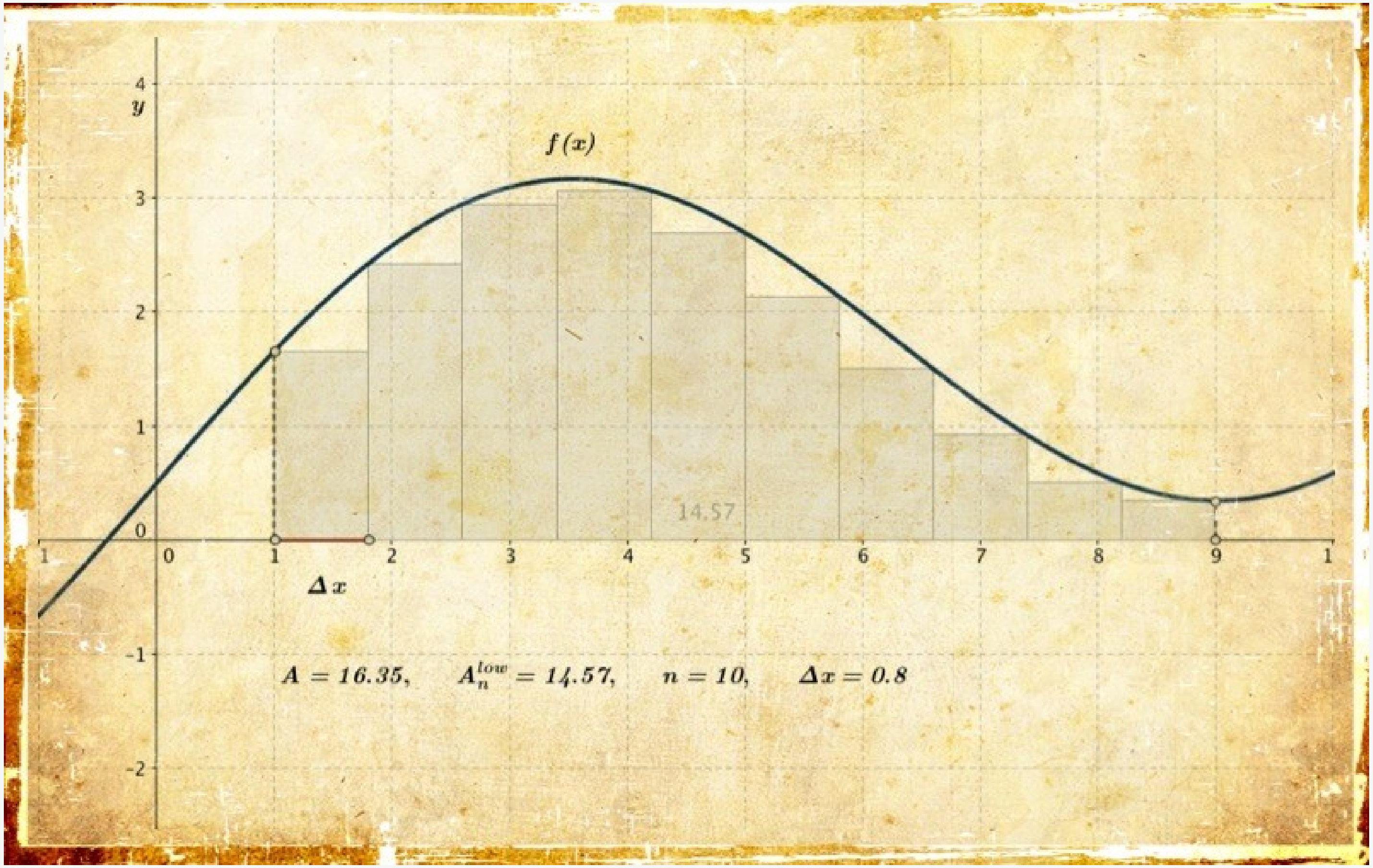


Der Begriff des bestimmten Integrals

Das ursprüngliche Problem, das zum Begriff des bestimmten Integrals führte, war ein geometrisches, die Bestimmung von Flächeninhalten.

Infinite Secrets: The Genius of Archimedes, Part 1

http://www.youtube.com/watch?v=h3GIhfyLXwc

Schon im alten Griechenland bestand Interesse an Methoden, mit denen durch Kurven begrenzte Flächen berechnet werden konnten. Für einige Kurvenarten wurde das Problem durch Archimedes von Syrakus *(287-212* v. Ch.) gelöst. Viele halten ihn für den größten Mathematiker aller Zeiten.

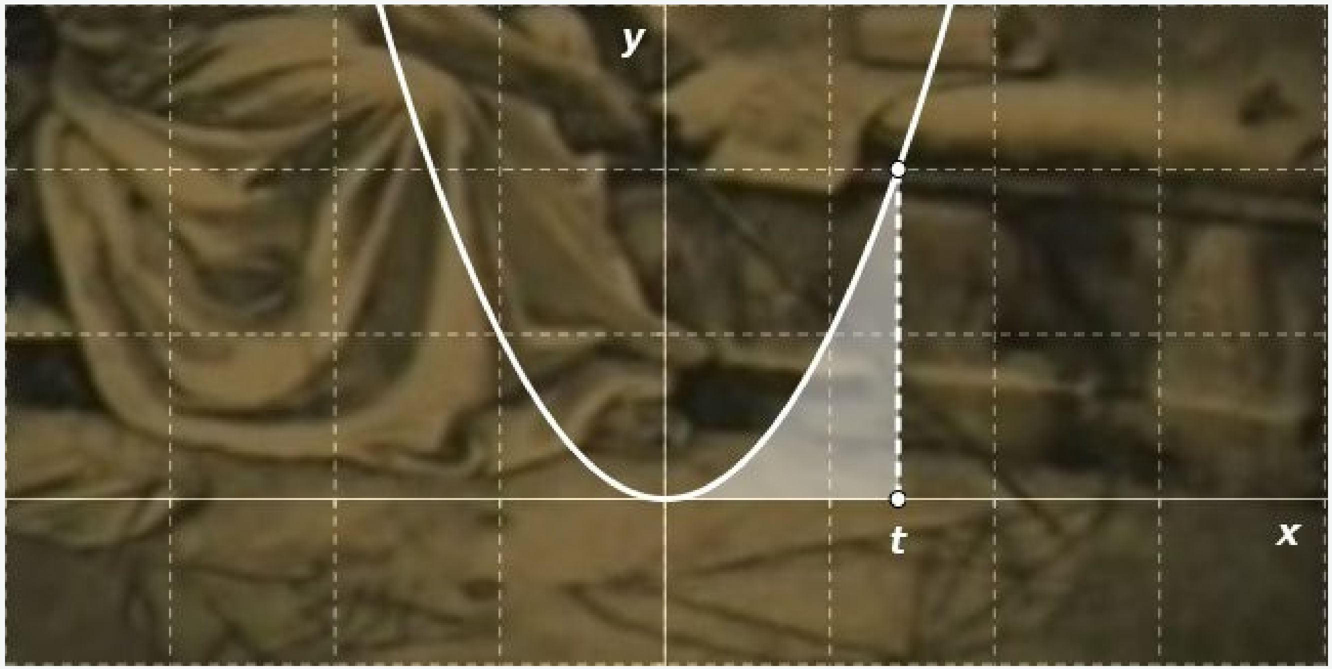


Abb. 2: Fläche zwischen der Kurve der Funktion $y = x^2$ und der x-Achse im Intervall $[0, t]$

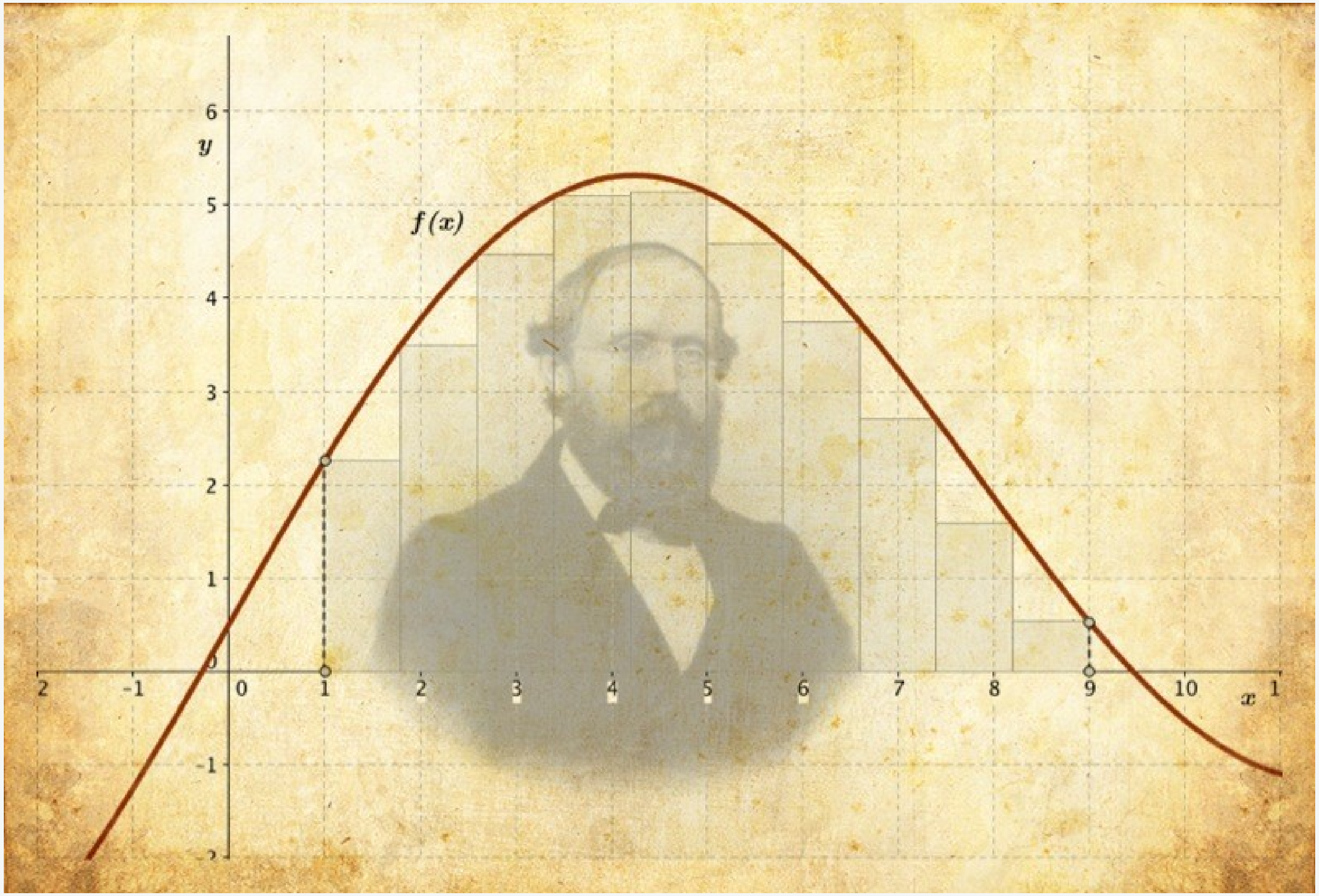
Ohne algebraische Methoden machte Archimedes einige spektakuläre Entdeckungen. Besonders bemerkenswert ist die Quadratur, also die Flächenberechnung, eines parabolischen Abschnitts. Sei *A(t)* die Fläche zwischen der Parabel und der Achse (vgl. Abb. 4). Archimedes zeigte durch geniale geometrische Argumente – er nannte das Verfahren die Exhaustionsmethode –, dass die Fläche ist

$$A(t) = \frac{t^3}{3}$$

Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Ende des 17. Jahrhunderts gelang es Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz unabhängig voneinander, widerspruchsfrei funktionierende Kalküle zur Differentialrechnung zu entwickeln und so den Fundamentalsatz der Analysis zu entdecken. Ihre Arbeiten erlaubten das Abstrahieren von rein geometrischer Vorstellung und werden deshalb als Beginn der Analysis betrachtet.



Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemannsches Integral

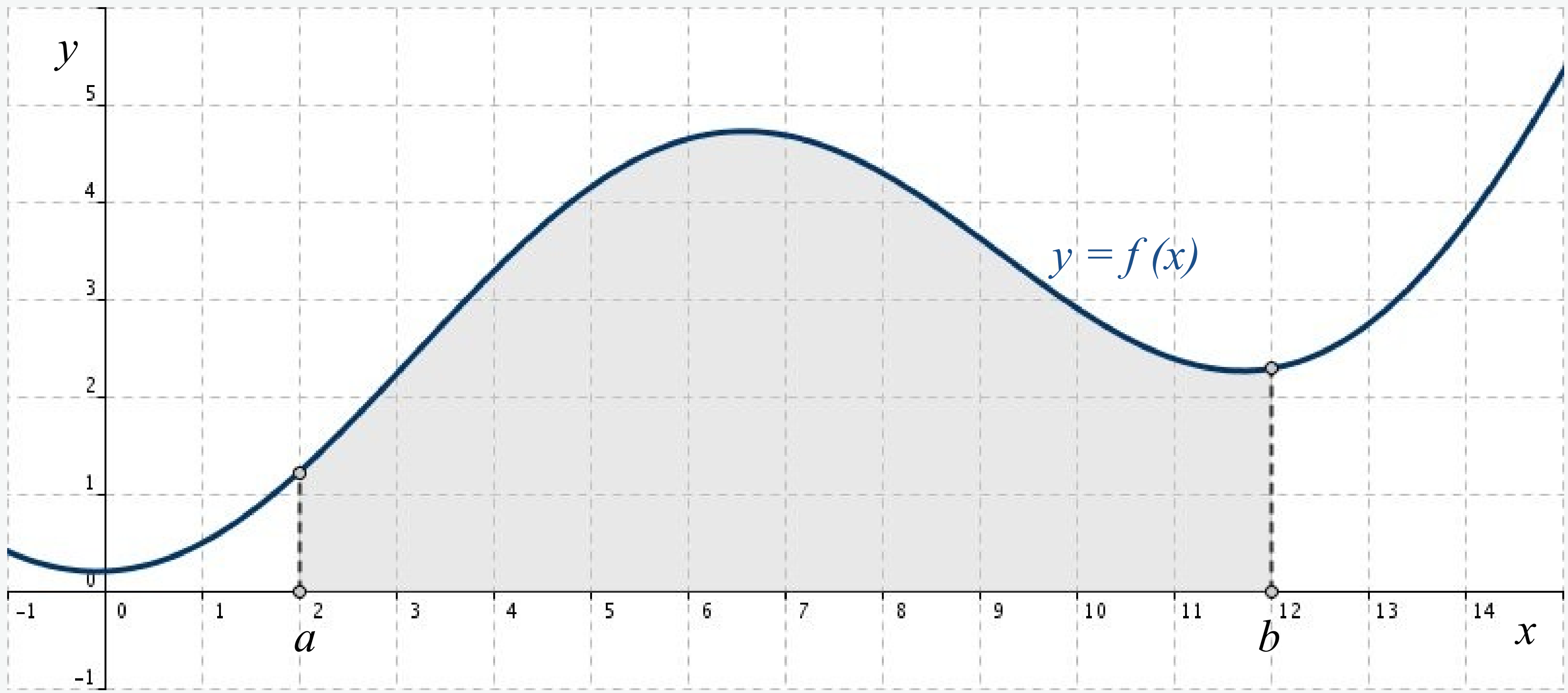


Abb. 5-1: Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$

Um eine anschauliche Deutung des Integralbegriffs zu geben, setzen wir voraus, dass

- $y = f(x)$ eine stetige Funktion ist;
- $y = f(x)$ verläuft im gesamten Intervall $a \le x \le b$ oberhalb der x-Achse.

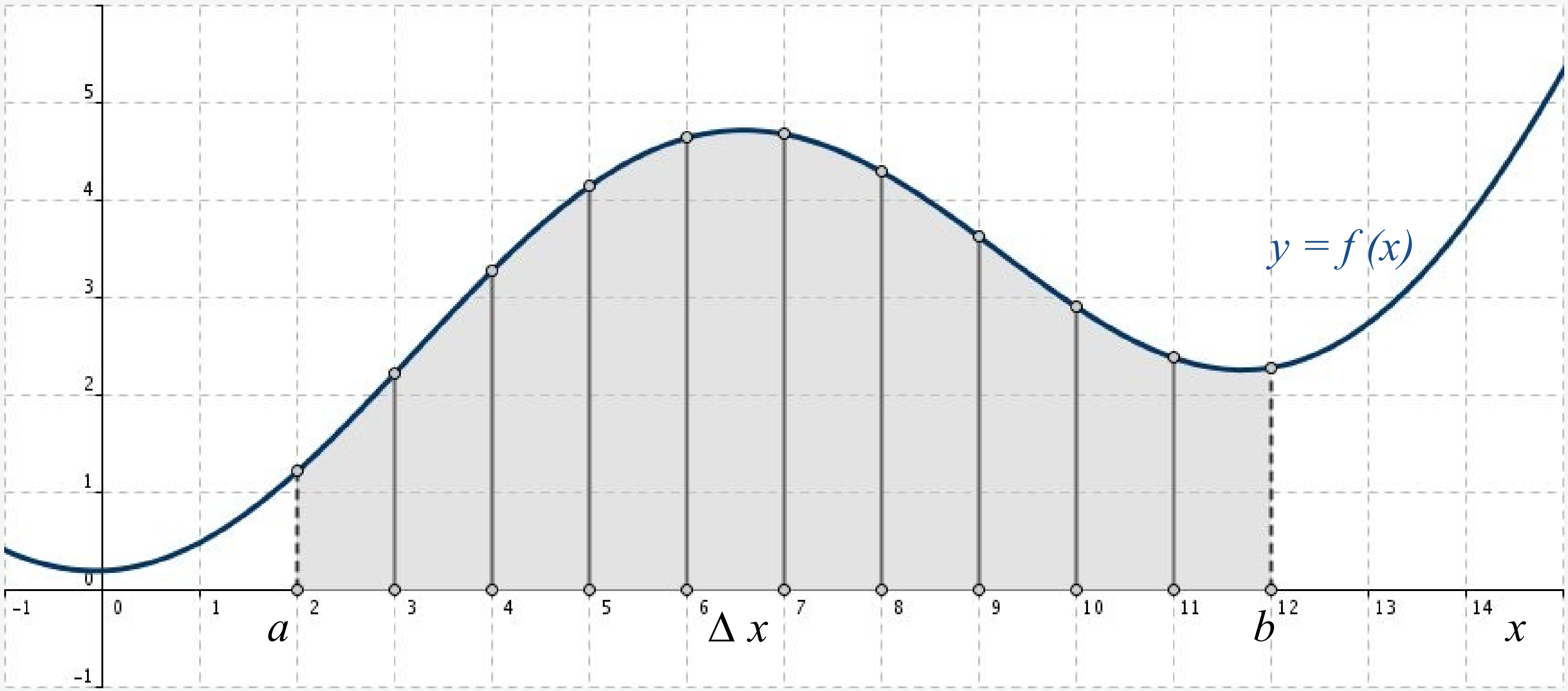


Abb. 5-2: n Flächenstreifen gleicher Breite Δx bilden die Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$

Wir zerlegen die Fläche unter der Kurve durch Schnitte parallel zur y-Achse in n Streifen gleicher Breite Δx .

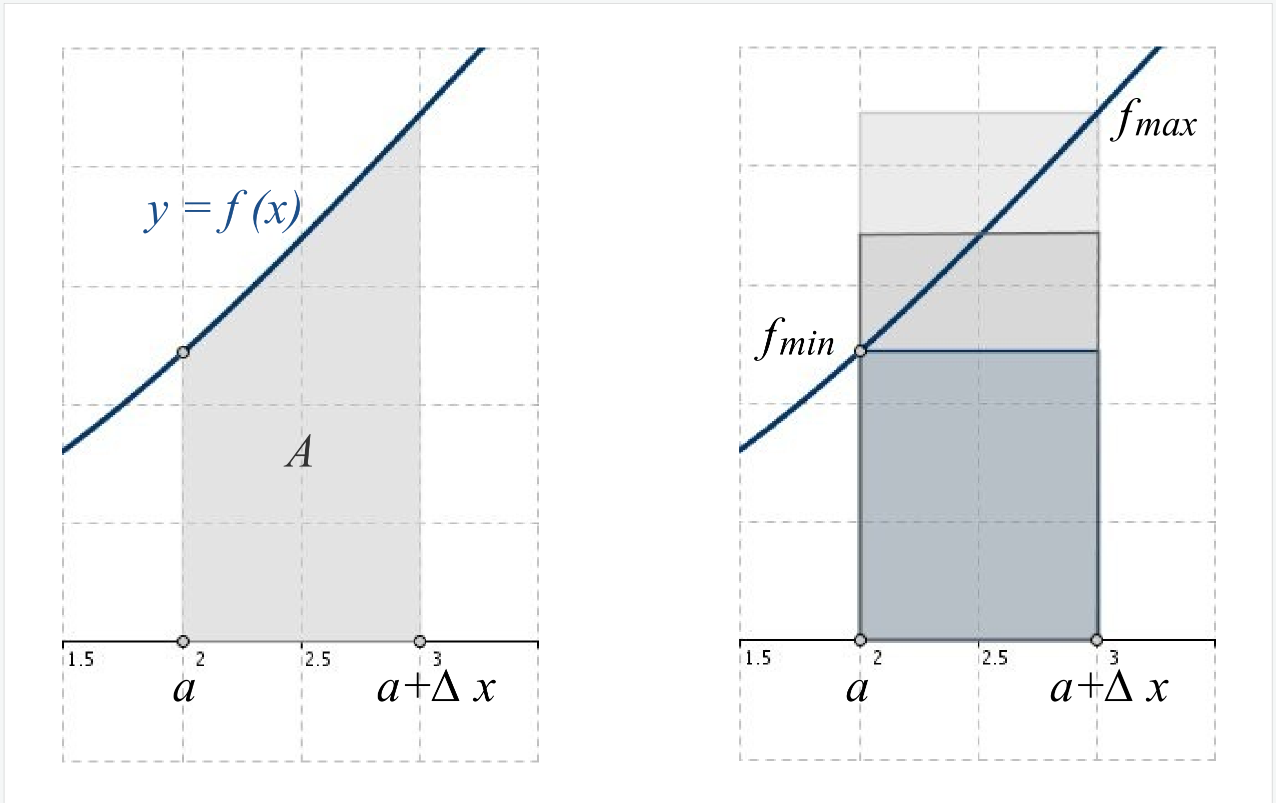


Abb. 5-3: Ein Streifen und entsprechende Rechtecke im Intervall $[a, a + \Delta x]$

Jeder Streifen wird durch ein Rechteck ersetzt. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist einfach zu berechnen, z.B.:

$$f_{\,min}\,\Delta\,x \leqslant A \leqslant f_{\,max}\,\Delta\,x$$

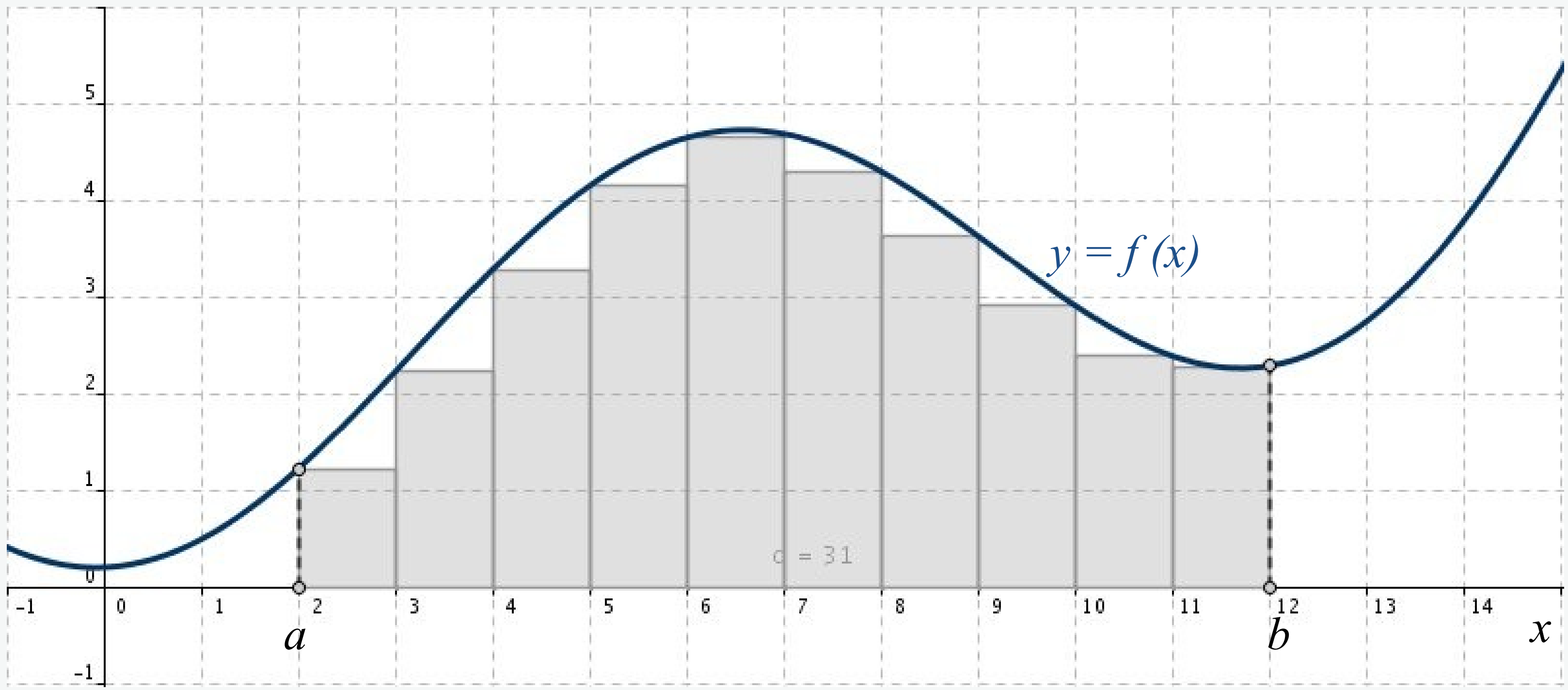


Abb. 5-4: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ *und der x-Achse im Intervall* $[a, b]$ *(*$n = 10$*, Untersumme)*

Wir zerlegen die Fläche unter der Kurve durch Schnitte parallel zur y-Achse in 10 Streifen gleicher Breite $\Delta x = 1$ und ersetzen jeden Streifen durch ein Rechteck, dessen Höhe dem minimalen Funktionswert entspricht. Die Summe dieser Rechtecksflächen bezeichnen wir als Untersumme.

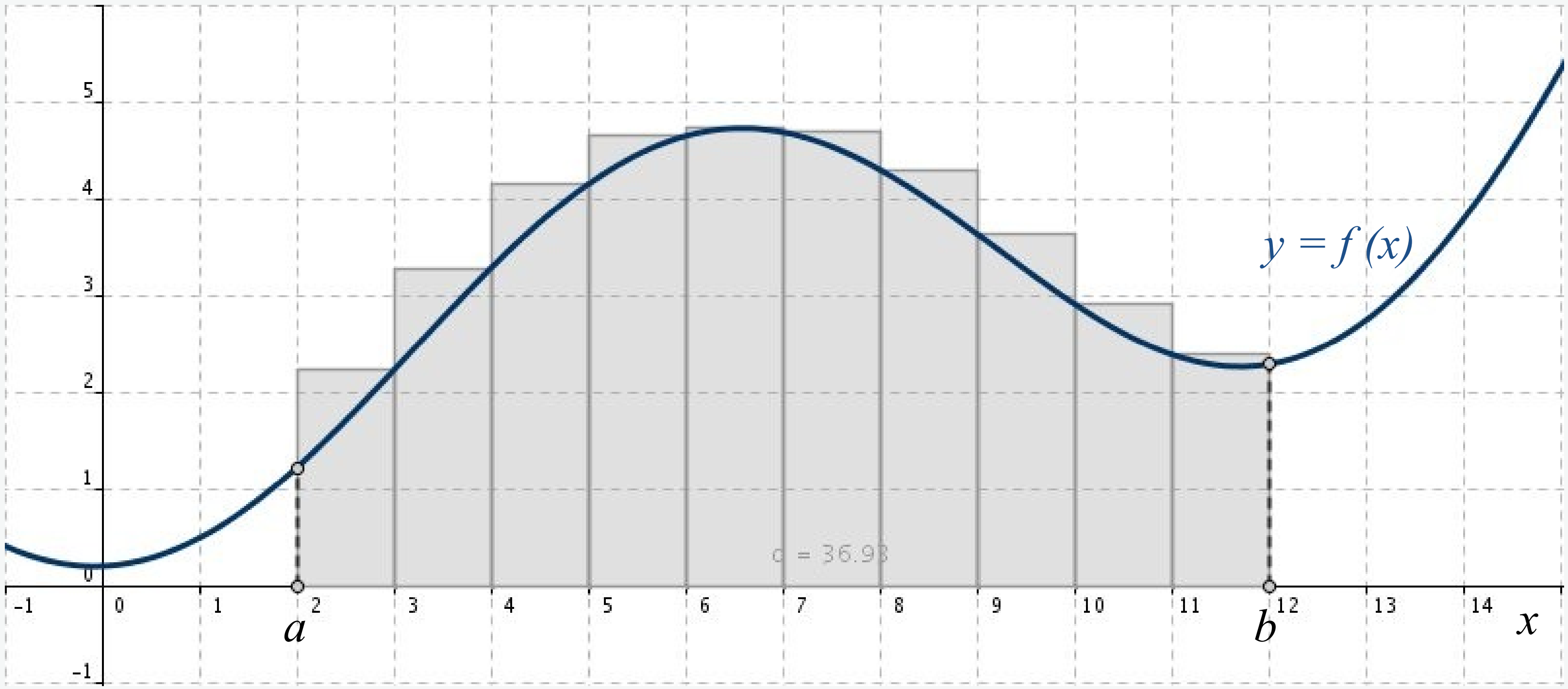


Abb. 5-5: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 10$, Obersumme)

Wir zerlegen die Fläche unter der Kurve durch Schnitte parallel zur y-Achse in 10 Streifen gleicher Breite $\Delta x = 1$ und ersetzen jeden Streifen durch ein Rechteck, dessen Höhe dem maximalen Funktionswert entspricht. Die Summe dieser Rechtecksflächen bezeichnen wir als Obersumme.

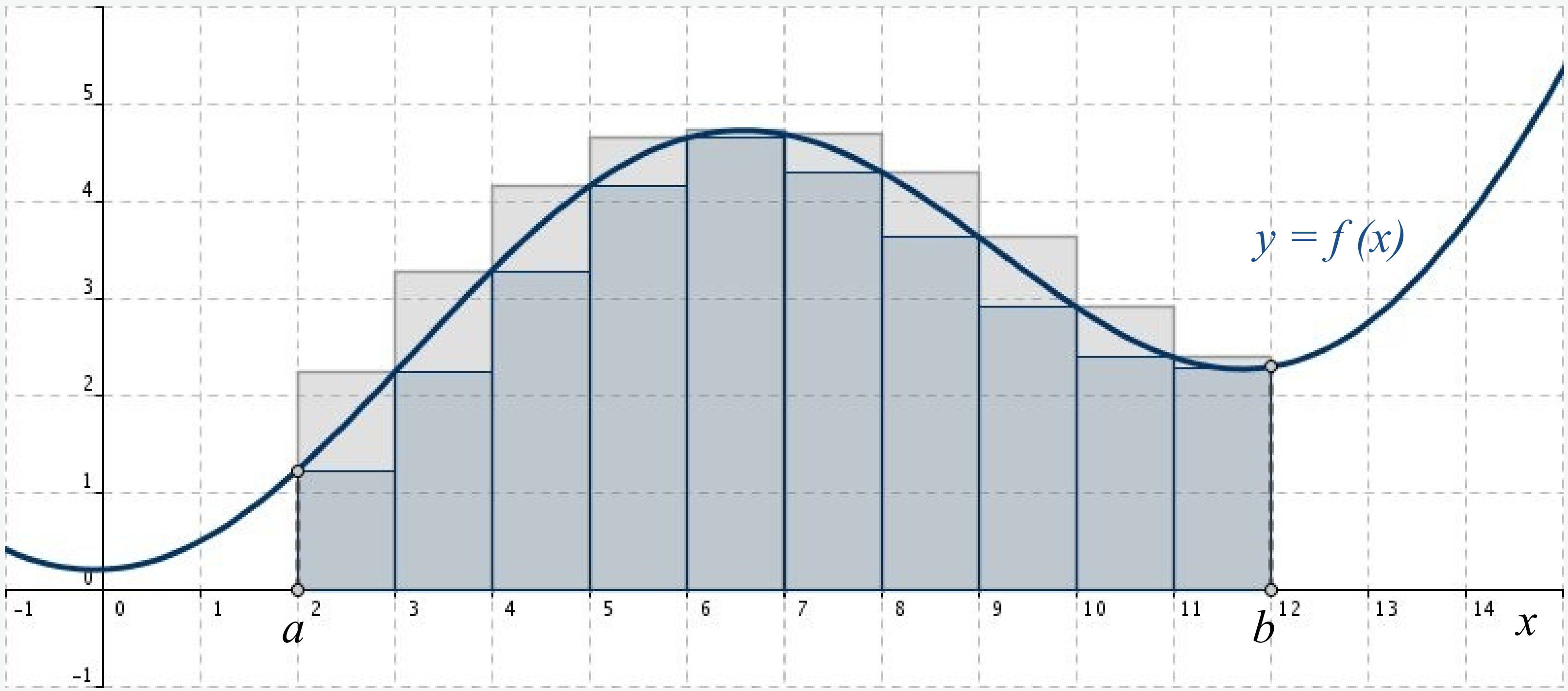


Abb. 5-6: Zur Bestimmung der Fläche A zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ $(n = 10)$

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt dabei zwischen Unter- und Obersumme

$$U \leqslant A \leqslant O$$

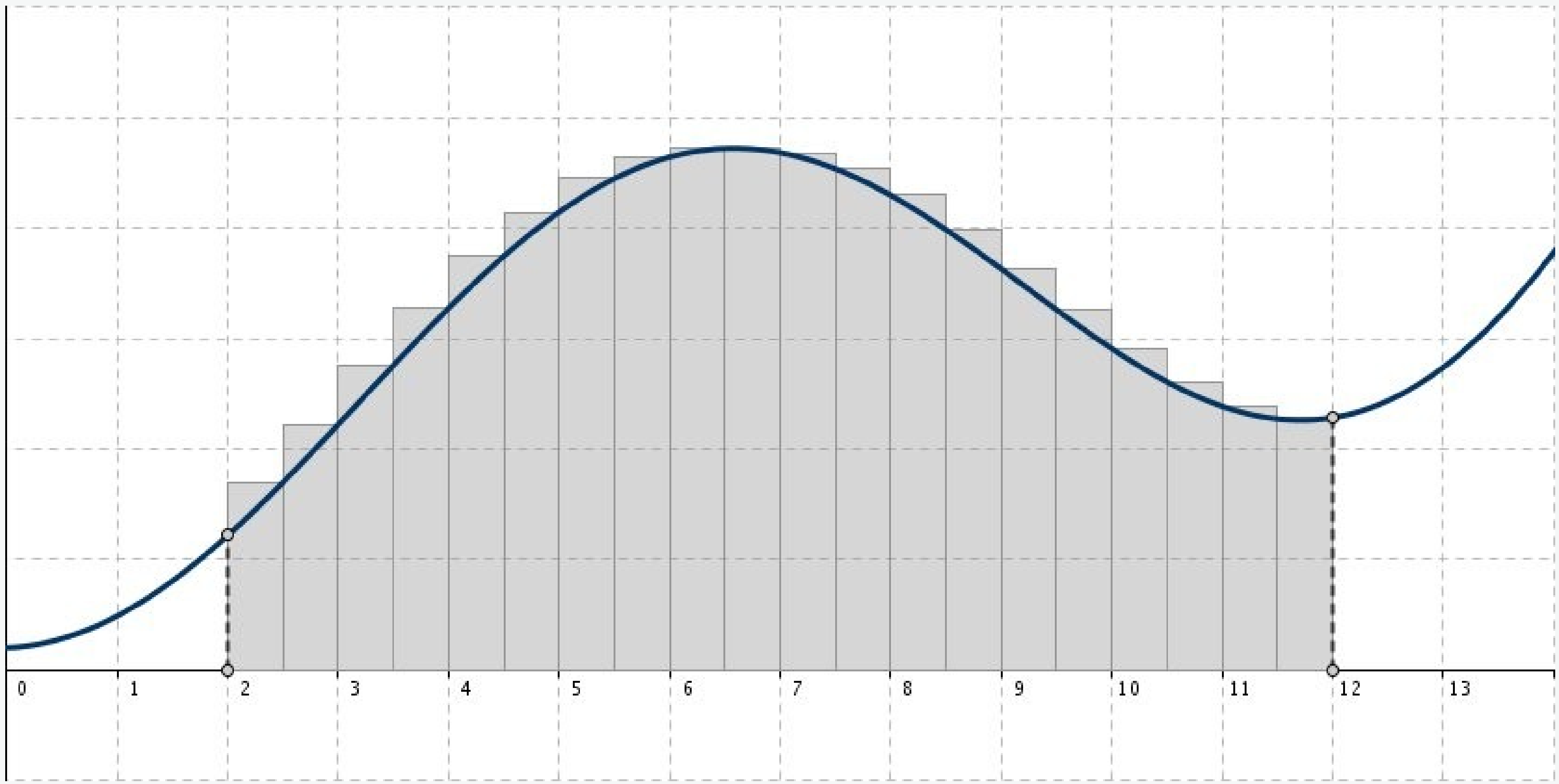


Abb. 5-7: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 20$, Obersumme)

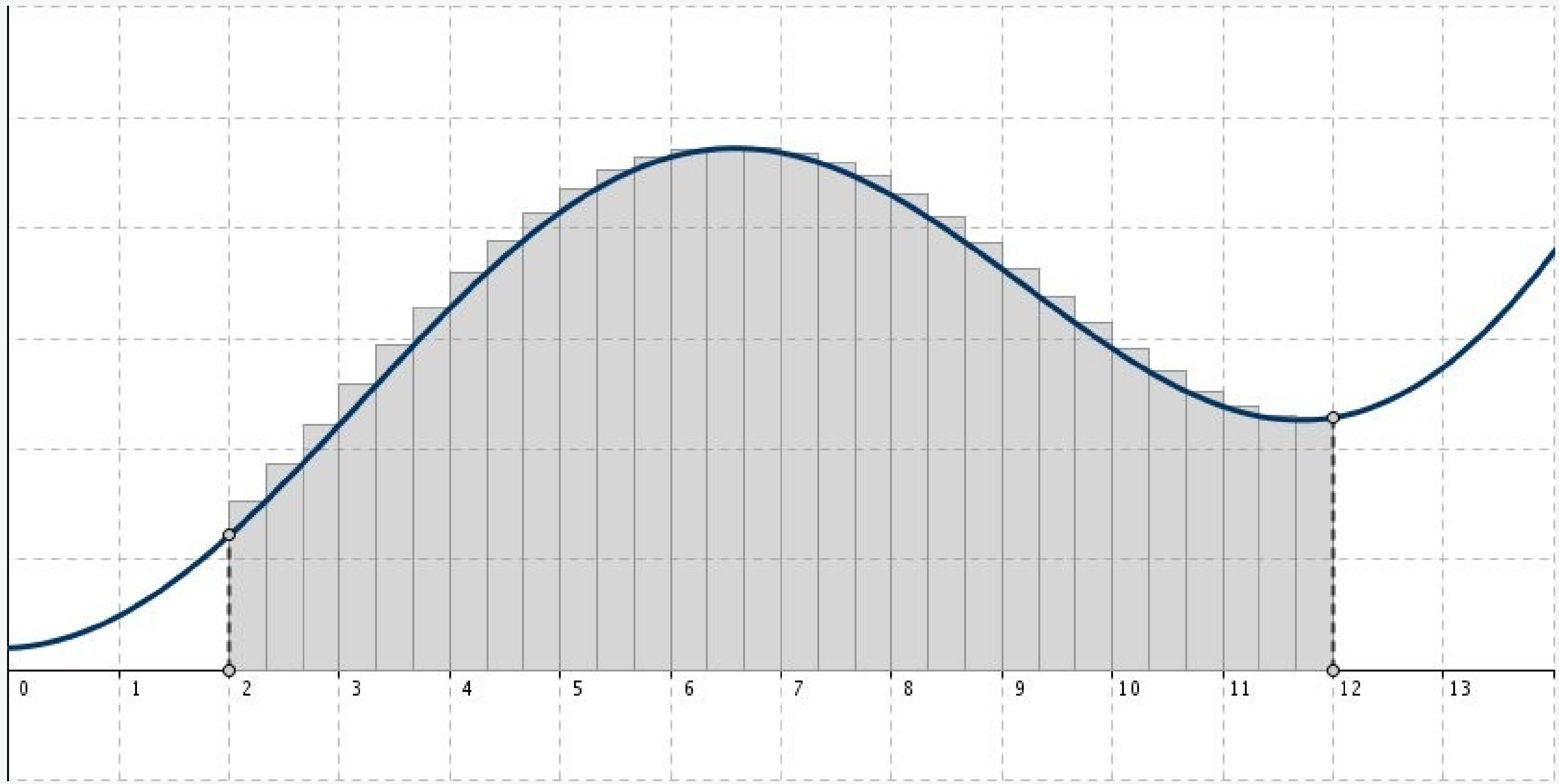


Abb. 5-8: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 30$, Obersumme)

Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

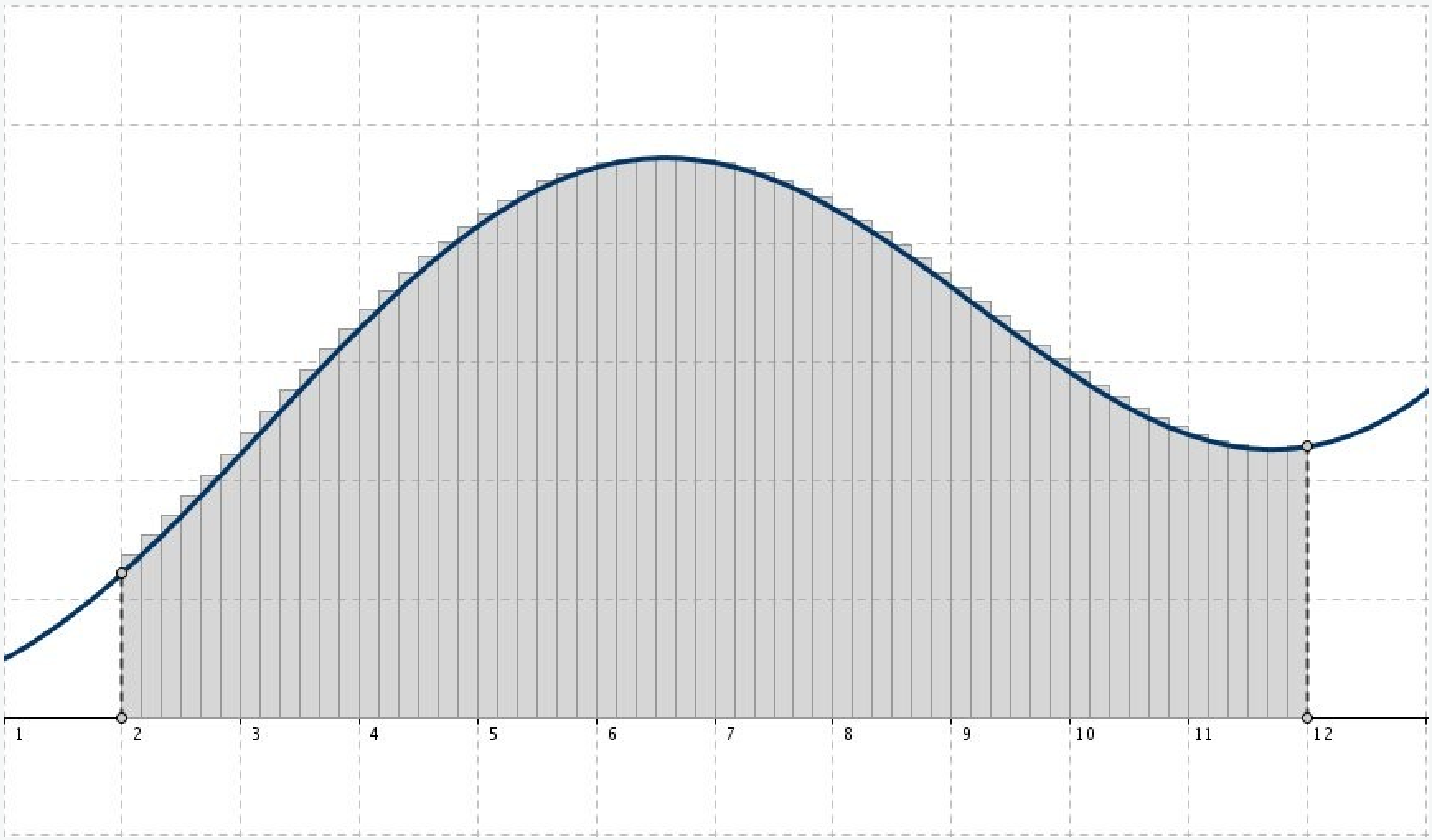


Abb. 5-9: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 60$, Obersumme)

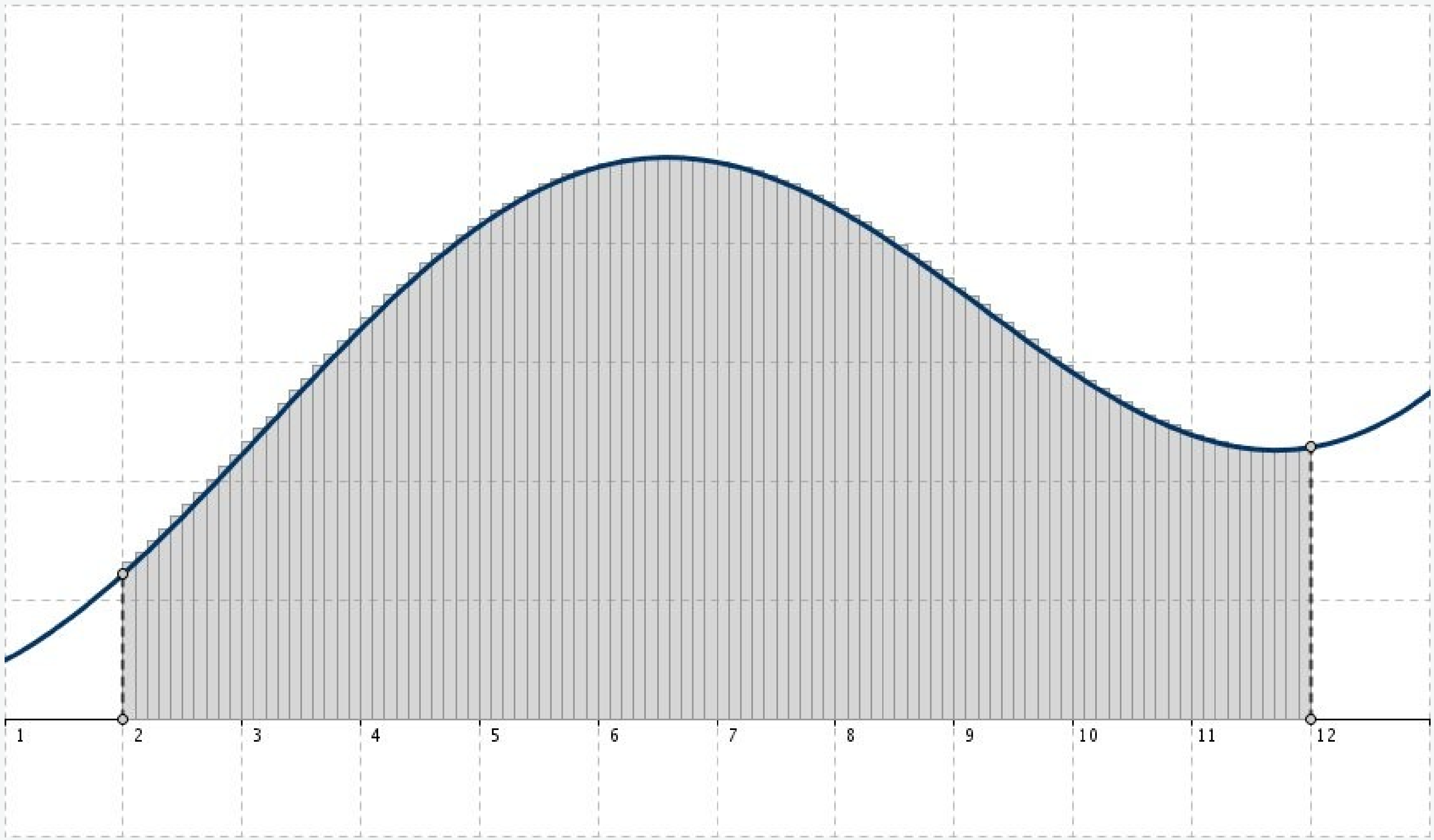


Abb. 5-10: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 100$, Obersumme)

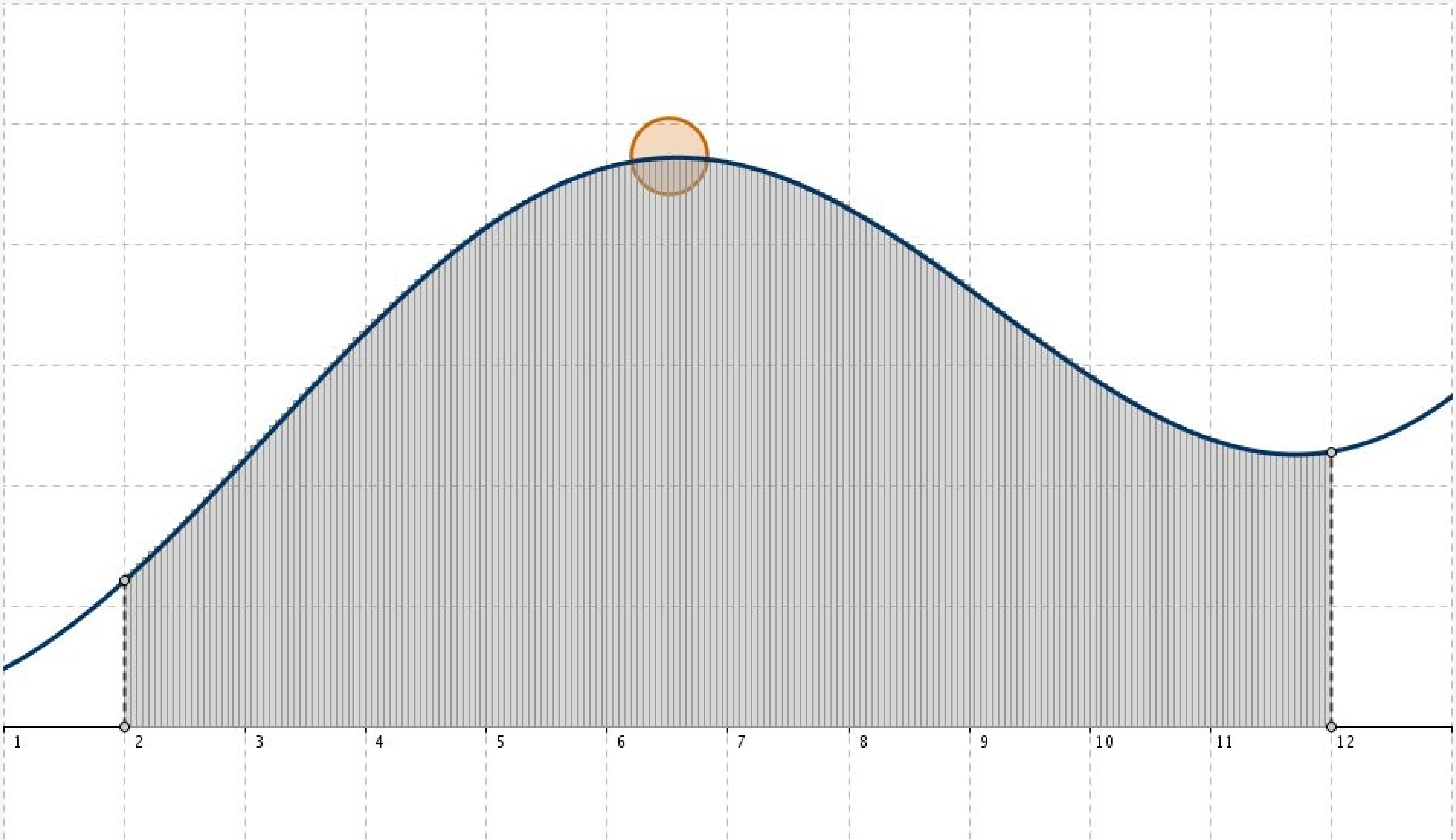


Abb. 5-11: Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ($n = 200$, Obersumme)

Wir werden in den Bereich zoomen, um die Treppenfunktion zu “entdecken”.

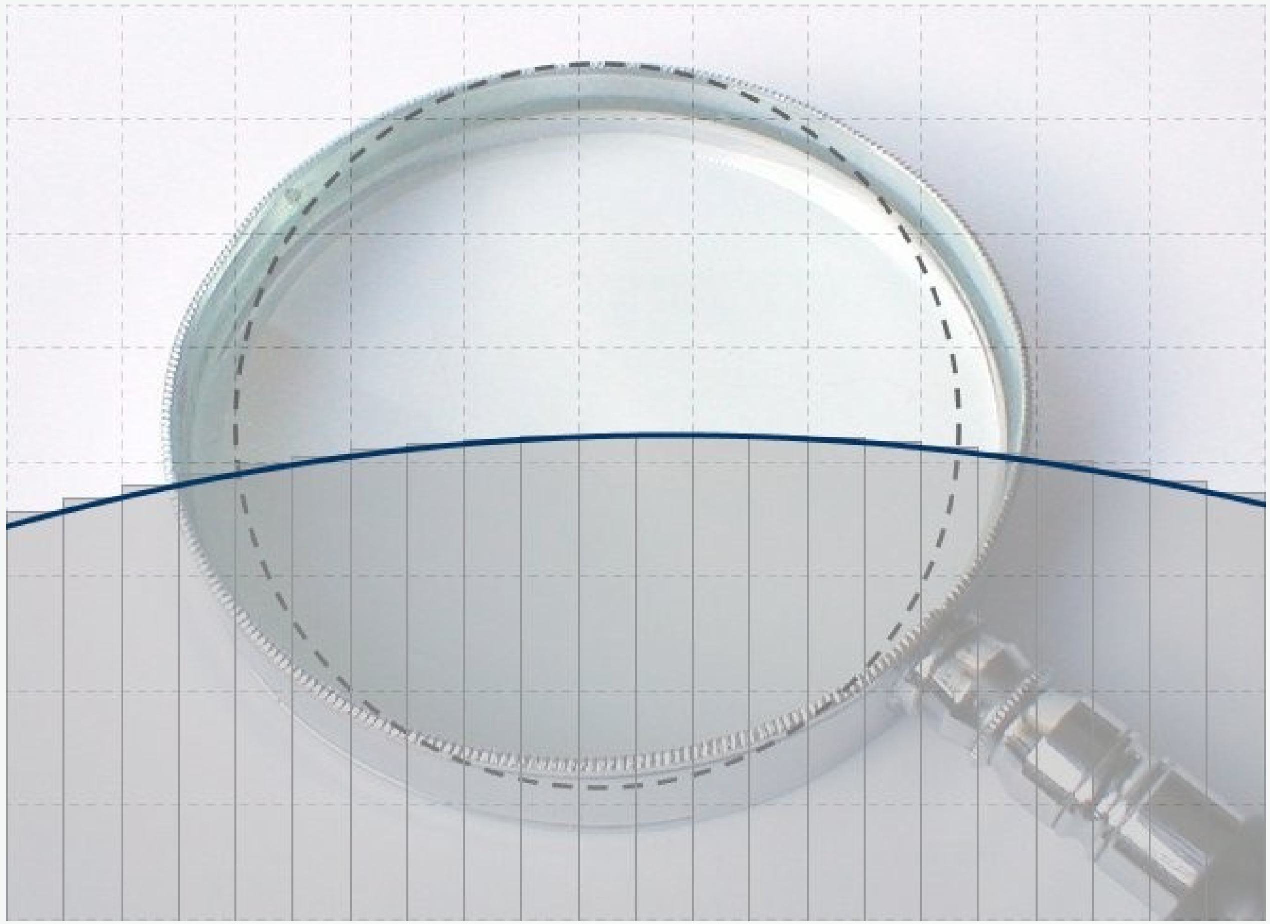


Abb. 5-12: Ein in der Abbildung 5-11 gezeichneter Bereich

Folgendes gilt: Je größer die Anzahl der Streifen, desto besser die Näherung. Beim Grenzübergang $n \to \infty$ strebt die Summe der Rechtecksflächen gegen den gesuchten Flächeninhalt.

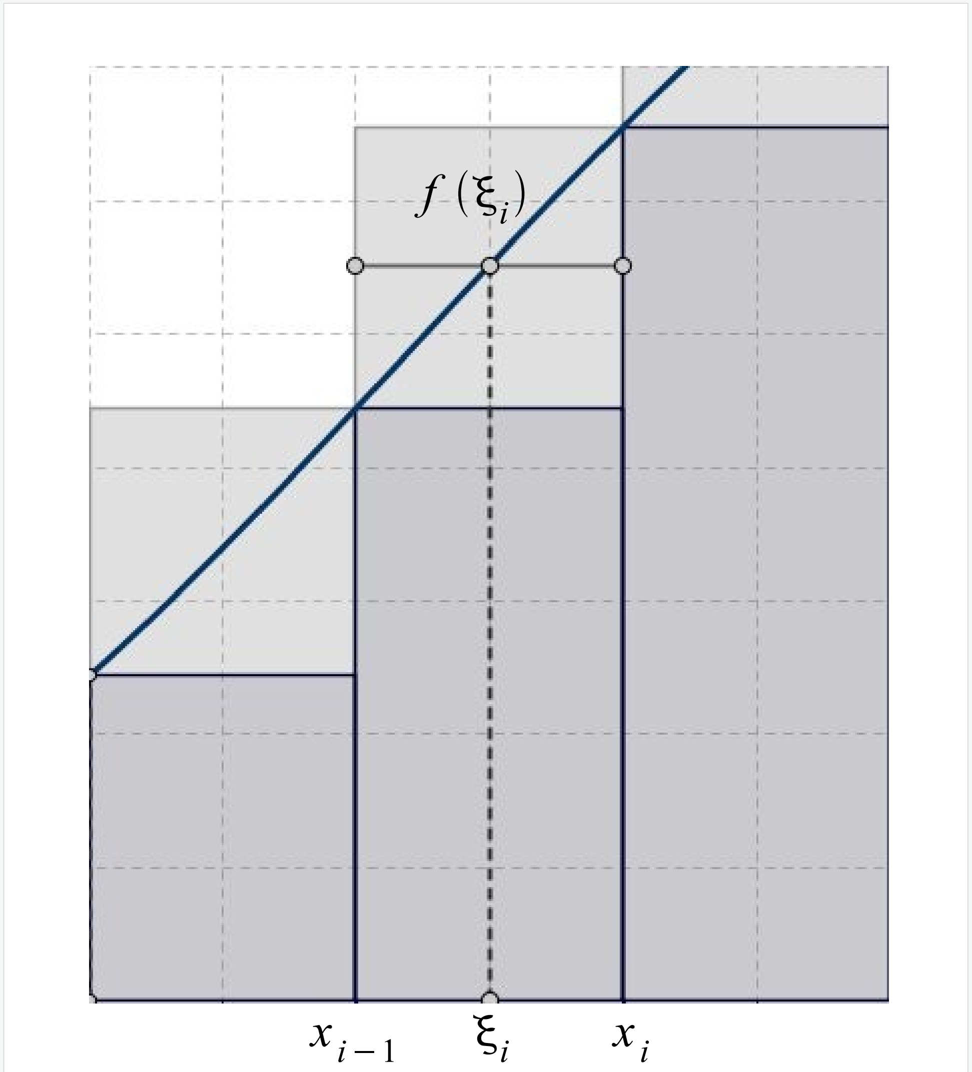


Abb. 5-13: Zum Flächenproblem der Integralrechnung

Der Grenzwert, der zum bestimmten Integral führt, wird wie folgt gebildet:

1. Schritt:

Das Intervall $[a, b]$ wird durch $n - 1$ beliebige Teilpunkte in n Elementar-intervalle zerlegt:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

2. Schritt:

Im Inneren jedes der Elementarintervalle wird eine Zahl ausgewählt:

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$$

3. Schritt:

Die Werte der Funktion $f(x)$ in diesen Punkten werden mit den Längen der Teilintervalle multipliziert

$$f(\xi_i) \, \Delta x_i \, , \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

4. Schritt: Alle n Produkte $f(\xi_i) \, \Delta x_i$ werden addiert.

5. Schritt:

Von der Zerlegungssumme (Riemann-Summe): $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$

wird der Grenzwert für den Fall berechnet: $\Delta x_i \to 0, \quad n \to \infty$

Wenn dieser Grenzwert existiert und unabhängig ist von der Wahl der Zahlen x_i und ξ_i, heißt er das bestimmte Riemannsche Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0,\ n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

$F(x)$ – Stammfunktion, $f(x)$ – Integrand