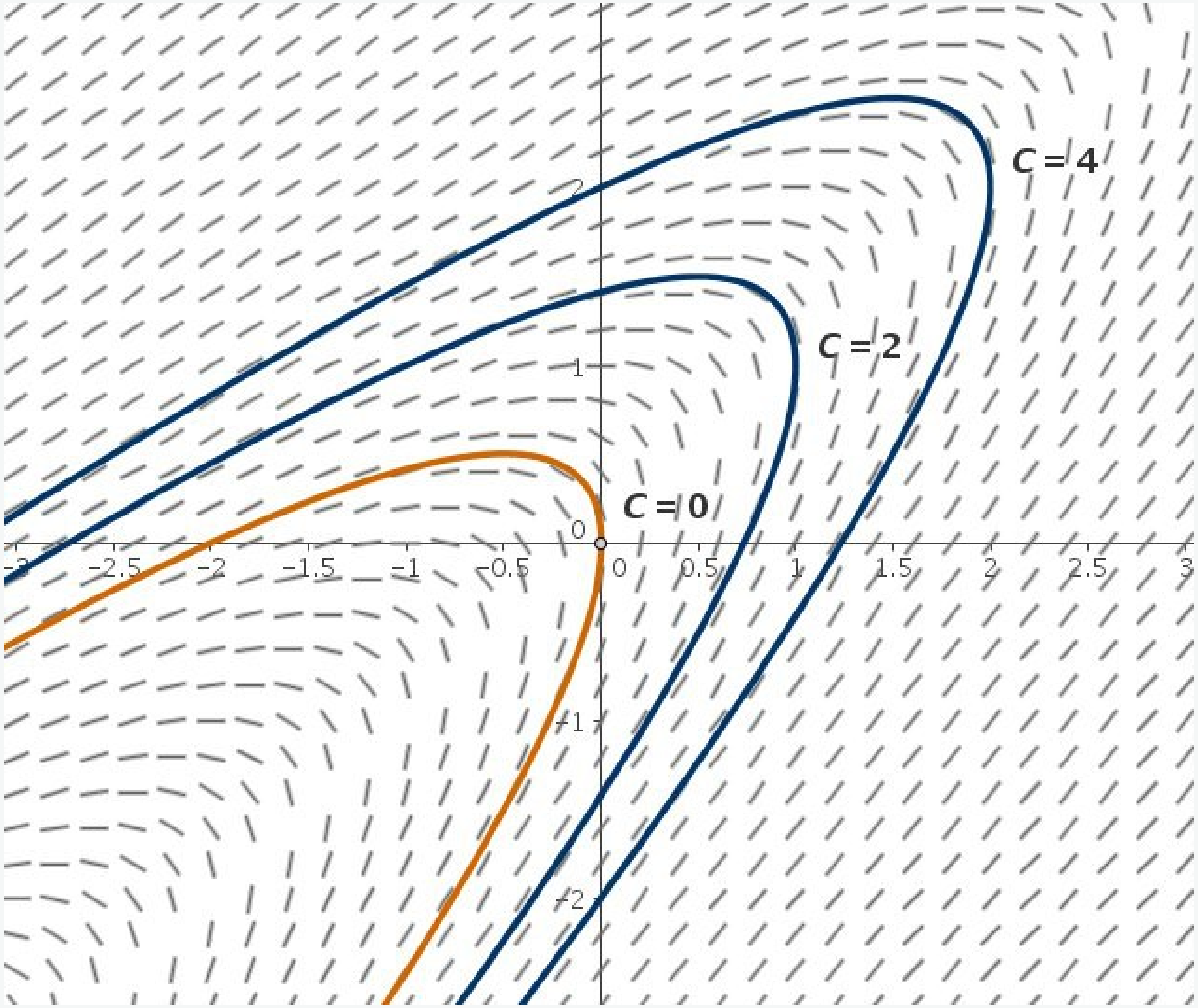


Abb. L3-2: Richtungsfeld der DGL, Integralkurven

$$y' = (2y + x)^2$$

$$u = 2y + x \quad \Rightarrow \quad u' = 2y' + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}(u' - 1)$$

$$y' = u^2, \quad y' = \frac{1}{2}(u' - 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(u' - 1) = u^2 \quad \Leftrightarrow \quad u' = 2u^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2u^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2u^2 + 1} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{2u^2 + 1} = \int dx$$

aus Formelsammlung:

$$\int \frac{du}{a u^2 + b u + c} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2au + b}{\sqrt{\Delta}} \qquad (\Delta > 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2au + b - \sqrt{-\Delta}}{2au + b + \sqrt{-\Delta}} \qquad (\Delta < 0)$$

$$\Delta = 4ac - b^2$$

Das Integral $\displaystyle\int \frac{du}{2u^2 + 1}$ entspricht dem Fall

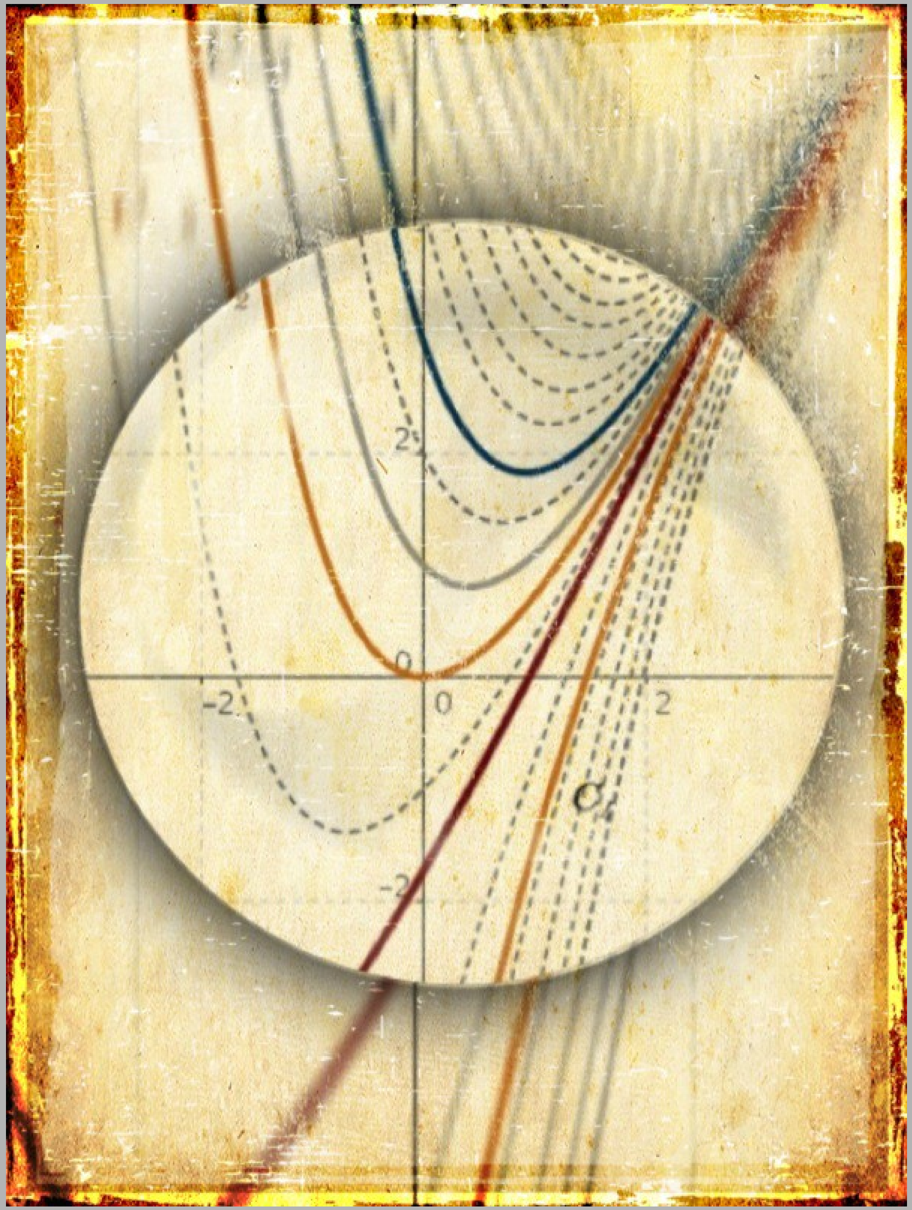
$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 8 > 0$$

$$\boxed{\int \frac{du}{2u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\,u)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\,u) = x + C \quad \Rightarrow \quad \arctan(\sqrt{2}\,u) = \sqrt{2}\,(x + C)$$

$$\sqrt{2}\,u = \tan(\sqrt{2}\,(x + C)) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(\sqrt{2}\,(x + C)) \quad \Leftrightarrow$$

$$2y + x = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(\sqrt{2}\,(x + C)) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan(\sqrt{2}\,(x + C)) - \frac{x}{2}$$


2
0
−2
0
2
−2
C