



<http://www.youtube.com/watch?v=Y37cWnjdhM&feature=PlayList&p=F364D759DCD5431A&index=0>

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  und  $x$ -Achse eingeschlossen wird

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2, \quad y = 0, \quad x, y \geq 0$$

# Flächen zwischen Kurven: Lösung 10 (erste Variante)

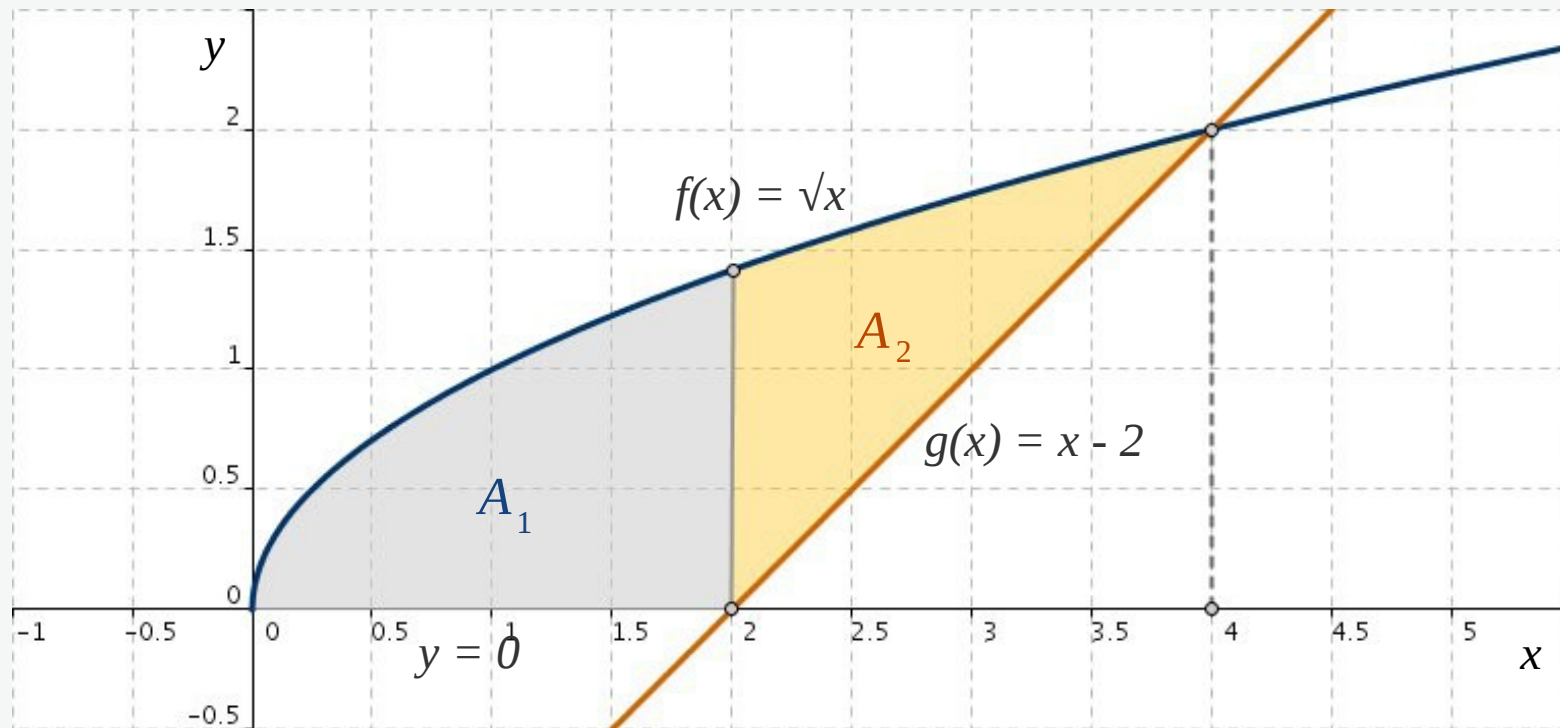


Abb. 6-1: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$ ,  $g(x)$  und  $x$ -Achse ( $x, y \geq 0$ )

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^2 (f(x) - 0) dx + \int_2^4 (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_0^2 (\sqrt{x} - 0) dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \\ &= \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

## Flächen zwischen Kurven: Lösung 10 (zweite Variante)

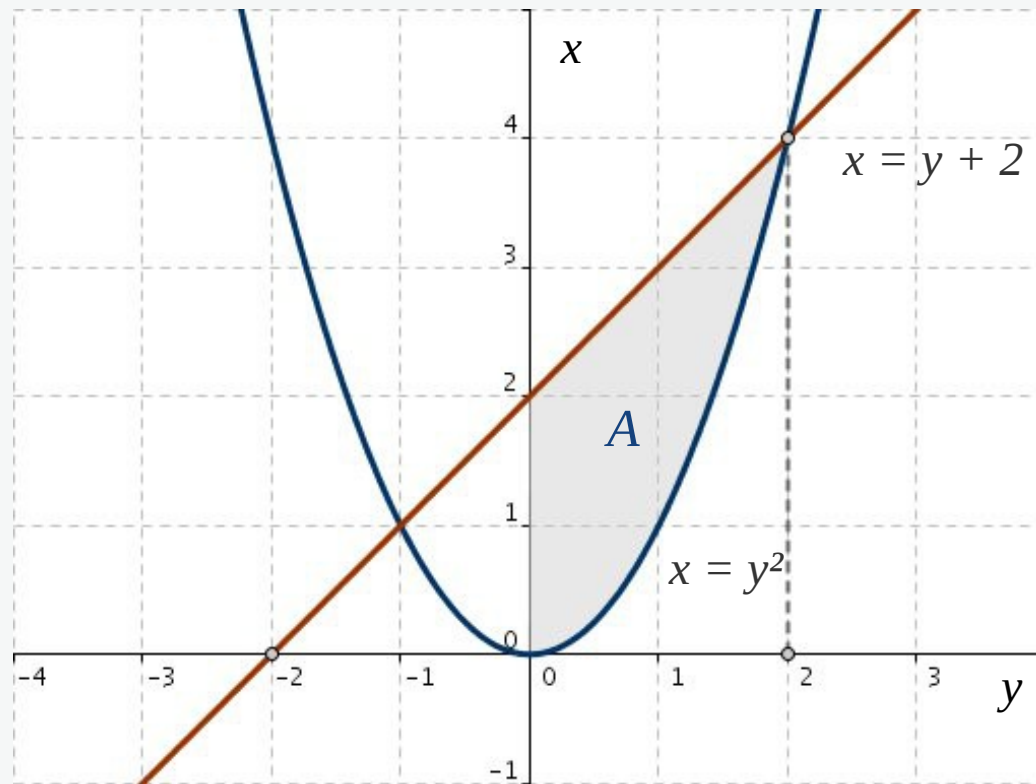


Abb. 6-2: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(y)$ ,  $g(y)$  und  $x$ -Achse ( $x, y \geq 0$ )

Neue Integration nach  $y$

$$A = \int_0^2 ((y + 2) - y^2) dy = \left[ \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

## Flächen zwischen Kurven: Lösung 10 (dritte Variante)

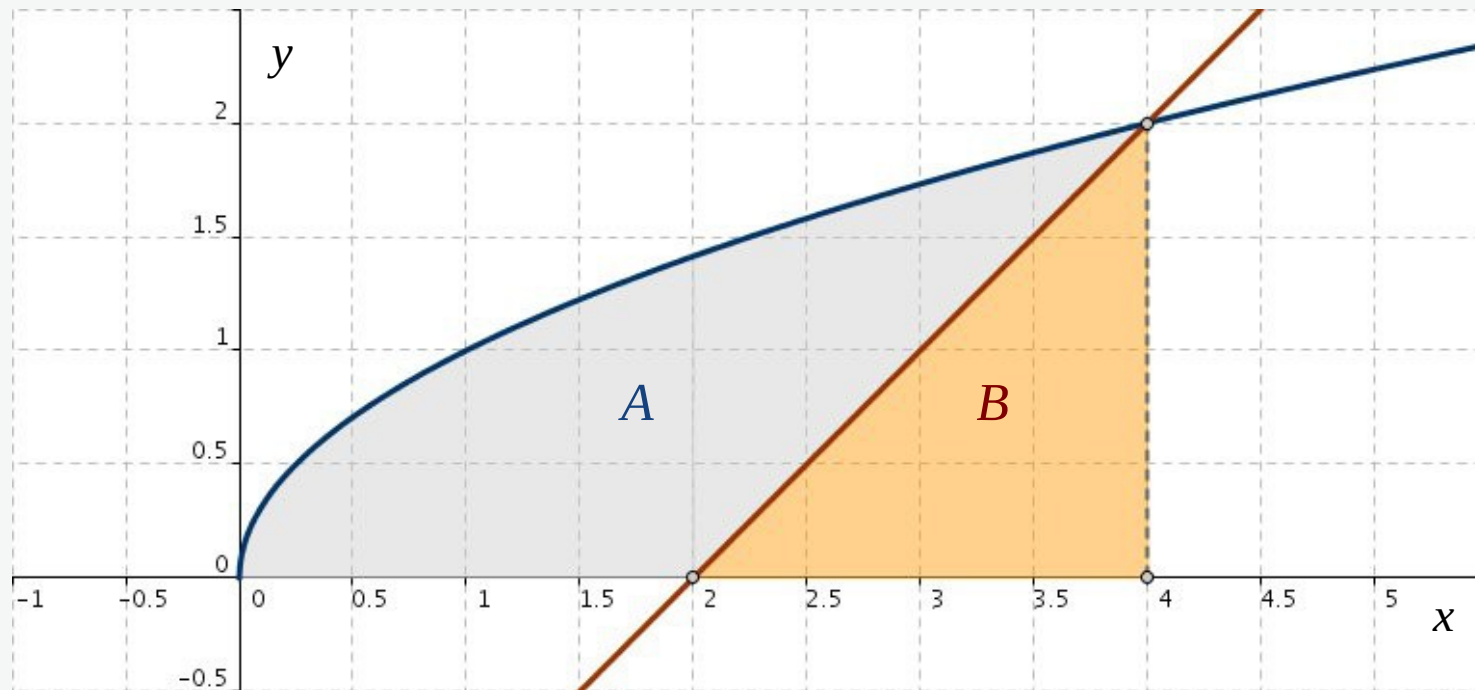


Abb. 6-3: Zur Berechnung die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$ ,  $g(x)$  und  $x$ -Achse ( $x, y \geq 0$ )

$$A = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = \frac{10}{3}$$



<http://www.youtube.com/watch?v=Y37cWnjdhM&feature=PlayList&p=F364D759DCD5431A&index=0>

Im Folgenden bestimmen Sie gezeichnete Flächen:

# Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 11

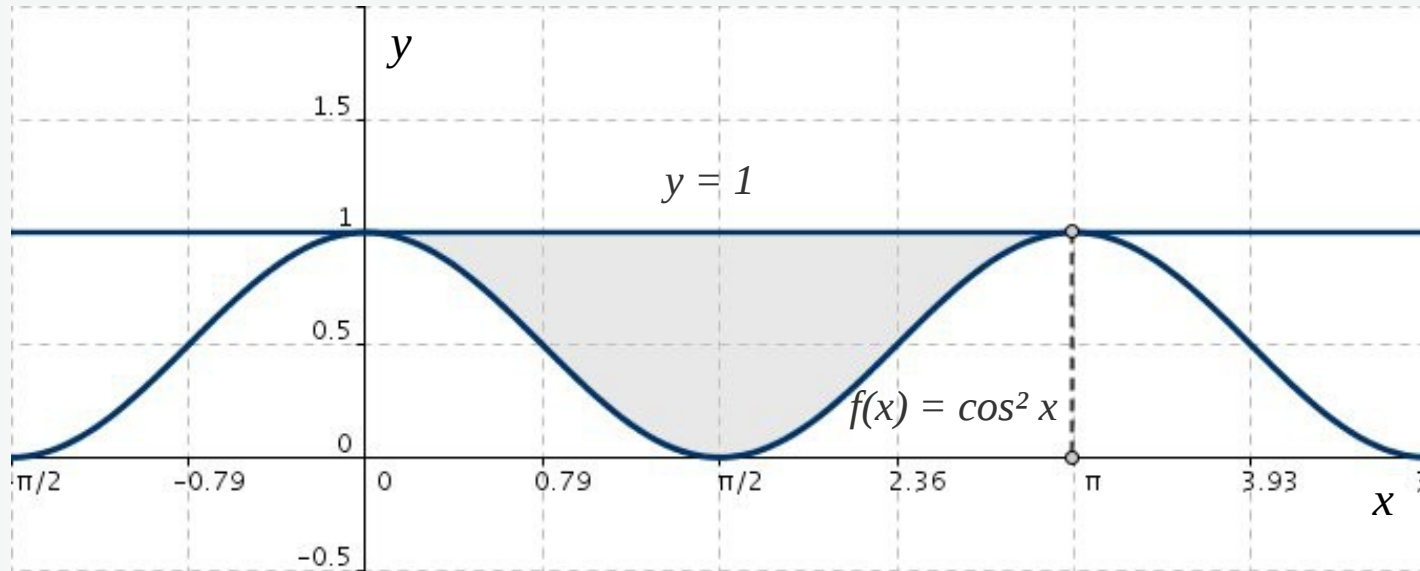


Abb. 7-1: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x) = \cos^2 x$  und  $y = 1$  im Intervall  $[0, \pi]$

$$A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

## Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 12

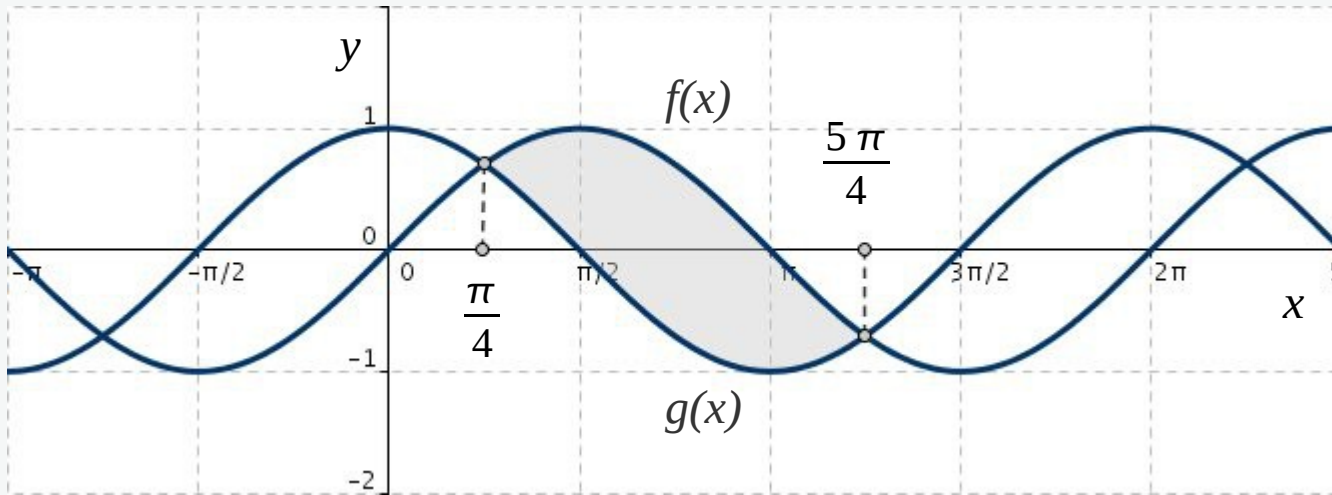


Abb. 7-2: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $[\pi/4, 5\pi/4]$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

## Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 13

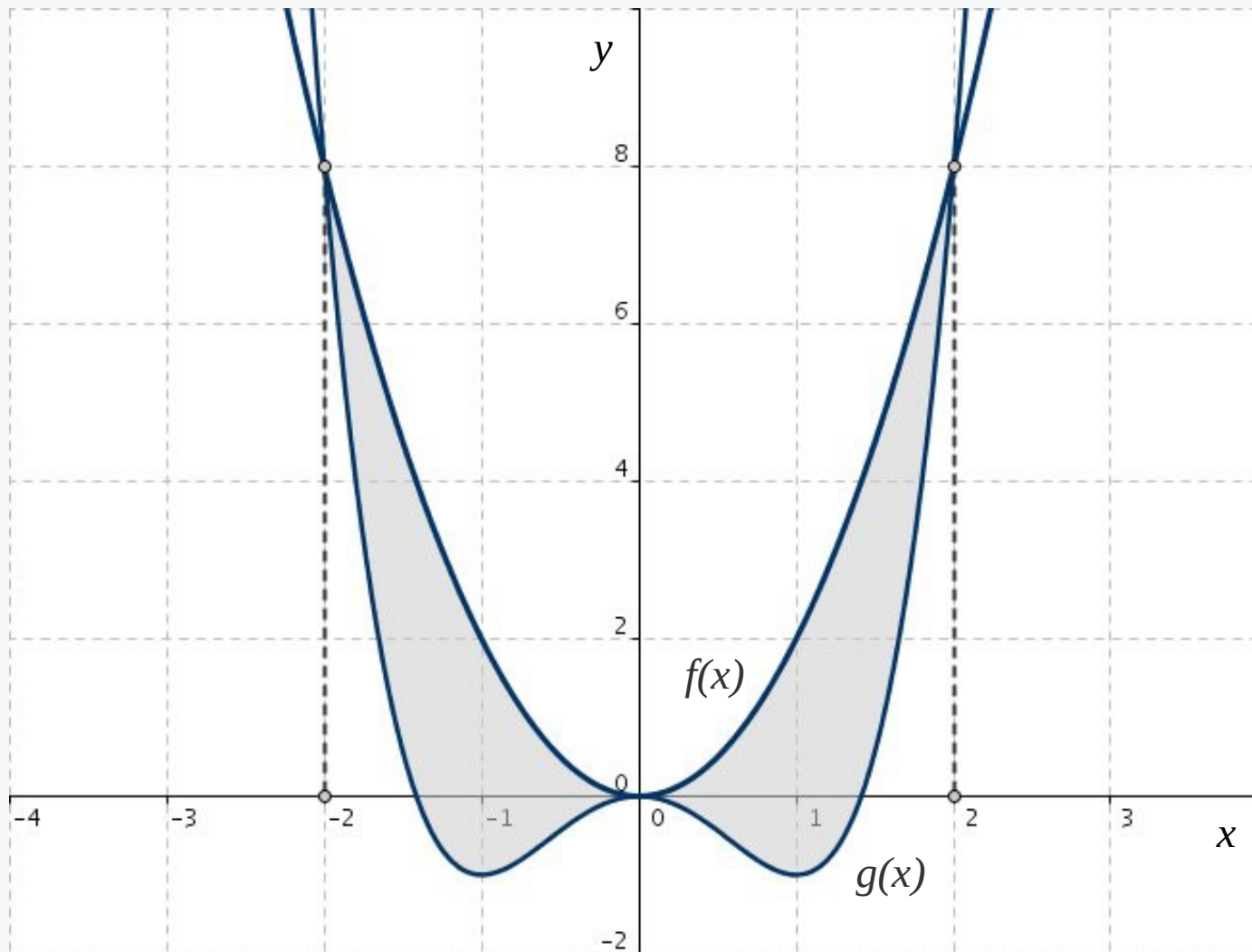


Abb. 7-3: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $[-2, 2]$

$$f(x) = 2x^2, \quad g(x) = x^4 - 2x^2$$



## Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 14

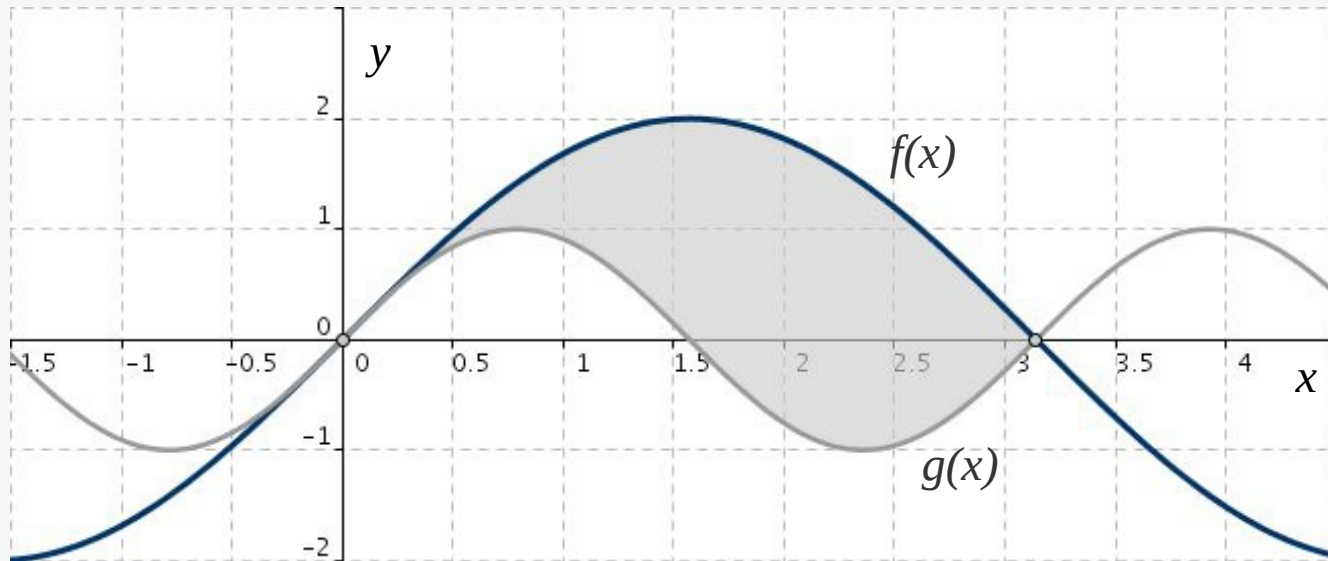


Abb. 7-4: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $[0, \pi]$

$$f(x) = 2 \sin x, \quad g(x) = \sin(2x)$$

# Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 15

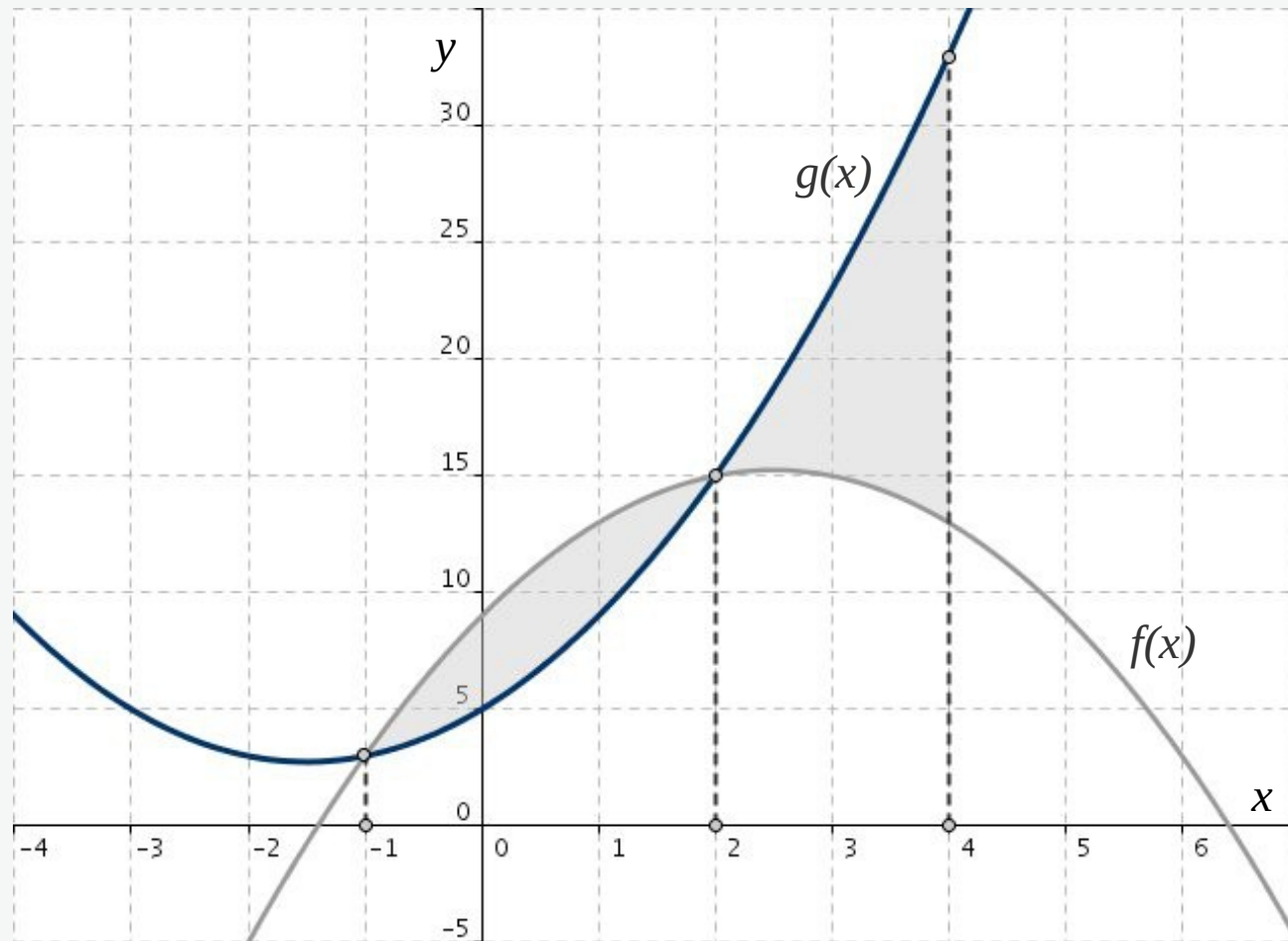


Abb. 7-5: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $[-1, 4]$

$$f(x) = -x^2 + 5x + 9, \quad g(x) = x^2 + 3x + 5$$

## Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 16

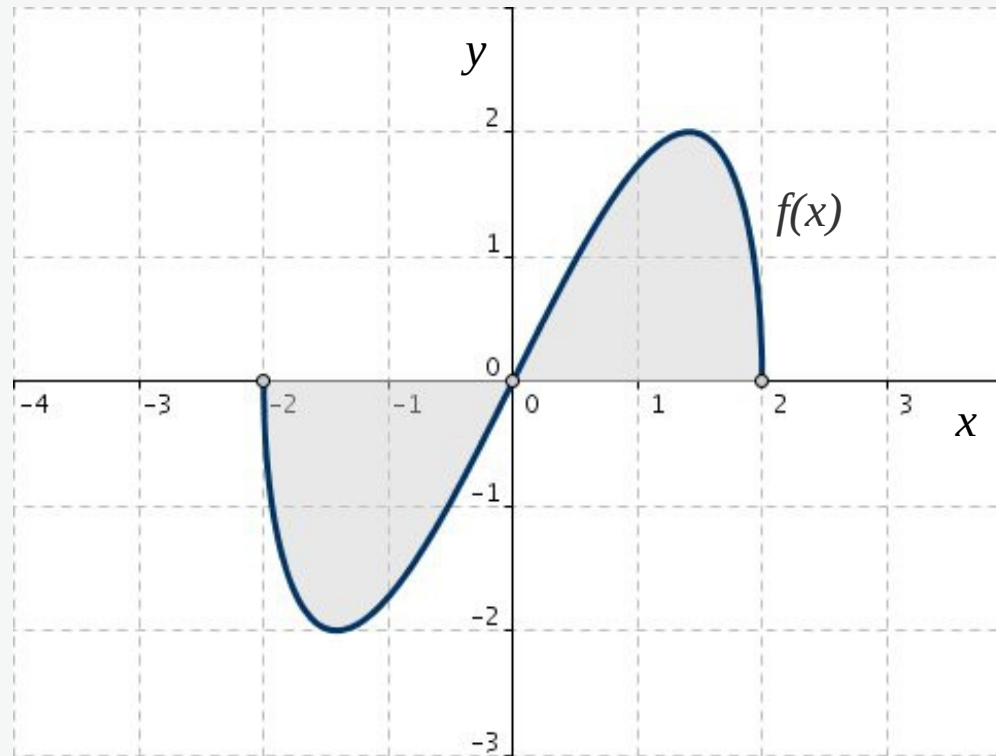


Abb. 7-6: Die Fläche zwischen der Kurve  $f(x)$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[-2, 2]$

$$f(x) = x \sqrt{4 - x^2}$$

## Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 17

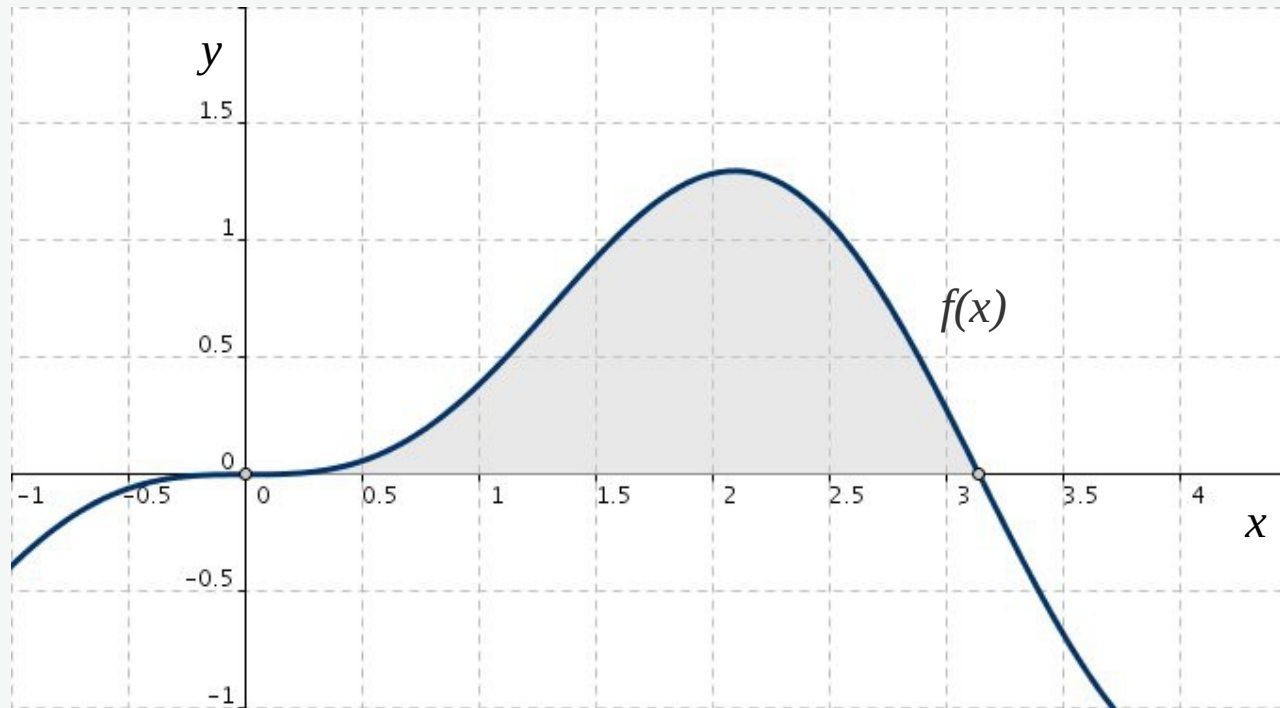


Abb. 7-7: Die Fläche zwischen der Kurve  $f(x)$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[0, \pi]$

$$f(x) = (1 - \cos x) \sin x$$

Lösung 11:  $A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) dx = \frac{\pi}{2}$

Lösung 12:  $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = - \left[ \sin x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$

Lösung 13:  $A = 2 \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \frac{128}{15}$

Lösung 14:  $A = \int_0^{\pi} (2 \sin x - \sin(2x)) dx = 4$

Lösung 15:  $A = \frac{79}{3}$

Lösung 16:  $A = 2 \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{16}{3}$

Lösung 17:  $A = \int_0^{\pi} (1 - \cos x) \sin x dx = 2$

Bestimmen Sie die Flächen, die von den Kurven mit den Gleichungen  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  eingeschlossen oder auf dem Intervall  $[a, b]$  begrenzt werden

Aufgabe 18:  $f(x) = \sin^2 x + 1$ ,  $g(x) = -\sin x$ ,  $I = [0, \pi]$

Aufgabe 19:  $f(x) = 2^{|x|}$ ,  $g(x) = 4$

# Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 18

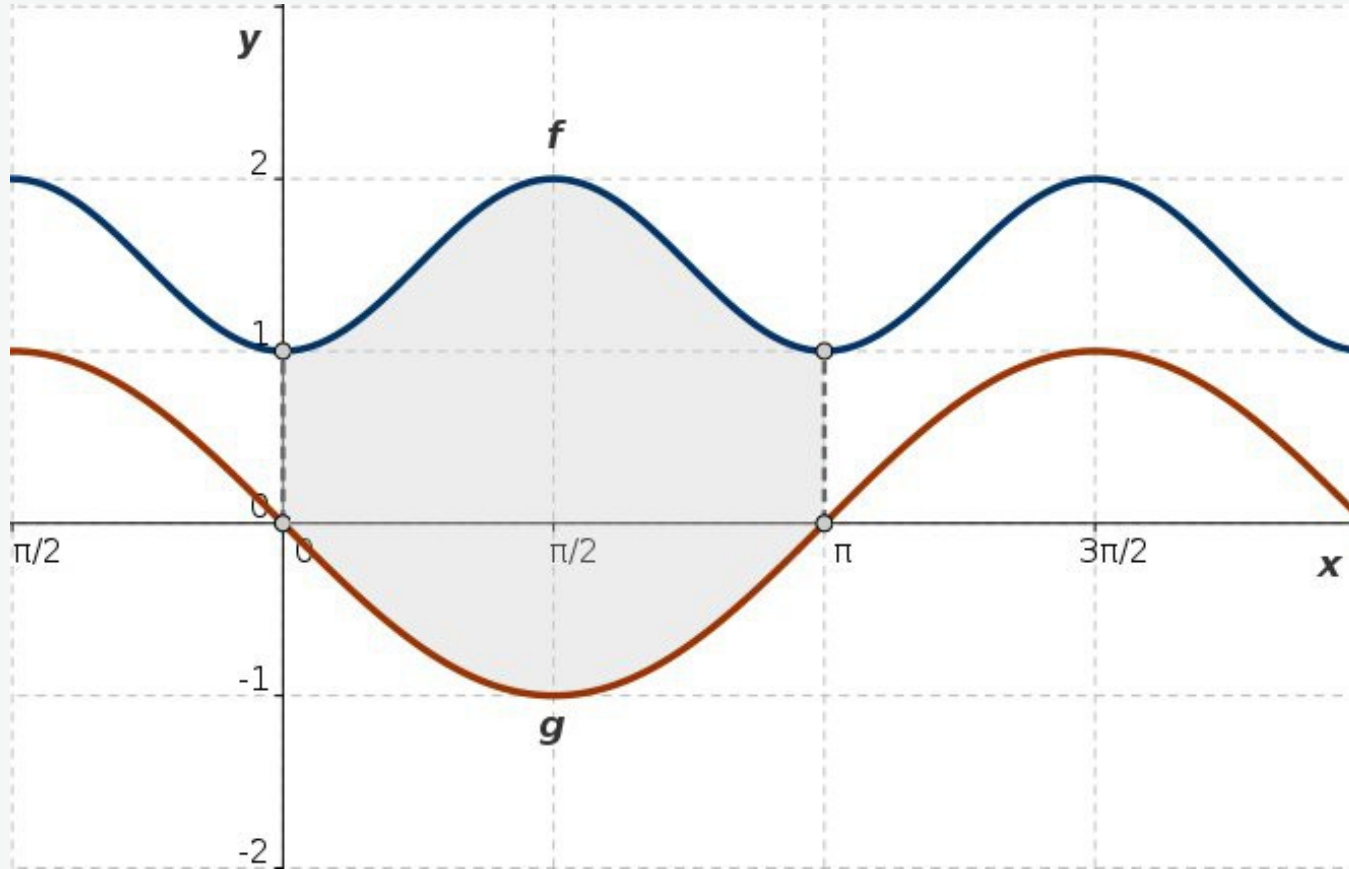


Abb. 8-1: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $[0, \pi]$

$$f(x) = \sin^2 x + 1, \quad g(x) = -\sin x$$

$$A = \int_0^{\pi} (\sin^2 x + 1 + \sin x) dx = \int_0^{\pi} \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} + 1 + \sin x \right) dx = \left( 2 + \frac{3}{2} \pi \right) \text{ FE}$$

# Flächen zwischen Kurven: Aufgabe 19

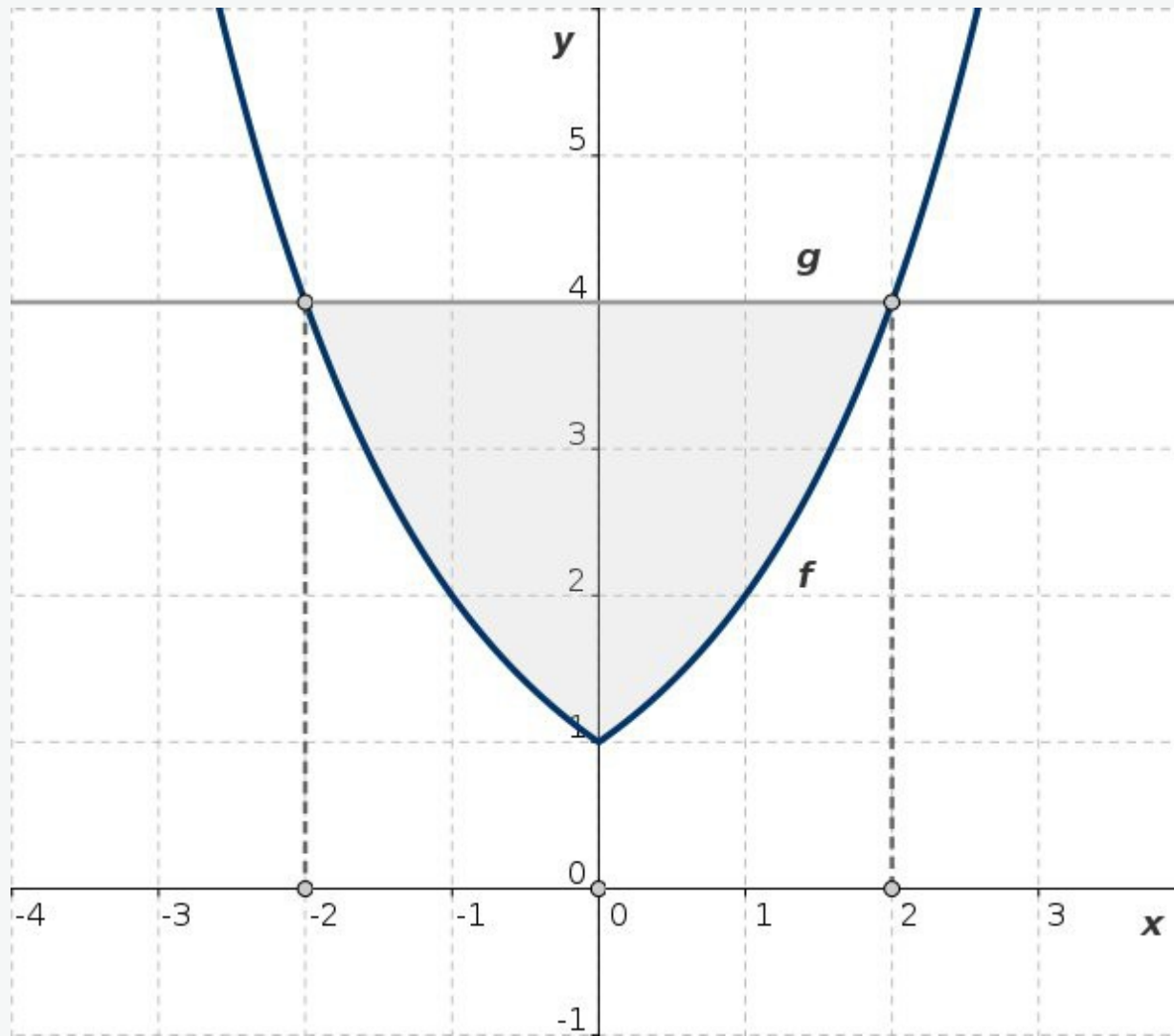


Abb. 8-2: Die Fläche zwischen den Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $[-2, 2]$

$$f(x) = 2^{|x|}, \quad g(x) = 4$$
$$A = 2 \int_0^2 (4 - 2^x) dx = 2 \left( 8 - \frac{3}{\ln 2} \right) \text{ FE}$$