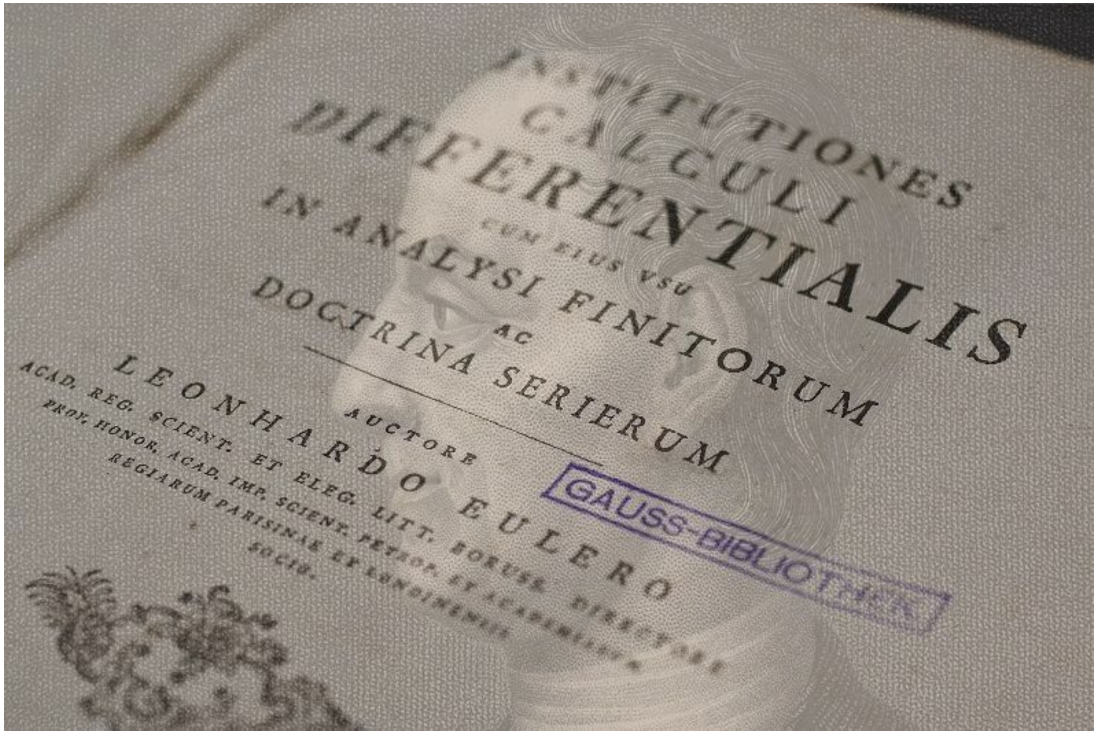
http://www.w-volk.de/museum/street04.htm

Euler-homogene Differentialgleichungen



http://www.sub.uni-goettingen.de/buchpatenschaft/buchvorstellung.php?id=41

Zur Abbildung: Carl Friedrich Gauß erwarb bereits als Student Werke des bedeutenden Mathematikers Leonhard Euler *(1707-1783)*, der als der Begründer der Analysis gilt und lange Zeit an der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften wirkte.

Die jacobische Differentialgleichung (nach *Carl Gustav Jacob Jacobi*) ist eine nichtlineare gewöhnliche DGL 1. Ordnung der Form

$$y' = f\left(\frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma}\right)$$

Ein wichtiger Spezialfall ist die Euler-homogene Differentialgleichung (nach Leonhard Euler)

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Man bezeichnet diese Differentialgleichung oft als "homogene Differentialgleichung". Diese Bezeichnung werden wir hier nicht verwenden, weil sie leicht zu Verwechslungen mit der anderen homogenen linearen Differentialgleichung führen kann.

DGL vom Typ $y' = f\,(y/x)$

Eine Differentialgleichung $y' = f\,(x/y)$ lässt sich durch die Substitution

$$y\,' = f\left(\frac{y}{x}\right): \qquad u = \frac{y}{x}$$

lösen. Dabei ist zu beachten, dass y und u Funktionen der Variablen x sind

$$u = u\,(x) = \frac{y}{x}, \qquad y = y\,(x) = x\,u$$

$$y\,' = f\,(u), \quad y\,' = u + x\,u\,' \quad \Rightarrow \quad u\,' = \frac{f\,(u) - u}{x}$$

Diese Differentialgleichung kann durch die Trennung der Variablen gelöst werden.

Aufgabe 5: $y' = 1 + 2\,\dfrac{y}{x}$

Aufgabe 6: $x - y + x\,y' = 0$

Aufgabe 7: $x\,y' = y + x\,\tan\dfrac{y}{x}$

Aufgabe 8: $x\,y' = y\,(\ln y - \ln x)\,, \qquad y(1) = 1$

Aufgabe 9: $x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}\,, \qquad y(1) = 0$

Weitere Aufgaben mit Lösung sind in den “Aufgaben” zu Differentialgleichungen.

$$\boxed{y' = 1 + 2\,\frac{y}{x} = 1 + 2u}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = 1 + 2u \quad \Leftrightarrow \quad x\,u' = 1 + u$$

$$x\,\frac{du}{dx} = 1 + u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|1+u| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|C\,x|$$

$$1 + u = C\,x \quad \Rightarrow \quad u = C\,x - 1 \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Rücksubstitution: $\quad u = \frac{y}{x} = C\,x - 1 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{y = x\,(C\,x - 1) = C\,x^2 - x}$$

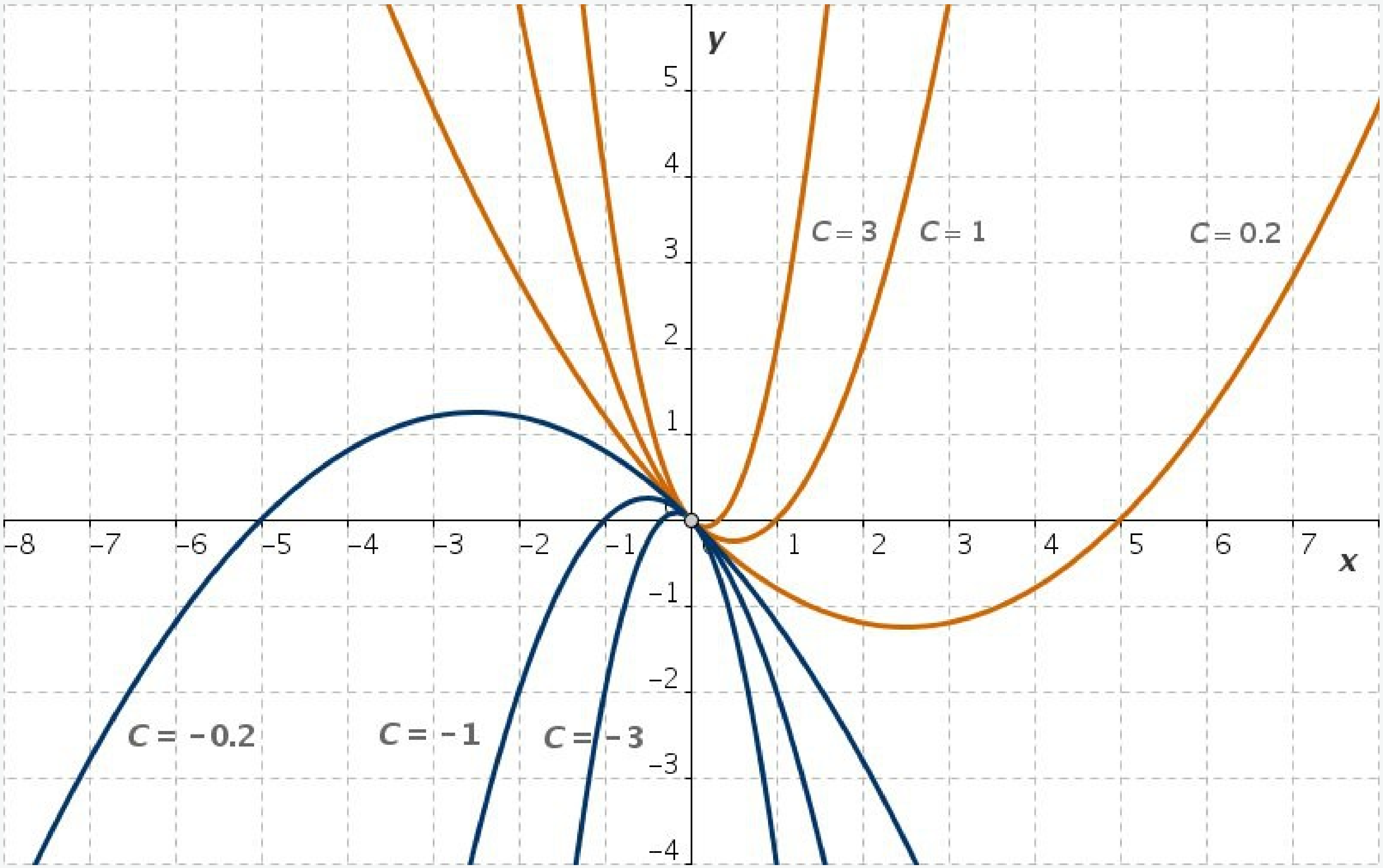


Abb. L5-1: Integralkurven der DGL

DGL vom Typ y' = f (x/y): Lösung 5

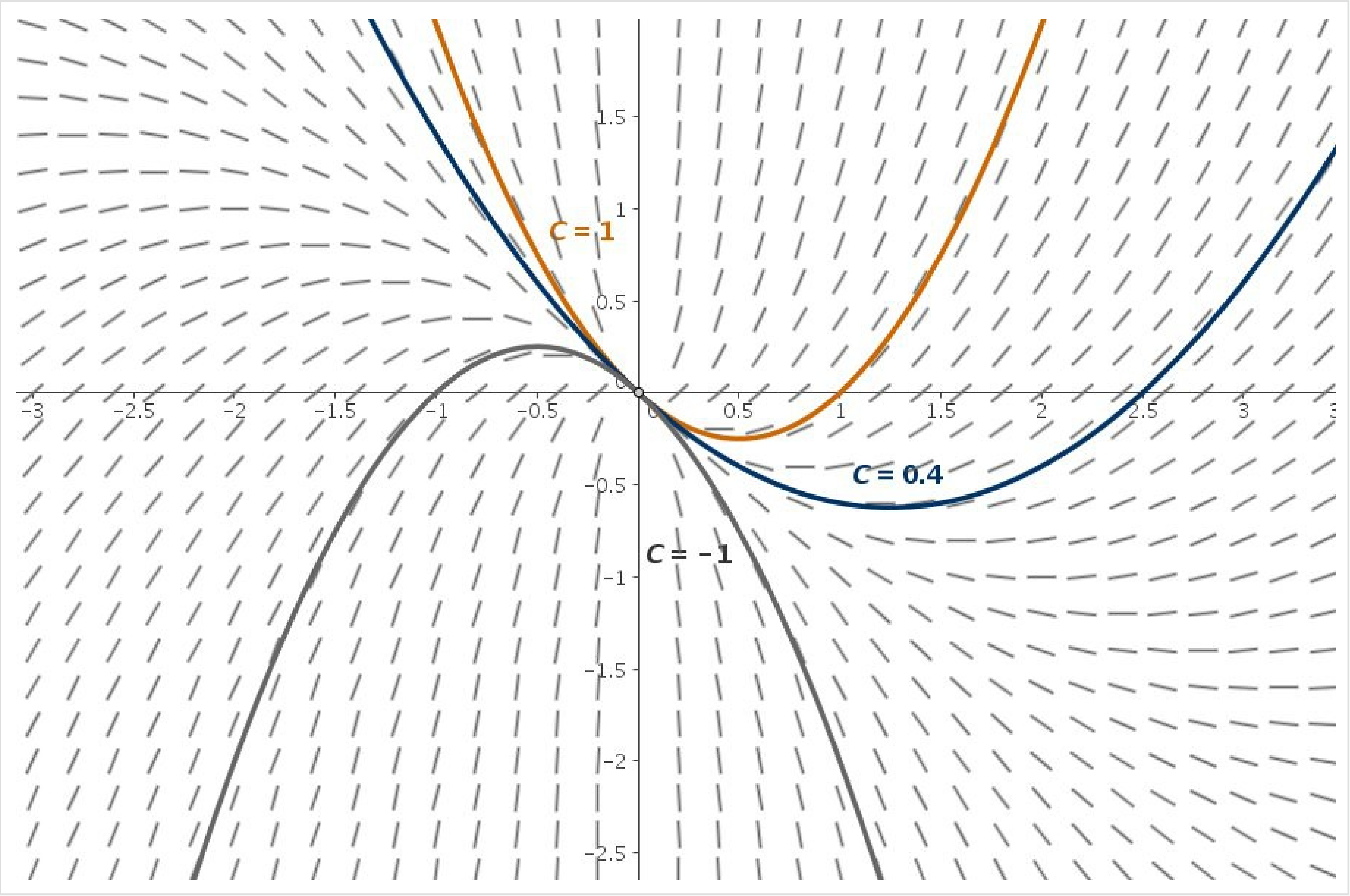


Abb. L5-2: Richtungsfeld der DGL, Integralkurven

$$\boxed{x - y + x\,y' = 0}$$

$$x - y + x\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{y}{x} + y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} - 1$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$y' = u + x\,u', \quad y' = u - 1 \quad \Rightarrow \quad u + x\,u' = u - 1 \quad \Rightarrow$$

$$u' = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int du = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$u = -\ln|\,x\,| + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = -\ln|\,x\,| + C \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x\,(C - \ln|\,x\,|)}$$

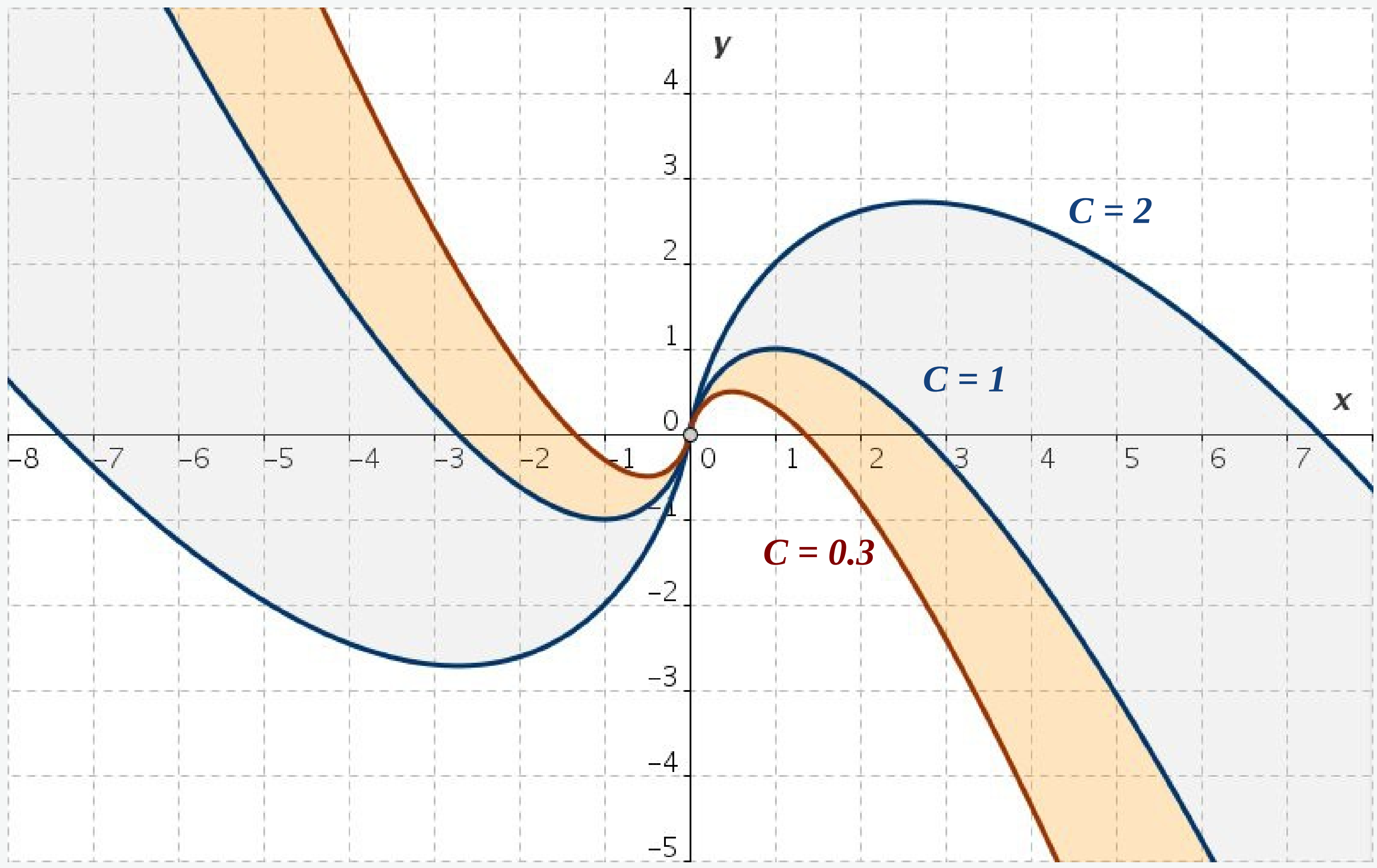


Abb. L6: Integralkurven der DGL

$$\boxed{x\,y' = y + x\tan\frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = u + \tan u \quad \Rightarrow \quad x\,u' = \tan u \quad \Leftrightarrow \quad x\,\frac{du}{dx} = \tan u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$t = \sin u\,, \qquad dt = \cos u\,du$$

$$\int \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\sin u|$$

$$\int \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|C\,x|$$

$$\sin u = C\,x \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{y}{x} = C\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \arcsin(C\,x)$$

$$\boxed{y = x\arcsin(C\,x)}$$

$$x\,y' = y\,(\ln y - \ln x) \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$y' = u + x\,u' = u\,\ln u \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u\,(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$v = \ln u - 1, \qquad v' = \frac{1}{u}, \qquad du = u\;dv$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\,v\,| = \ln|\,x\,| + \ln|\,C\,| = \ln|\,C\,x\,|$$

$$v = C\,x \quad \Rightarrow \quad \ln|\,u\,| - 1 = C\,x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C\,x + 1$$

$$\frac{y}{x} = e^{C\,x\,+\,1} \quad \Rightarrow \quad y = x\,e^{C\,x\,+\,1}$$

$y = x\,e^{C\,x\,+\,1}$ – allgemeine Lösung

$y(1) = 1, \qquad y = x\,e^{1\,-\,x}$ – spezielle Lösung ($C = -1$)

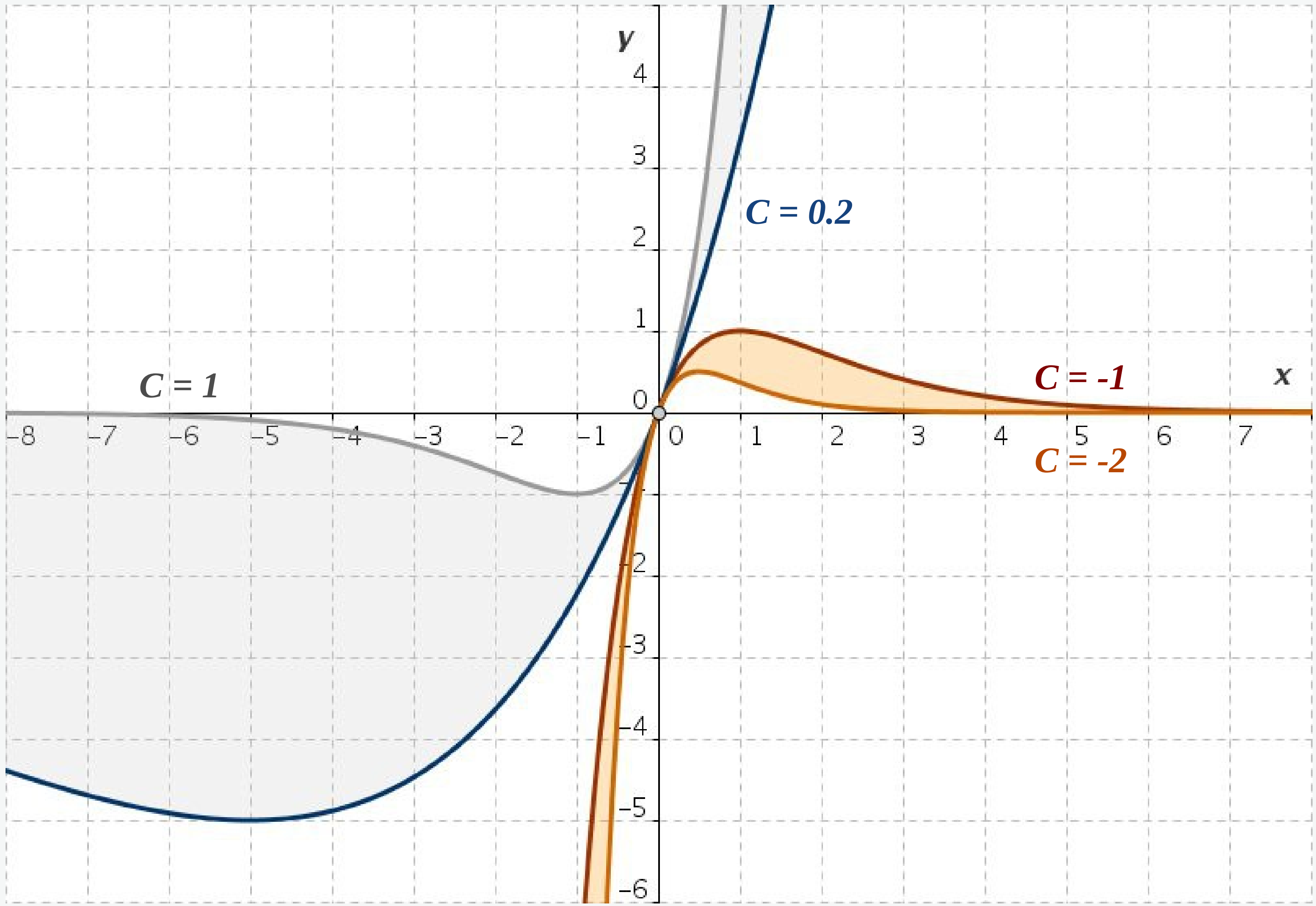


Abb. L8: Integralkurven der DGL

$$x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$$

$$x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}} \quad \left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = \frac{y}{x} - 1 - e^{\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = u - 1 - e^{u} \quad \Leftrightarrow \quad x\,u' = -1 - e^{u} \quad \Rightarrow$$

$$u' = -\frac{1 + e^{u}}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1 + e^{u}}{x} \qquad \left(\frac{dx}{1 + e^{u}}\right)$$

$$\frac{du}{1 + e^{u}} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{1 + e^{u}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^{a\,x}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{a\,x}}{1 + e^{a\,x}}$$

aus Folmelsammlung

$$\ln\left|\frac{e^u}{1+e^u}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad \frac{e^u}{1+e^u} = \frac{C}{x}, \qquad x\,e^u = C\,(1+e^u)$$

$$e^u\,(x-C) = C\,, \qquad e^u = \frac{C}{x-C} = \frac{1}{C_1 x - 1} \qquad \left(C_1 = \frac{1}{C}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{1}{C_1 x - 1}\right| \quad \Rightarrow \quad y = x\,\ln\left|\frac{1}{C_1 x - 1}\right| = -x\,\ln\left|C_1 x - 1\right|$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = -x\,\ln\left|C_1 x - 1\right|$

Spezielle Lösung:

$$y(1) = 0: \quad 0 = -\ln\left|C_1 - 1\right| \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

$$y = x\,\ln\left|\frac{1}{2x-1}\right|$$

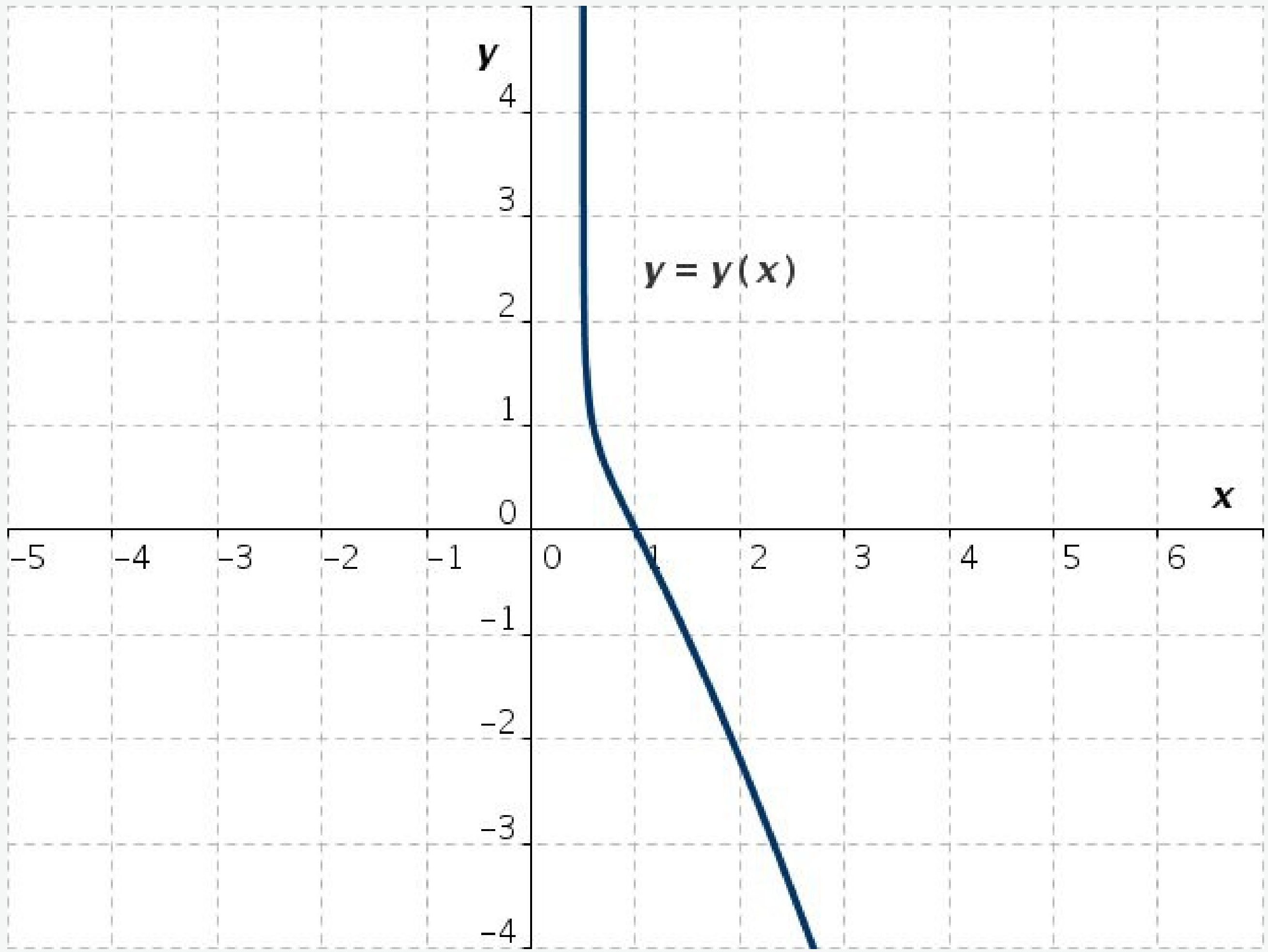


Abb. L9: Integralkurve der DGL, die der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ entspricht