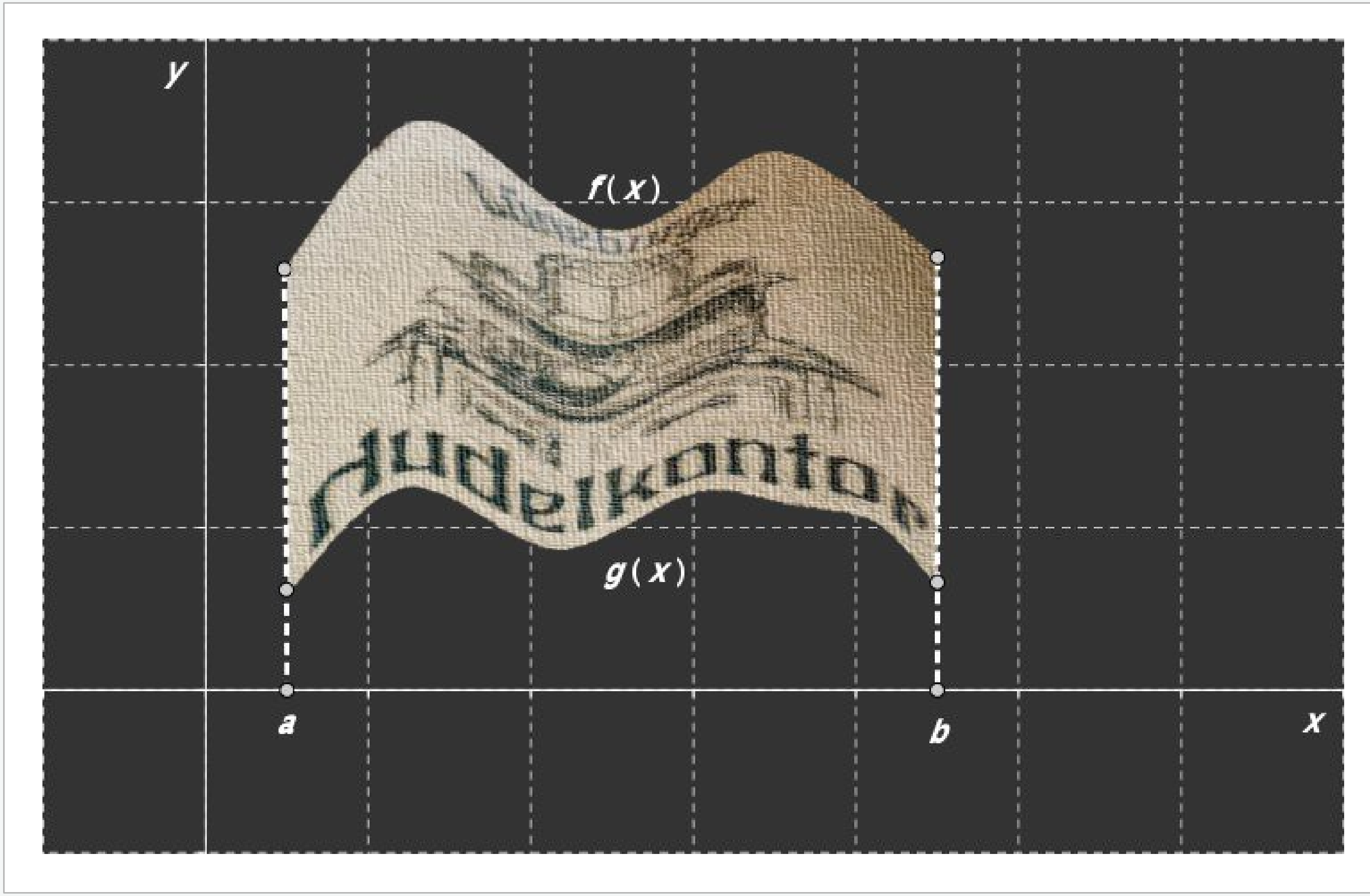


Flächen zwischen zwei Kurven

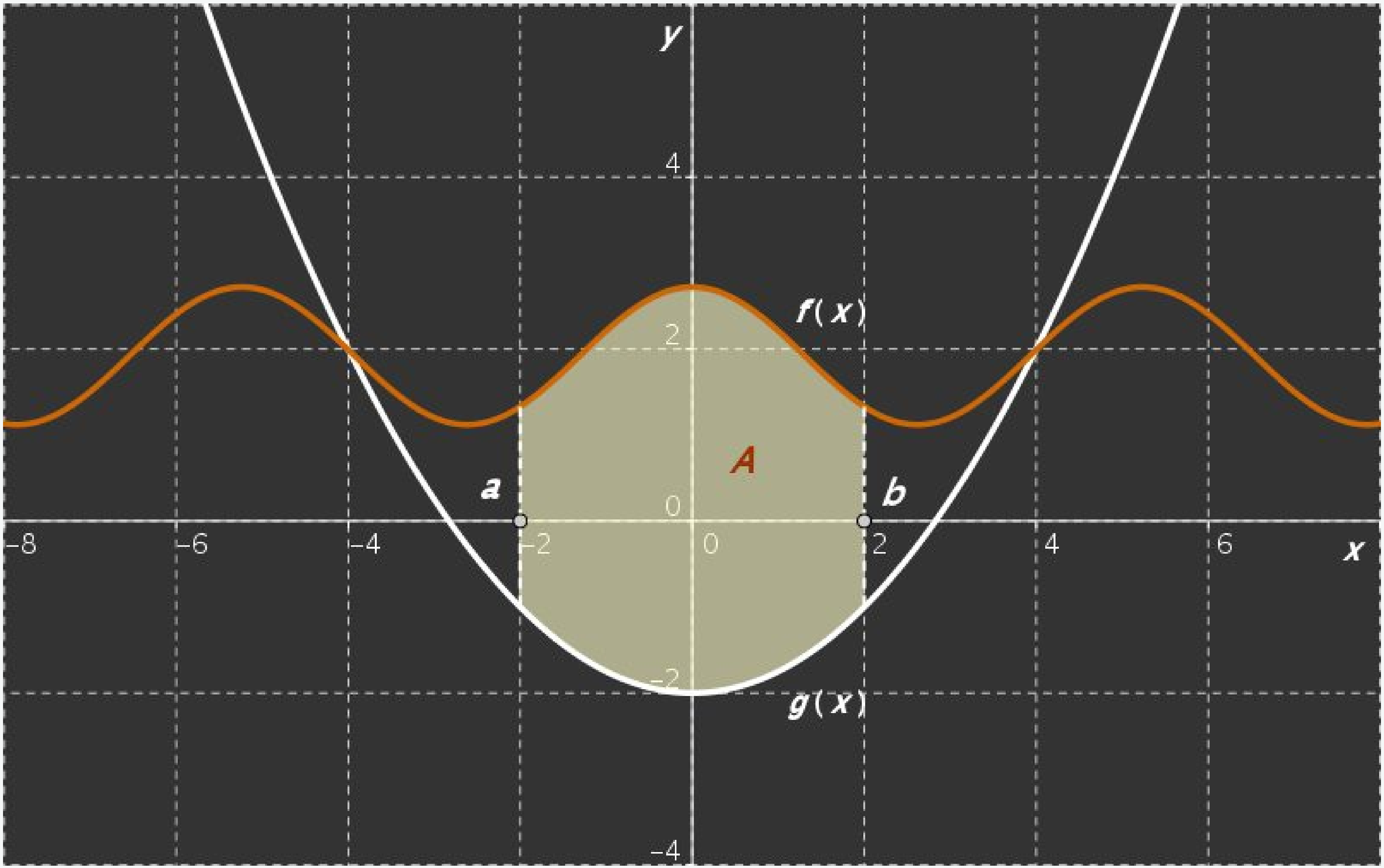


Abb. B1: Die Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$, $f(x)$ ist die obere Kurve und $g(x)$ ist die untere Kurve

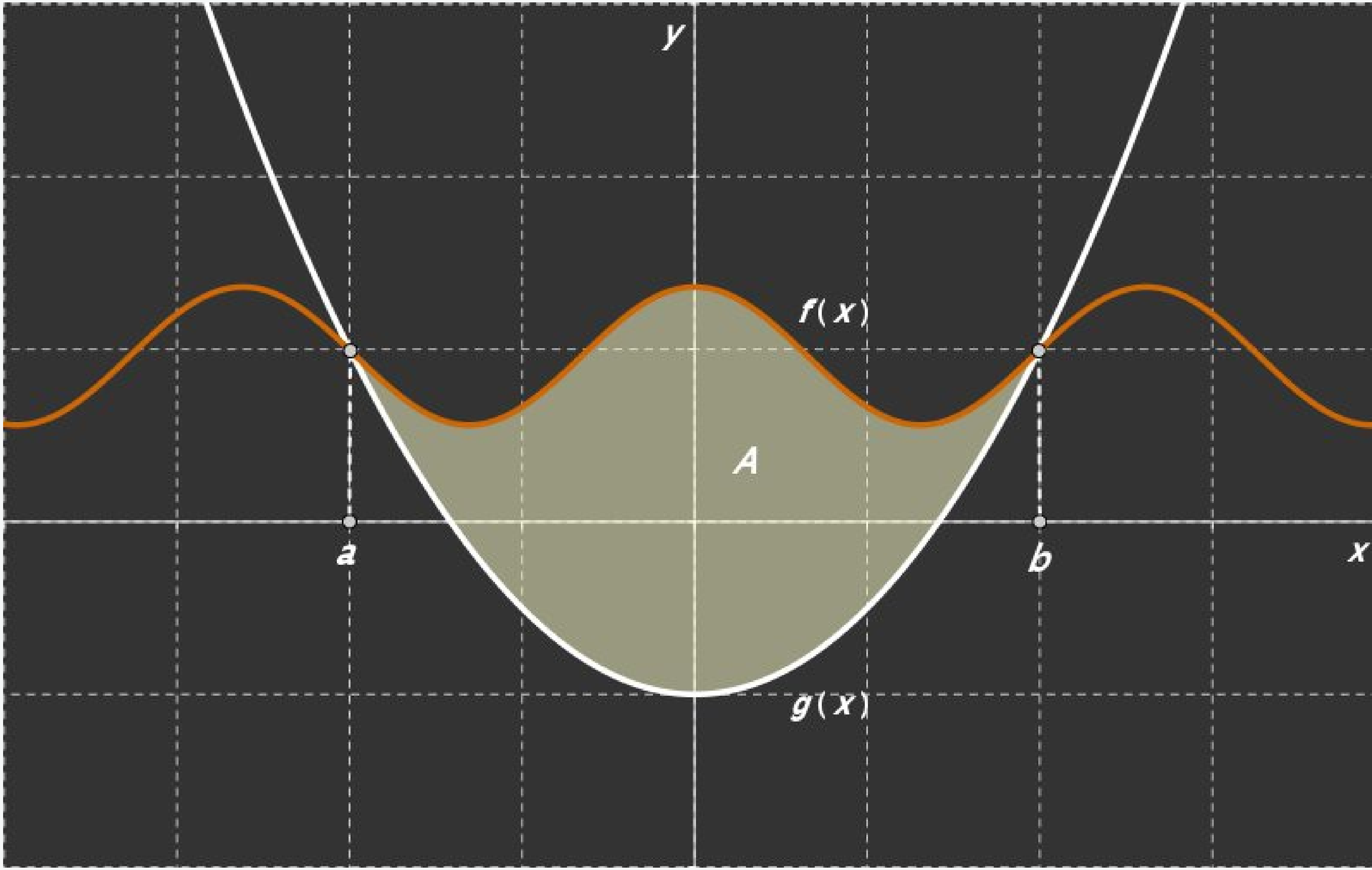


Abb. B2a: Die von den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche im Intervall $[a, b]$, $f(x)$ ist die obere Kurve und $g(x)$ ist die untere Kurve

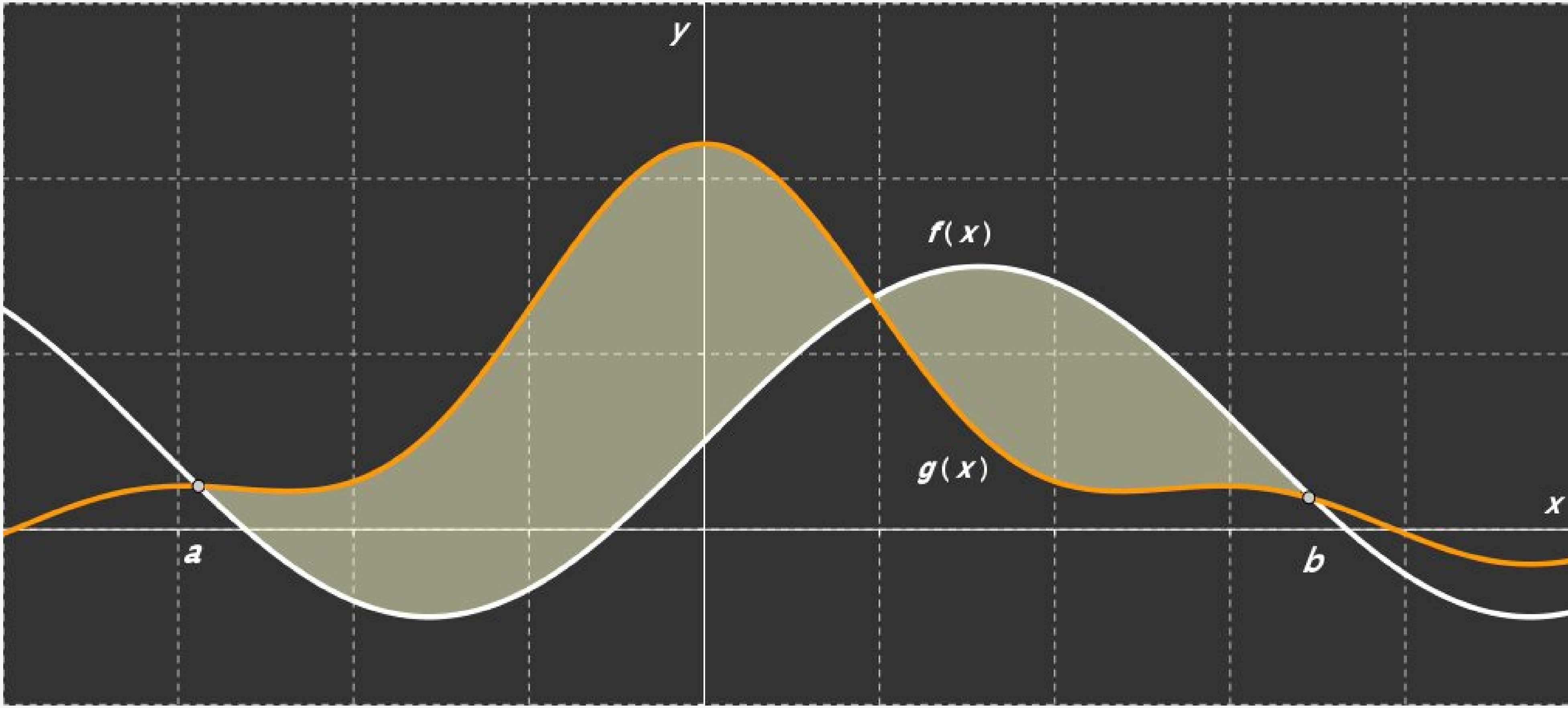


Abb. B2b: Die von den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche

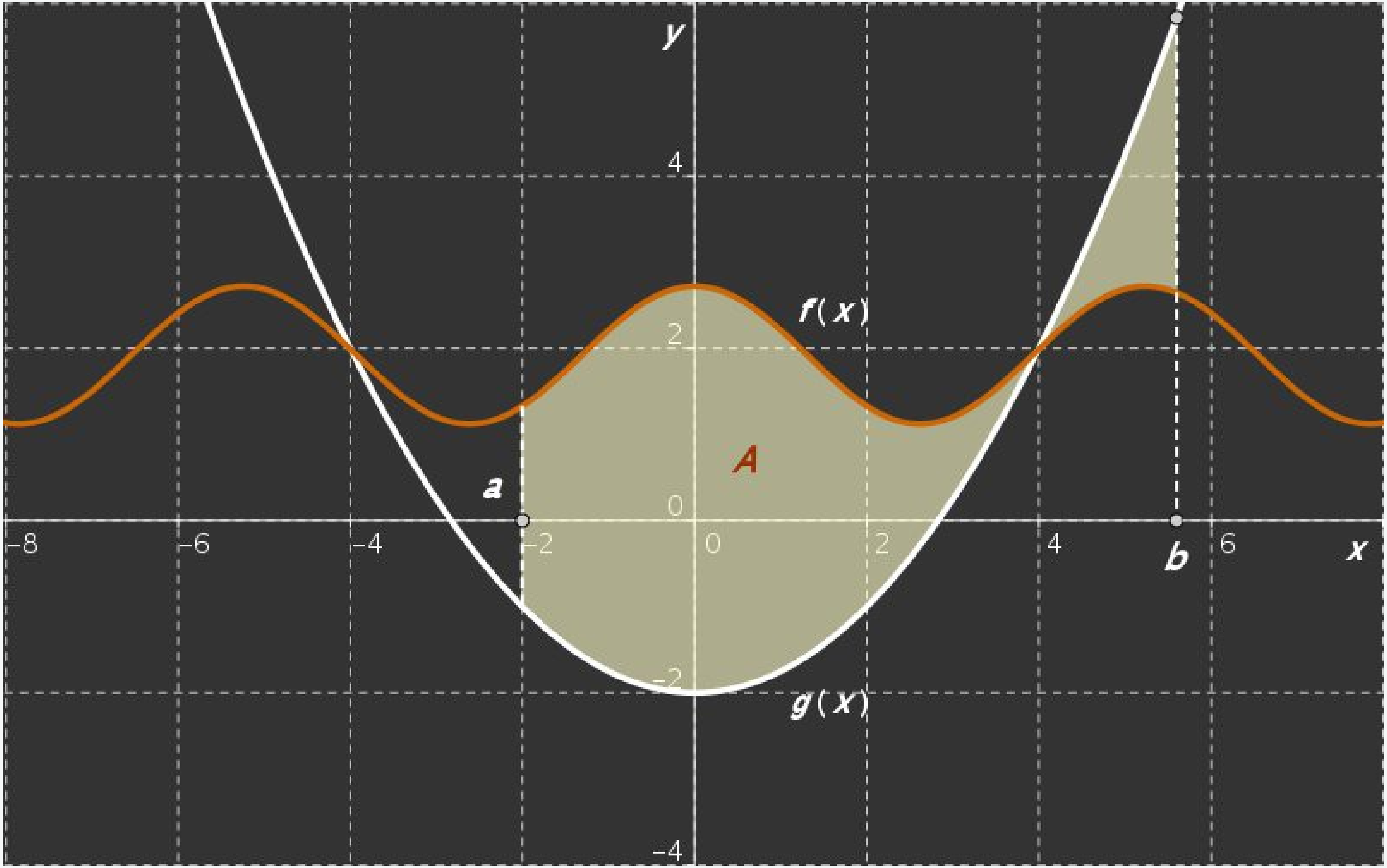


Abb. B3: Die Fläche zwischen zwei Kurven f (x) und g (x) im Intervall [a, b]

Es soll die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und $g(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ berechnet werden:

Aufgabe 1:

a) $f(x) = x + 1, \quad g(x) = e^{-x}, \quad a = 0, \quad b = 3$

b) $f(x) = x - 1, \quad g(x) = e^{-x} - 2, \quad a = 0, \quad b = 3$

Aufgabe 2:

$f(x) = -x + 4, \quad g(x) = x, \quad a = 0, \quad b = 4$

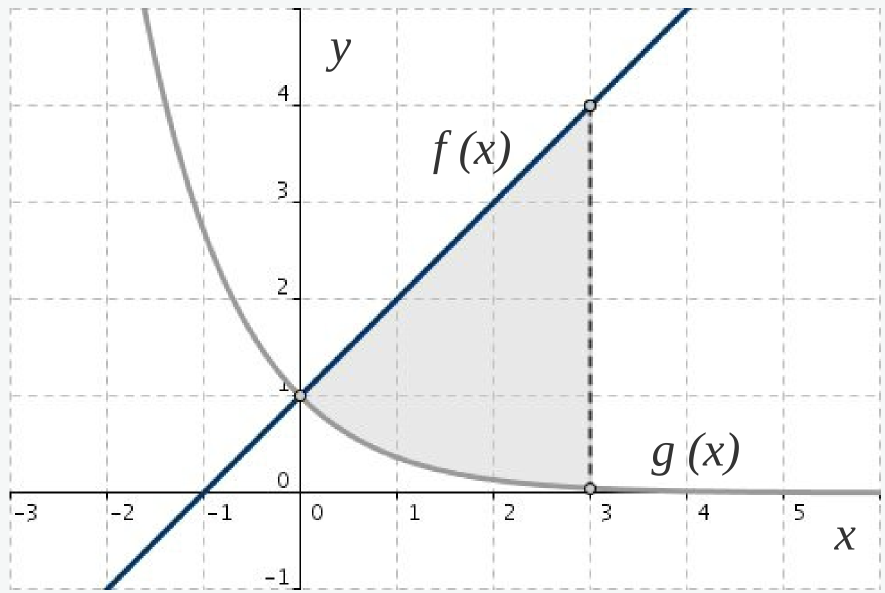
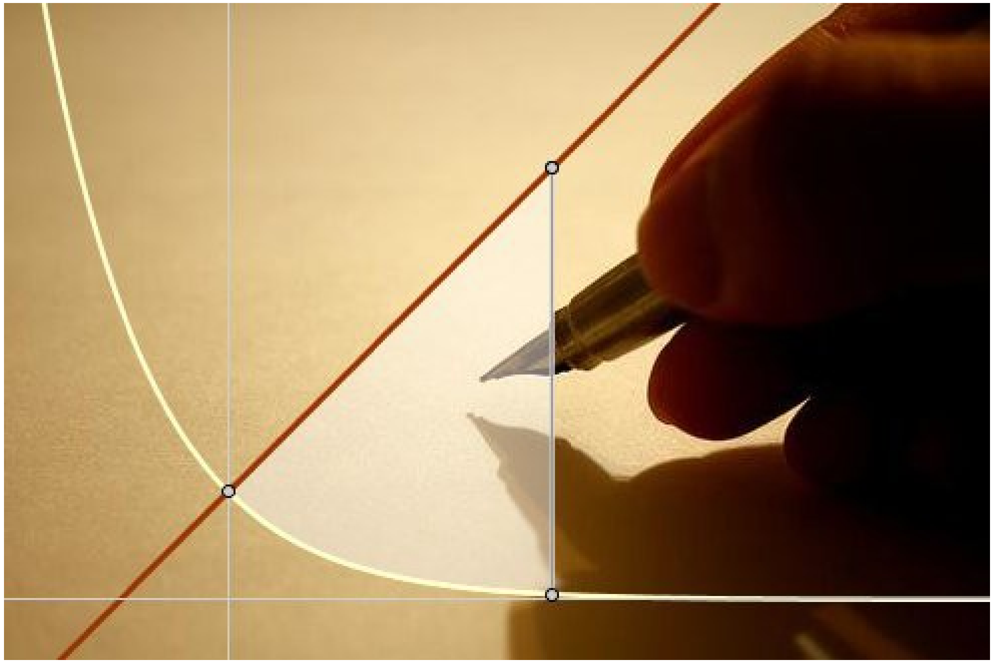


Abb. L1a: Die Fläche zwischen Kurven f (x) und g (x) im Intervall [0, 3], f (x) ist die obere Kurve und g (x) ist die untere Kurve

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad x \in [0,\ 3]$$

$$A = A_1 - A_2 = \int_0^3 \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_0^3 \left[x + 1 - e^{-x} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x + e^{-x} \right]_0^3 = \frac{15}{2} + e^{-3} \simeq 6.55 \text{ FE}$$



Die Formel

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

bleibt auch dann gültig, wenn eine oder beide Funktionen negative Werte annehmen. Lediglich ihre Differenz $f(x) - g(x)$ bestimmt den durch beide Kurven berandeten Flächeninhalt.

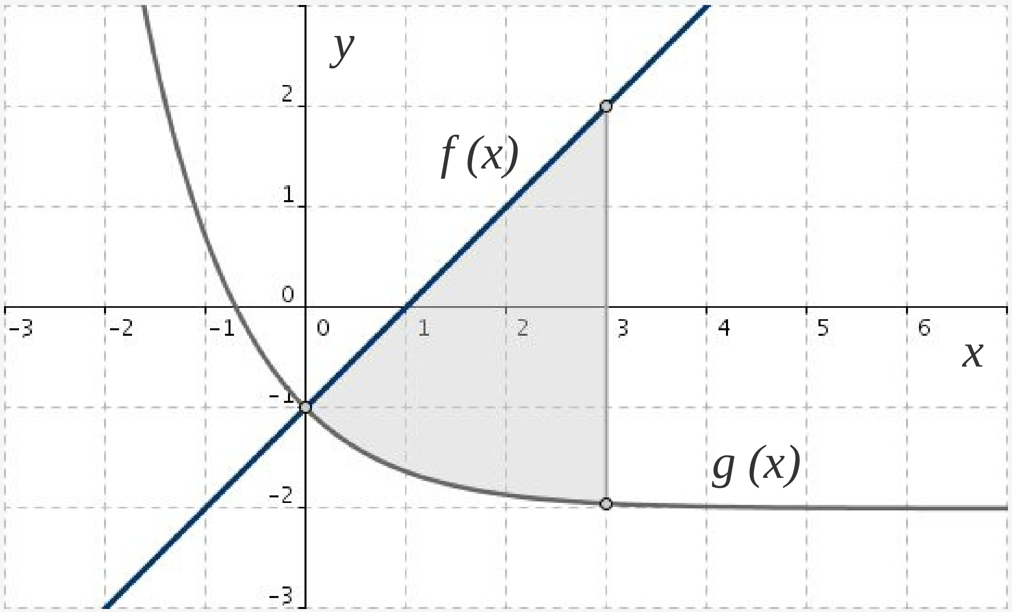
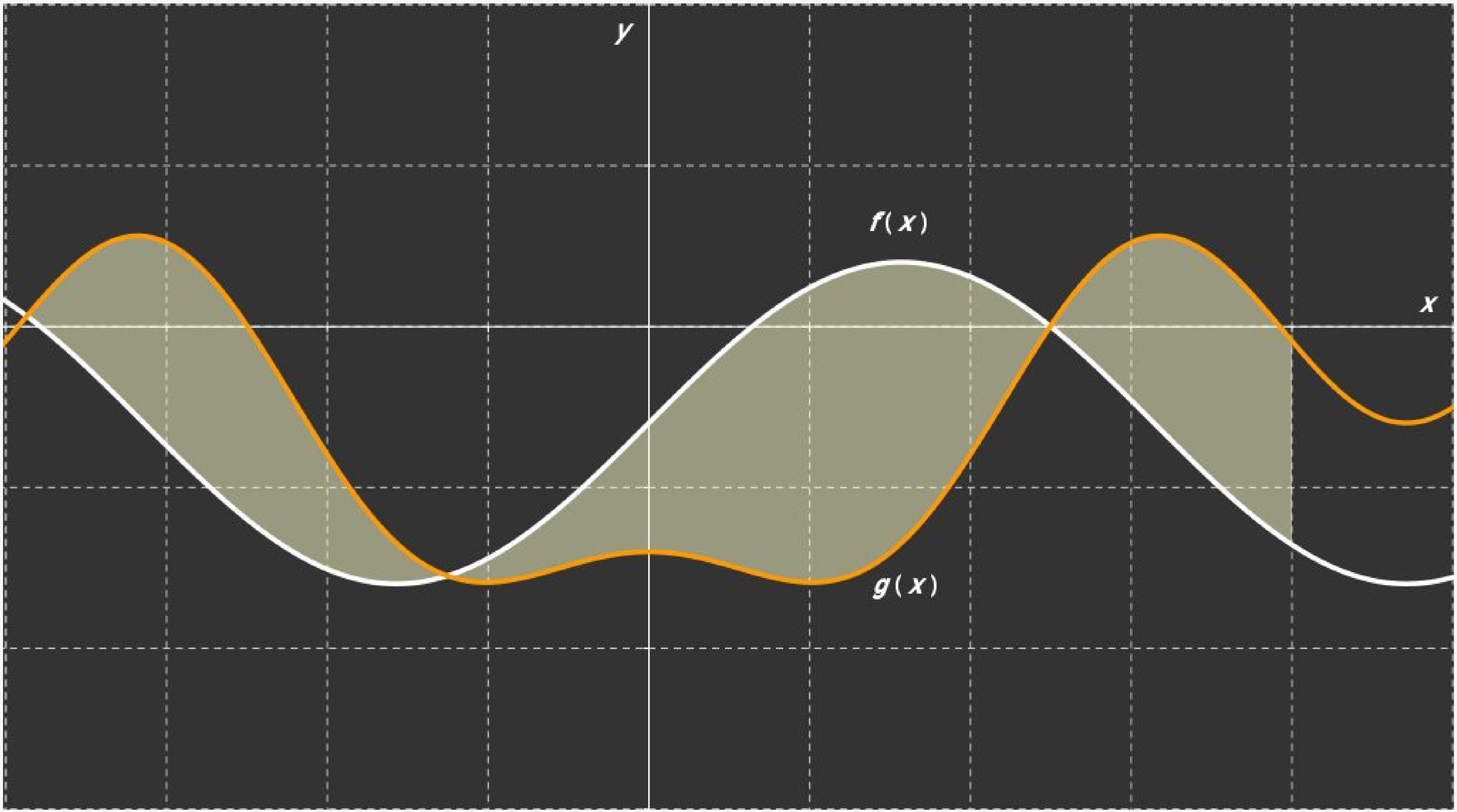


Abb. L1b: Die Fläche zwischen Kurven f (x) und g (x) im Intervall [0, 3], f (x) ist die obere Kurve und g (x) ist die untere Kurve

$$f(x) = x - 1, \qquad g(x) = e^{-x} - 2, \qquad x \in [0, 3]$$

Die Funktionen aus dem Beispiel *1a)* werden nach unten verschoben. Wir bestimmen den Flächeninhalt zwischen diesen Funktionen im Bereich [0, 3]

$$A = \int_0^3 \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_0^3 \left[x + 1 - e^{-x} \right] dx = \frac{15}{2} + e^{-3} = 6.55 \text{ FE}$$



Es ist für die Flächenberechnung zwischen zwei Kurven nicht wichtig, ob die Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt.

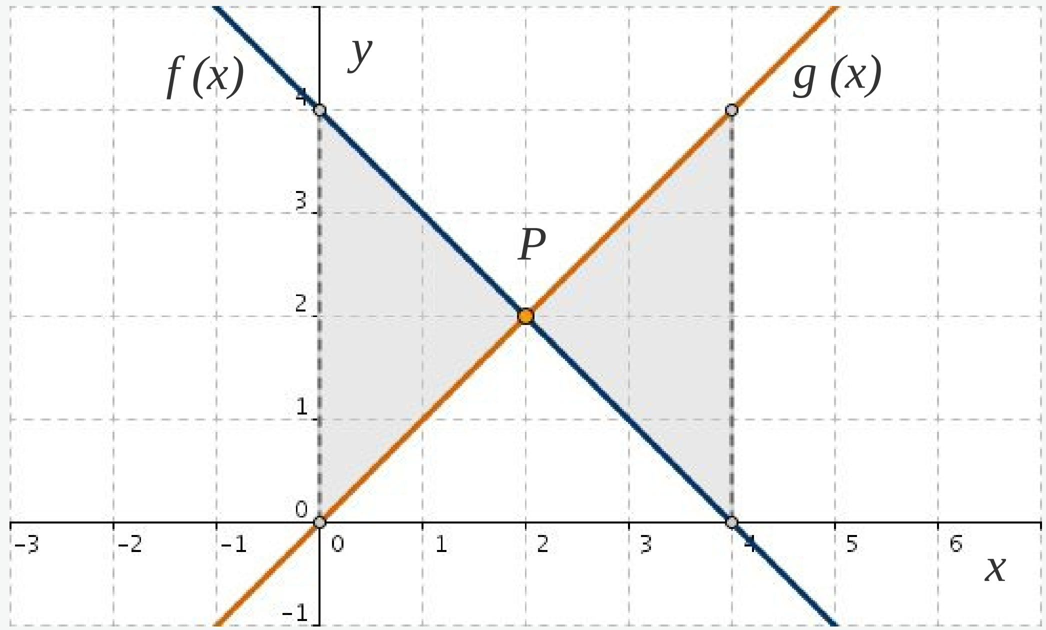


Abb. 3: Die Fläche zwischen Kurven f (x) und g (x) im Intervall [0, 4]

$$f(x) = -x + 4, \qquad g(x) = x, \qquad x \in [0,\ 4]$$

Es ist möglich, dass sich die Funktionen im Integrationsbereich $[a, b]$ schneiden. Bei der Flächenberechnung muss dann der Integrationsbereich am Schnittpunkt unterteilt werden.

Bildet man die Differenz $f(x) - g(x)$, so ist diese für $0 \le x < 2$ positiv und für $2 < x \le 4$ negativ.

Das Integral

$$A = \int_0^4 \big(f(x) - g(x) \big)\, dx = \int_0^4 \big(4 - 2x \big)\, dx = \Big[4x - x^2 \Big]_0^4 = 0$$

beschreibt damit nicht die gesuchte Fläche. Daher muss der Integrationsbereich bei der x-Koordinate des Schnittpunktes beider Geraden $(x = 2)$ unterteilt und die zwei Teilflächen einzeln berechnet werden.

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x) \big)\, dx + \int_2^4 \big(g(x) - f(x) \big)\, dx =$$

$$= \int_0^2 (4 - 2x)\, dx + \int_2^4 (2x - 4)\, dx = 8 \text{ FE}$$

Die Vorgehensweise bei der Flächenberechnung zwischen zwei Kurven im Bereich $[a, b]$:

- Man bestimmt sämtliche Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ $f(x)$ und $g(x)$ (bzw. die Nullstellen der Differenzfunktion $f(x) - g(x)$)
- Man teilt das Integrationsintervall $[a, b]$ in Teilbereiche ein.
- In jedem der Teilbereiche berechnet man den Integralwert und addiert anschließend die Beträge sämtlicher Integrale.

In manchen Aufgabenstellungen sind die Intervallgrenzen a und b nicht explizit gegeben. Gesucht ist eine Fläche, die von zwei Kurven eingeschlossen wird. Die Integrationsgren zen sind in diesem Fall die Abszissenwerte der Schnittpunk- te beider Kurven. Diese Grenzen müssen vor dem Aufstellen des Integrals ermittelt werden.

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ eingeschlossen wird

Aufgabe 3: $f(x) = 2\sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{4} x^2$

Aufgabe 4: $f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = x$

Aufgabe 5: $f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = x, \quad I = [0, 1]$

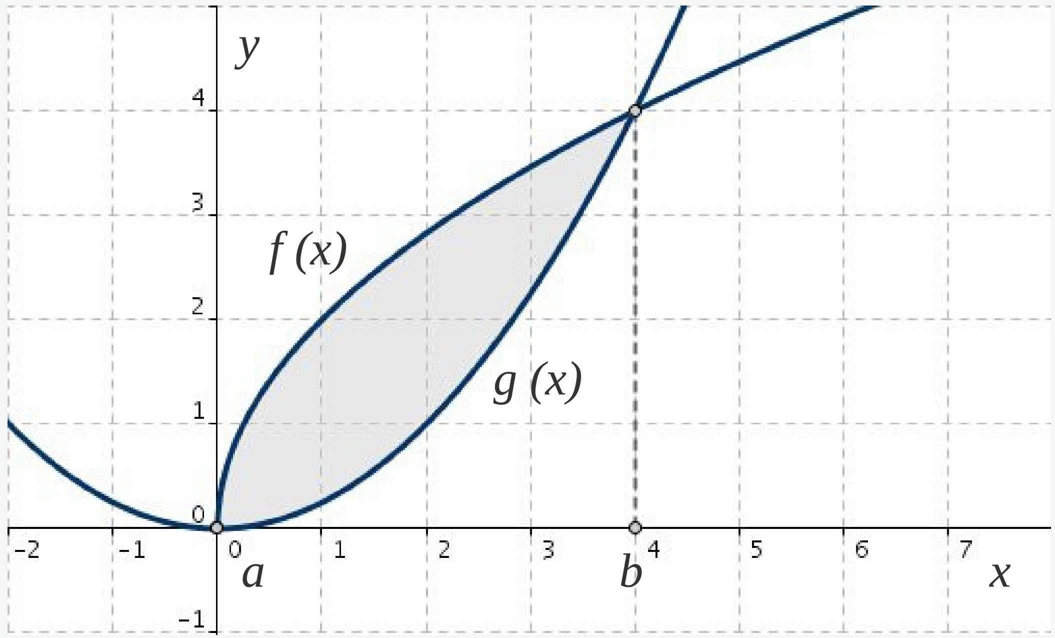


Abb. 4-1: Die zwischen den Kurven f (x) und g (x) eingeschlossene Fläche

$$f(x) = 2\sqrt{x}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{4}\,x^2$$

Um das Integrationsintervall festzulegen, bestimmen wir zunächst die Schnittstellen der beiden Kurven:

$$2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad x\,(64 - x^3) = 0\,, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 4$$

$$A = \int_0^4 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 \left[2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right] dx = \left[\frac{4}{3}\,x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{16}{3} \simeq 5.33\ \text{FE}$$

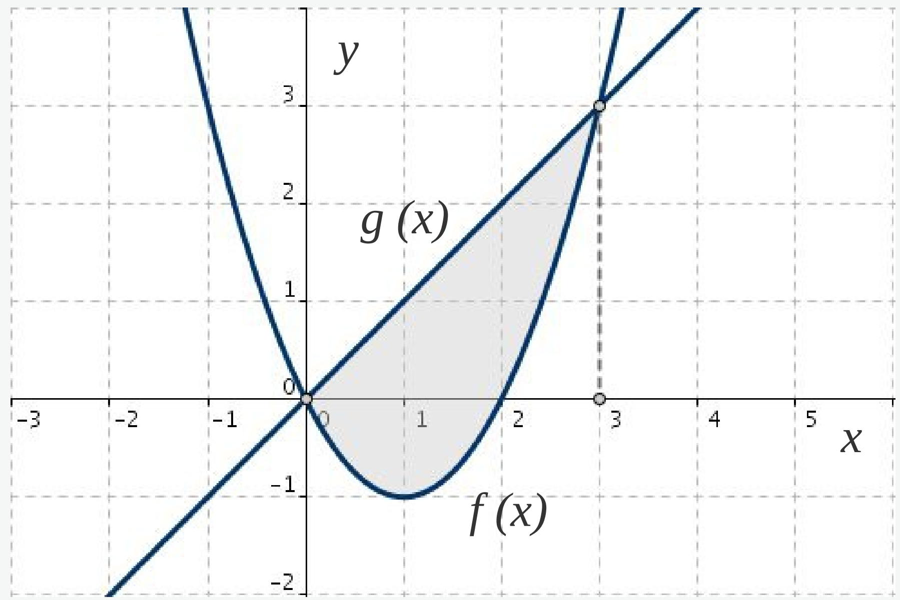


Abb. 4-2: Die zwischen den Kurven f (x) und g (x) eingeschlossene Fläche

$$f(x) = x^2 - 2x\,, \quad g(x) = x$$

Wir bestimmen die Schnittstellen der beiden Kurven:

$$x^2 - 2x = x \quad \Rightarrow \quad x(x-3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

$$A = \int_0^3 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^3 (x - x^2 + 2x)\, dx = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2}\, x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 dx = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ FE}$$

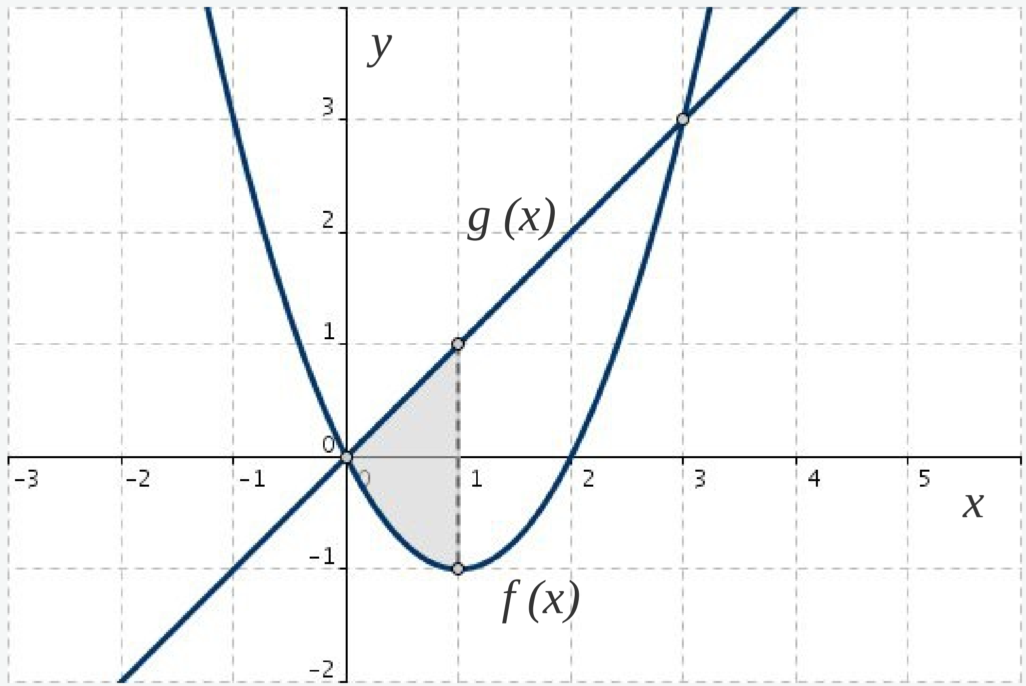


Abb. 4-3: Die Fläche zwischen den Kurven f (x) und g (x) im Intervall [0, 1]

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = x$$

Die Schnittstellen der beiden Kurven: $x_1 = 0, \quad x_2 = 3 \quad x_2 \notin [0, 1]$

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 (3x - x^2)\, dx = \frac{7}{6} \simeq 1.17 \text{ FE}$$

Die von den gegebenen Funktionen begrenzte Fläche ist zu ermitteln:

Aufgabe 6:

$$f(x) = 2x^2 - x^4, \quad g(x) = x - 1, \quad I = [0, 1]$$

Aufgabe 7:

$$f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = x, \quad I = [-1, 1]$$

Aufgabe 8:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x\, e^{-x^2}, \quad I = [0, 2]$$

Aufgabe 9:

$$f(x) = 2x^2 + 10, \quad g(x) = 4x + 16, \quad I = [-2, 5]$$

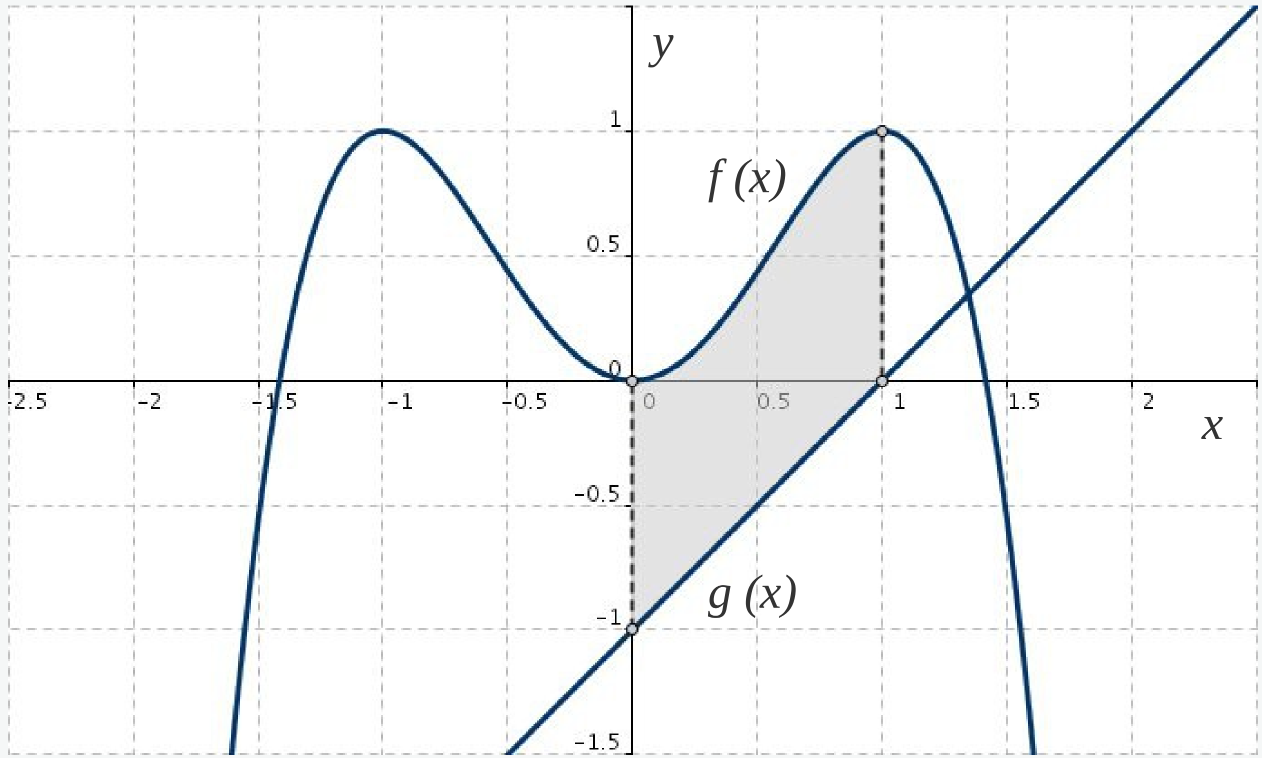


Abb. 5-1: Die Fläche zwischen den Kurven f (x) und g (x) im Intervall [0, 1]

$$f(x) = 2x^2 - x^4, \quad g(x) = x - 1, \quad x \in [0, 1]$$

$$A = = \int_0^1 \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_0^1 \left[2x^2 - x^4 - x + 1 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{29}{30}$$

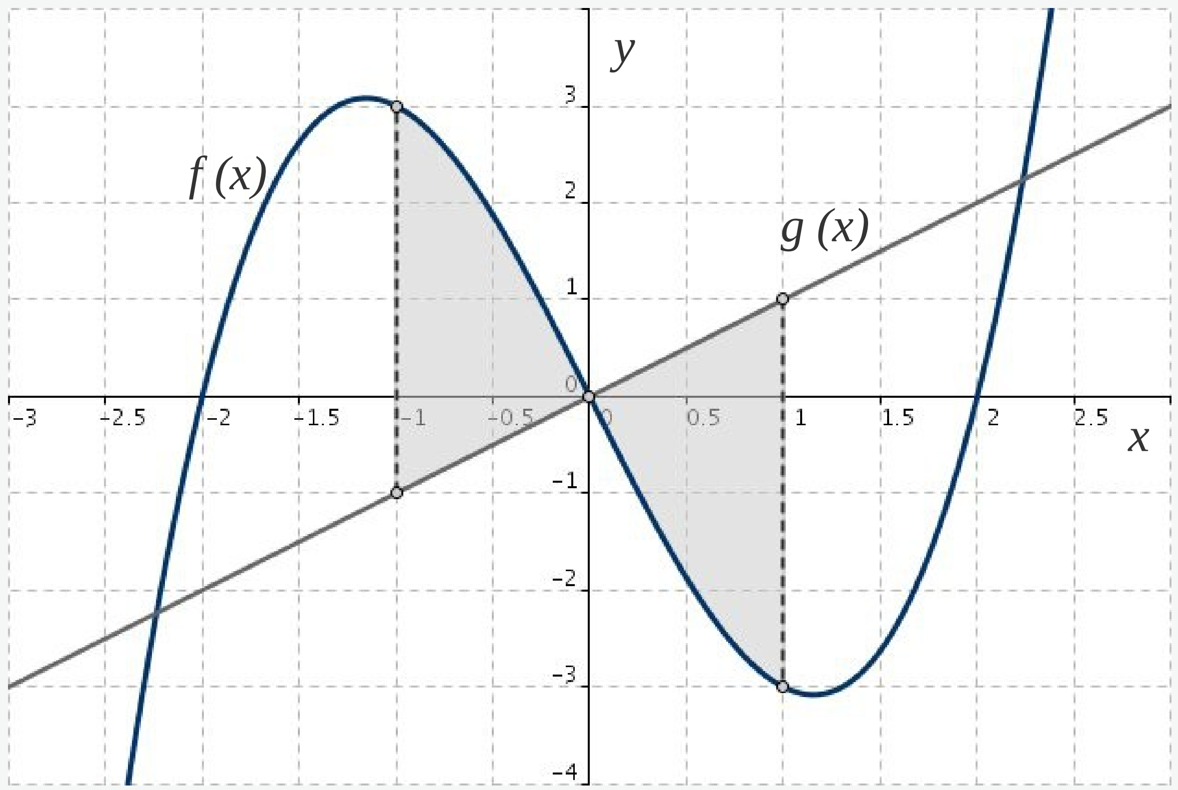


Abb. 5-2: Die Fläche zwischen den Kurven f (x) und g (x) im Intervall [-1, 1]

$$f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$x^3 - 4x = x \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 5) = 0 \; x_1 = -\sqrt{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{5}$$

$$x_2 \in I = [-1, 1], \qquad x_1, \, x_3 \notin I$$

$$A = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx - \int_{0}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = 4.5$$

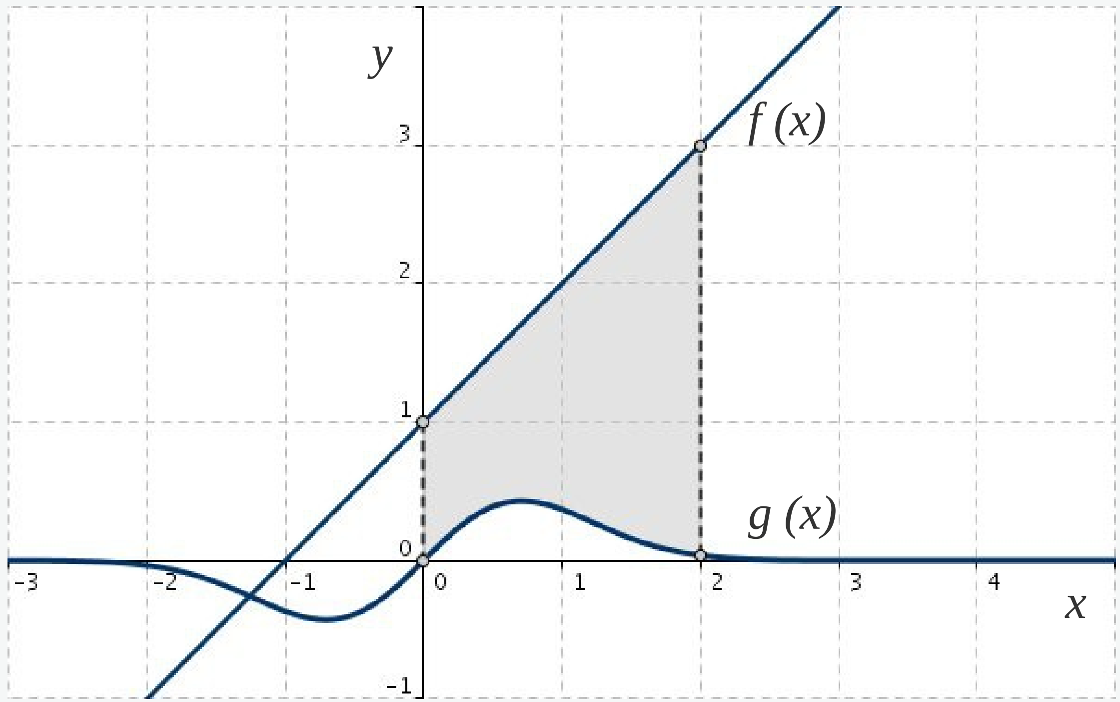


Abb. 5-3: Die Fläche zwischen den Kurven f (x) und g (x) im Intervall [0, 2]

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x\, e^{-x^2}, \quad x \in [0, 2]$$

$$A = \int_0^2 \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_0^2 \left[x + 1 - x\, e^{-x^2} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2}$$

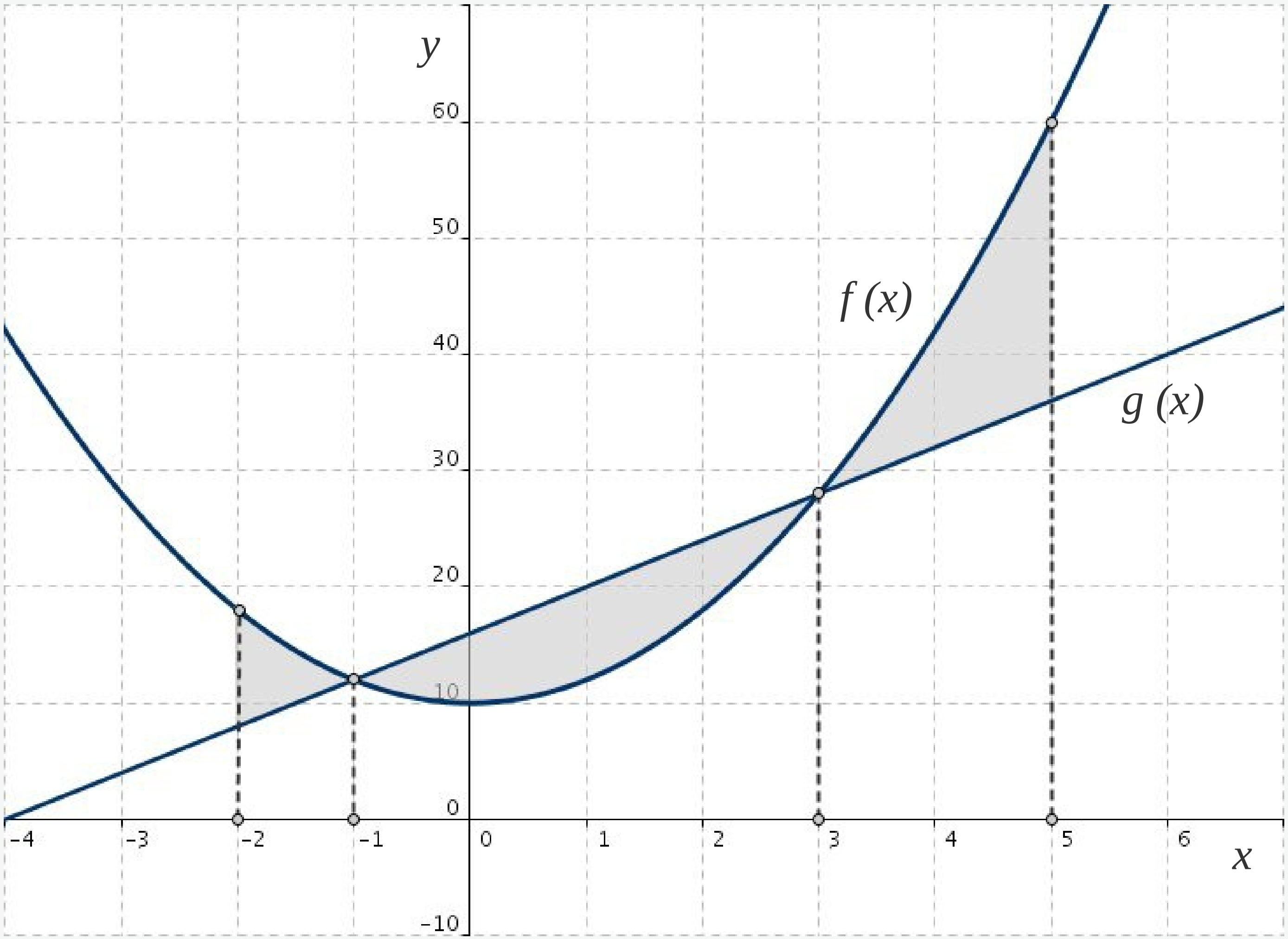


Abb. 5-4: Die Fläche zwischen den Kurven f (x) und g (x) im Intervall [-2, 5]

$$f(x) = 2x^2 + 10, \quad g(x) = 4x + 16, \quad x \in [-2, 5]$$

Wir bestimmen die Schnittstellen der beiden Kurven $f(x) = g(x)$:

$$2x^2 + 10 = 4x + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$A = \int_{-2}^{-1} \left[f(x) - g(x) \right] dx - \int_{-1}^{3} \left[f(x) - g(x) \right] dx + \int_{3}^{5} \left[f(x) - g(x) \right] dx =$$

$$= 2 \left(\int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\, dx - \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx + \int_{3}^{5} (x^2 - 2x - 3)\, dx \right) =$$

$$= 2 \left(\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{3}^{5} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} \right) = \frac{142}{3}$$