http://www.purpleark.org/images/pottery_wheel4.jpg

*Massenträgheitsmomente homogener Körper: Aufgaben*

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment eines homoge
nen Rotationskörpers der konstanten Dichte $\rho$, der durch
Rotation der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $I$ entsteht

Aufgabe 1: $f(x) = e^{x}, \quad I = [0,\ 3]$

Aufgabe 2: $f(x) = \sqrt[4]{\sin x}, \quad I = [0,\ \pi]$

Aufgabe 3: $f(x) = \sqrt[4]{\sin(0.5\, x)}, \quad I = [0,\ 2\pi]$

Aufgabe 4: $f(x) = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{2 - x}, \quad I = [0,\ 2]$

Aufgabe 5: $f(x) = (2 - x) \cdot \sqrt{x}, \quad I = [0,\ 2]$

Aufgabe 6: $f(x) = (4 - x) \cdot \sqrt{2x}, \quad I = [0,\ 4]$

$$f(x) = e^{x}, \qquad I = [0,\ 3]$$

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_a^b y^4\, dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^3 \left( e^{x} \right)^4 dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^3 e^{4x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi\,\rho}{2} \left( e^{12} - 1 \right)$$

# Das Massenträgheitsmoment: Lösung 2

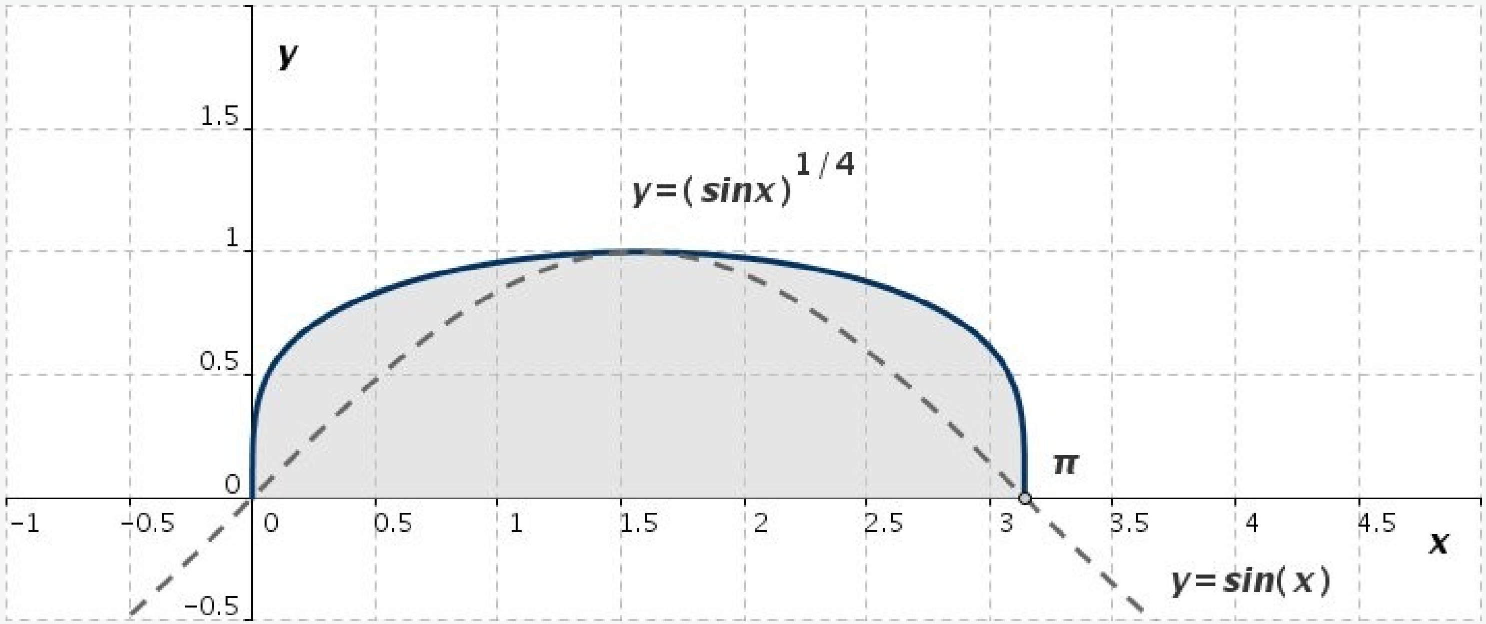


*Abb. 19-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = (\sin x)^{1/4}$ und der x-Achse im Intervall $[0, \pi]$*

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^{\pi} y^4\, dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^{\pi} \left(\sqrt[4]{\sin x}\,\right)^4 dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \pi\,\rho$$

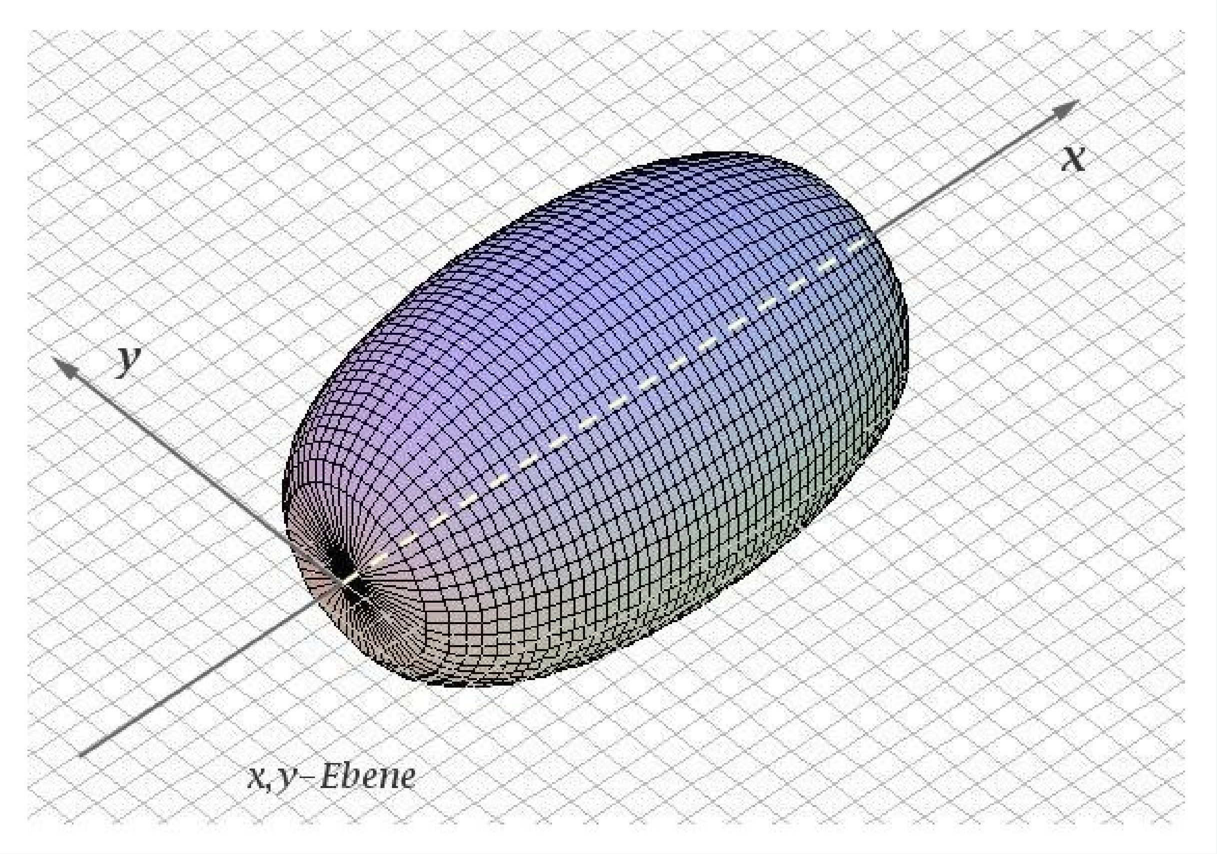


*Abb. 19-2: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = (\sin x)^{1/4}$ $(0 \le x \le \pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper*

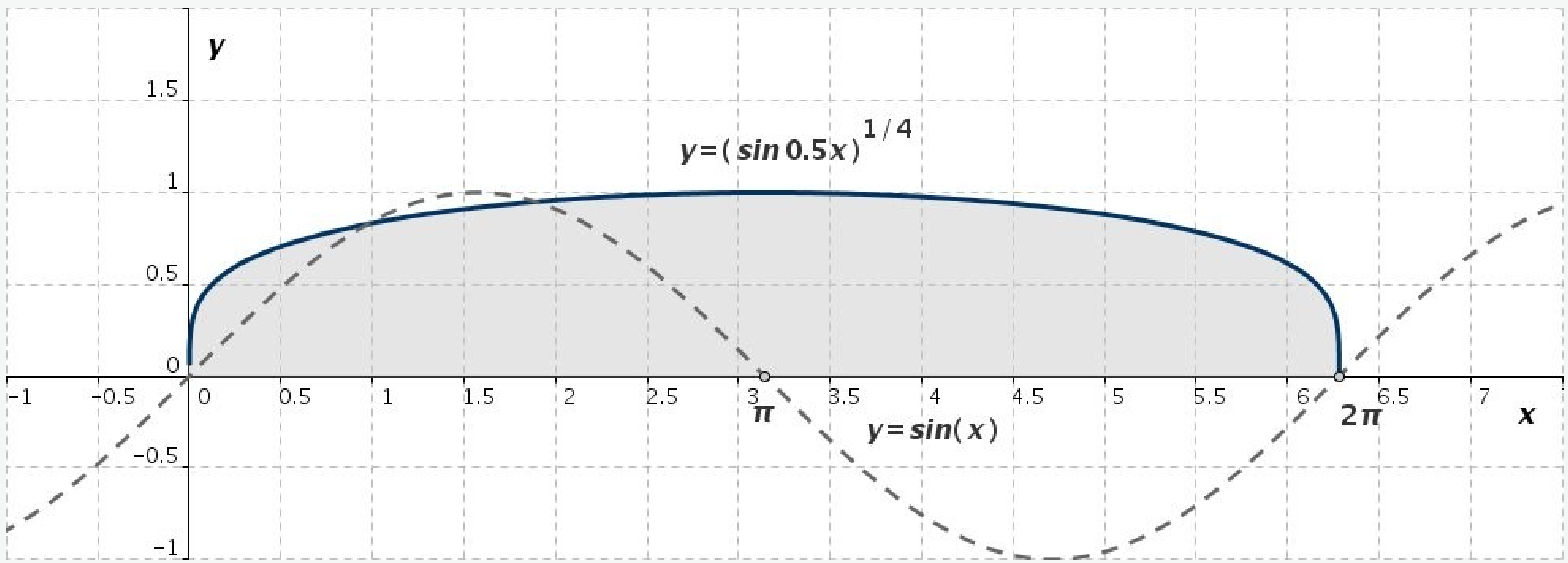


*Abb. 20-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = (\sin 0.5\,x)^{1/4}$ und der x-Achse im Intervall* $[0,\ 2\pi]$

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\cdot\int_0^{2\pi} y^4\,dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\cdot\int_0^{2\pi}\left(\sqrt[4]{\sin(0.5\,x)}\right)^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\cdot\int_0^{2\pi}\sin(0.5\,x)\,dx = 2\,\pi\,\rho$$

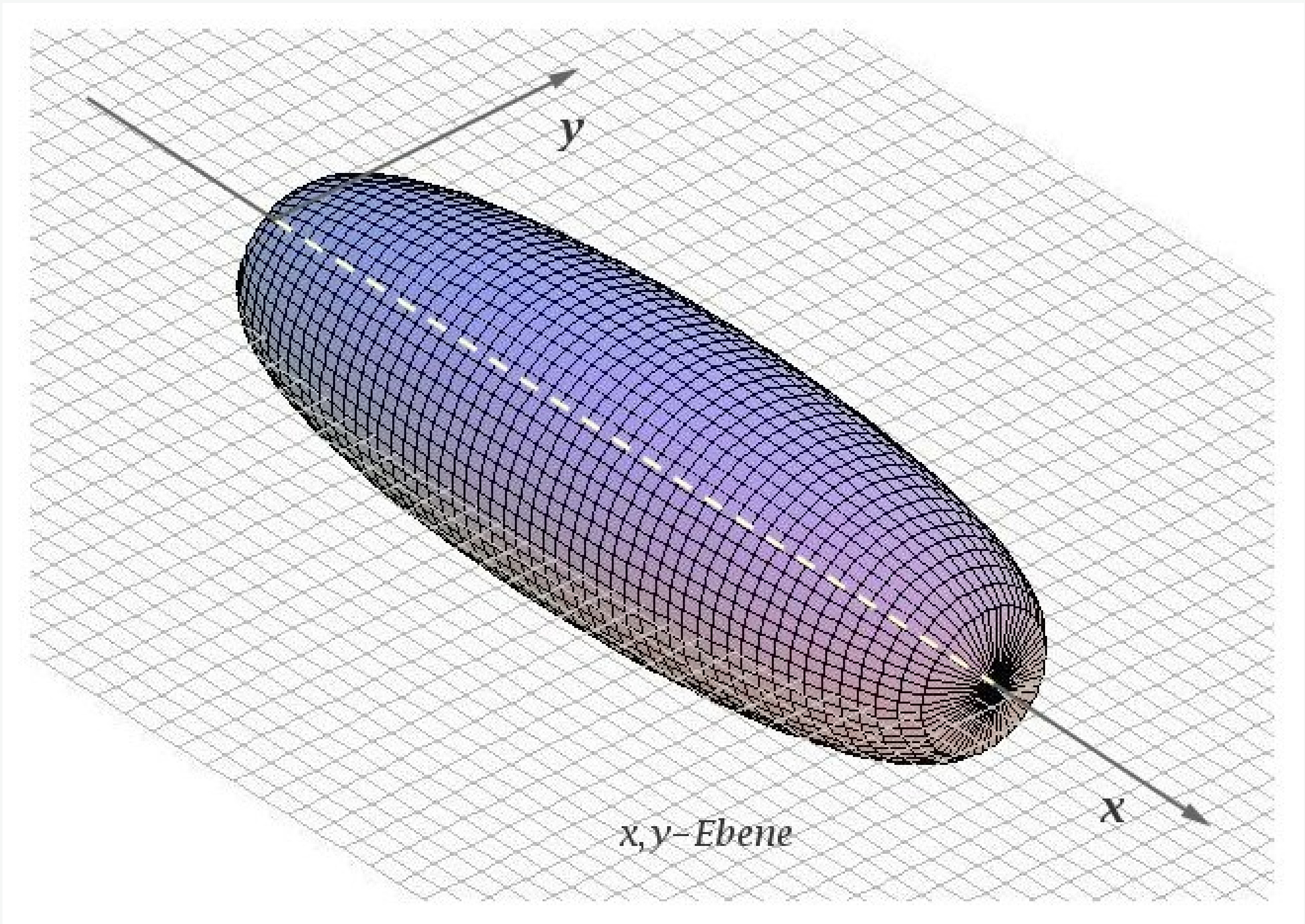


*Abb. 20-2: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = (\sin x)^{1/4}$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper*

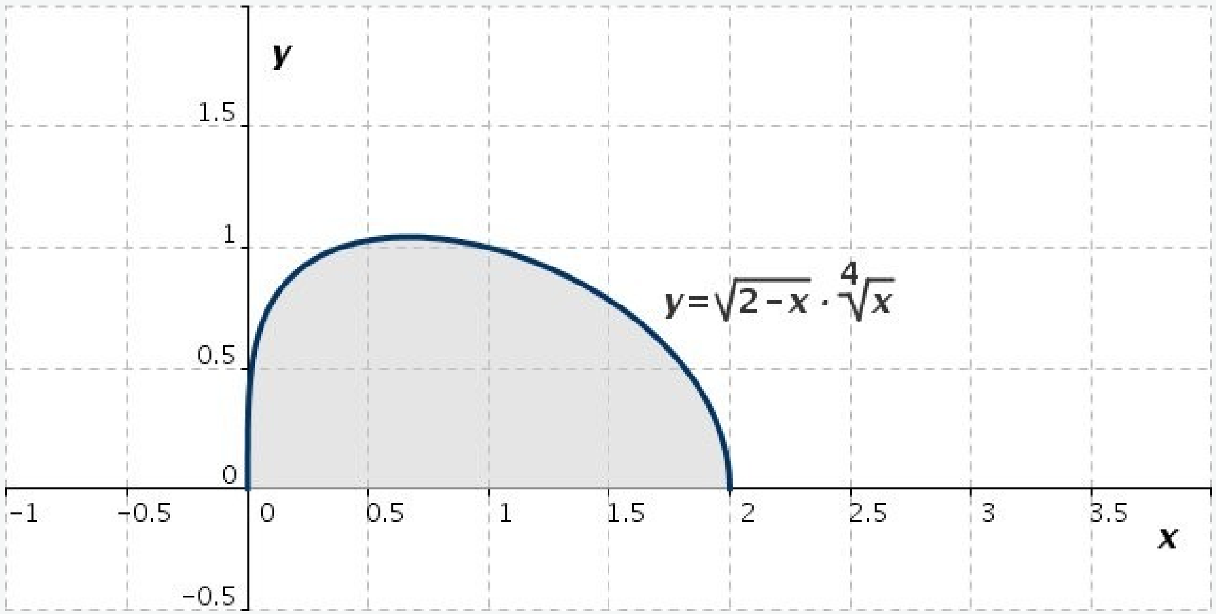


*Abb. 21: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung y = (2 - x)½ (x)¼ und der x-Achse im Intervall* [0, 2]

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^2 y^4\,dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^2 \left(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{2-x}\right)^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4\,x^3}{3} + 2\,x^2\right]_0^2 = \frac{2\,\pi\,\rho}{3}$$

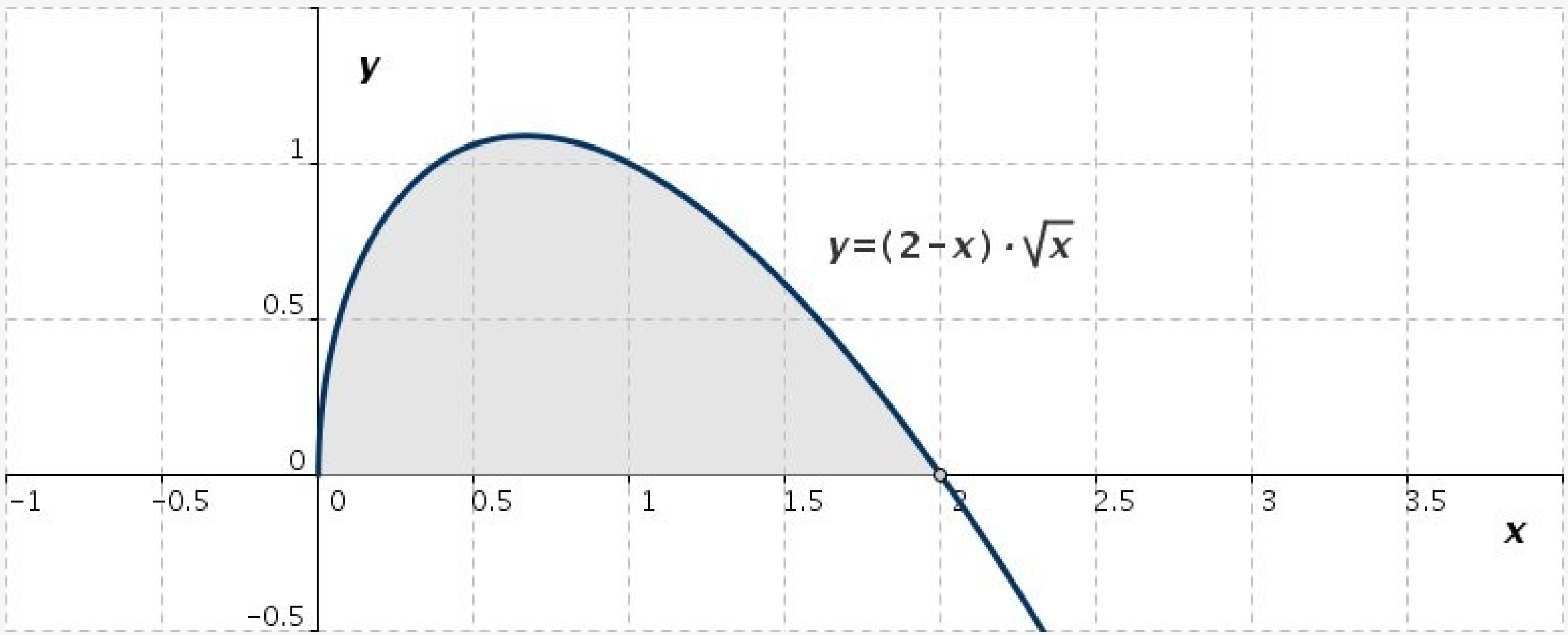


*Abb. 22-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = (2-x)\sqrt{x}$ und der x-Achse im Intervall [0, 2]*

$$J_x = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^2 y^4 \, dx = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^2 \left[ \sqrt{x} \cdot (2-x) \right]^4 dx =$$

$$= \frac{\pi\rho}{2} \left[ \frac{x^7}{7} - \frac{4}{3} x^6 + \frac{24}{5} x^5 - 8x^4 + \frac{16}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{64}{105} \pi\rho \simeq 1.92$$

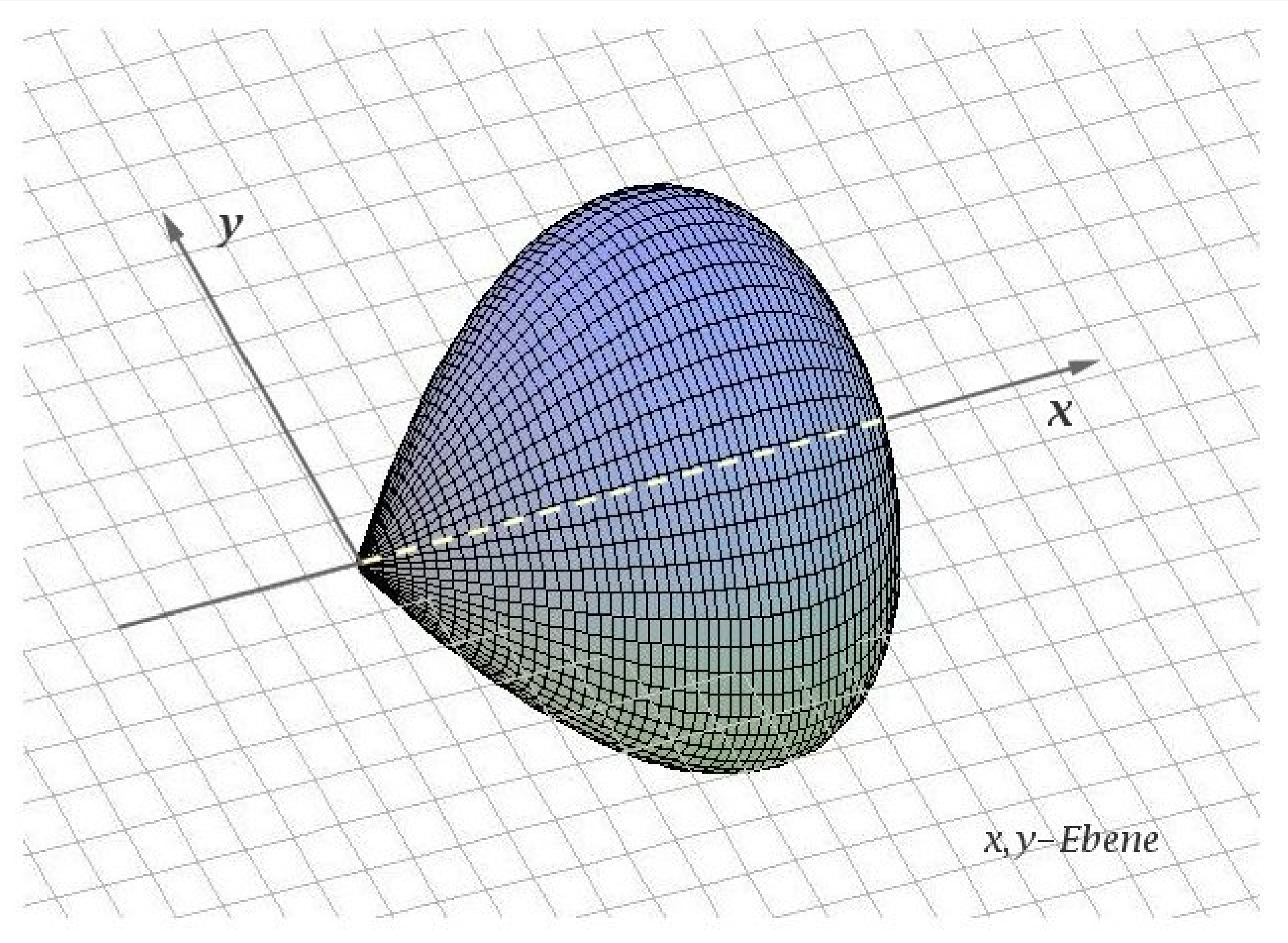


*Abb. 22-2: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = (2 - x)\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 2)$ um die x-Achse erzeugter Körper*

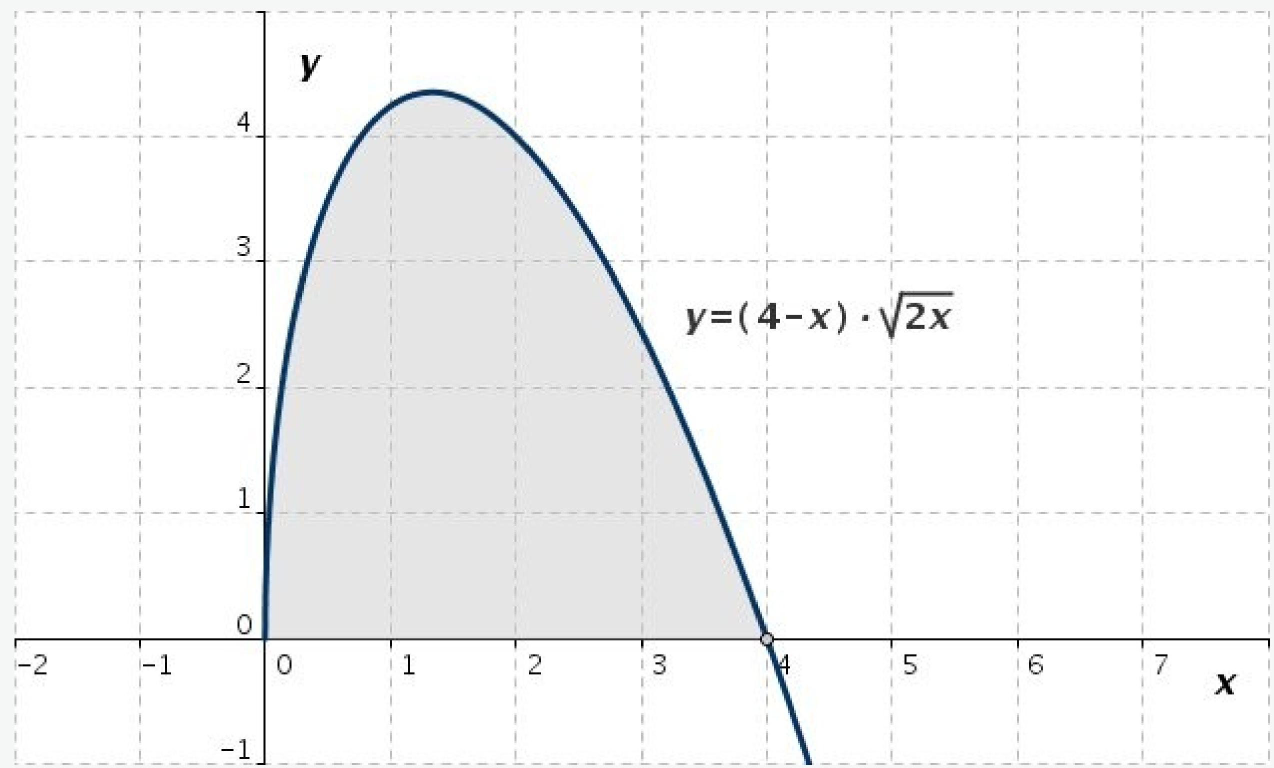


*Abb. 23-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = (4 - x)\sqrt{2x}$ und der x-Achse im Intervall [0, 4]*

$$J_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^4 y^4\,dx = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^4 \left[\sqrt{2x}\cdot(4-x)\right]^4 dx = \frac{32768}{105}\,\pi\rho \simeq 980.42\,\rho$$

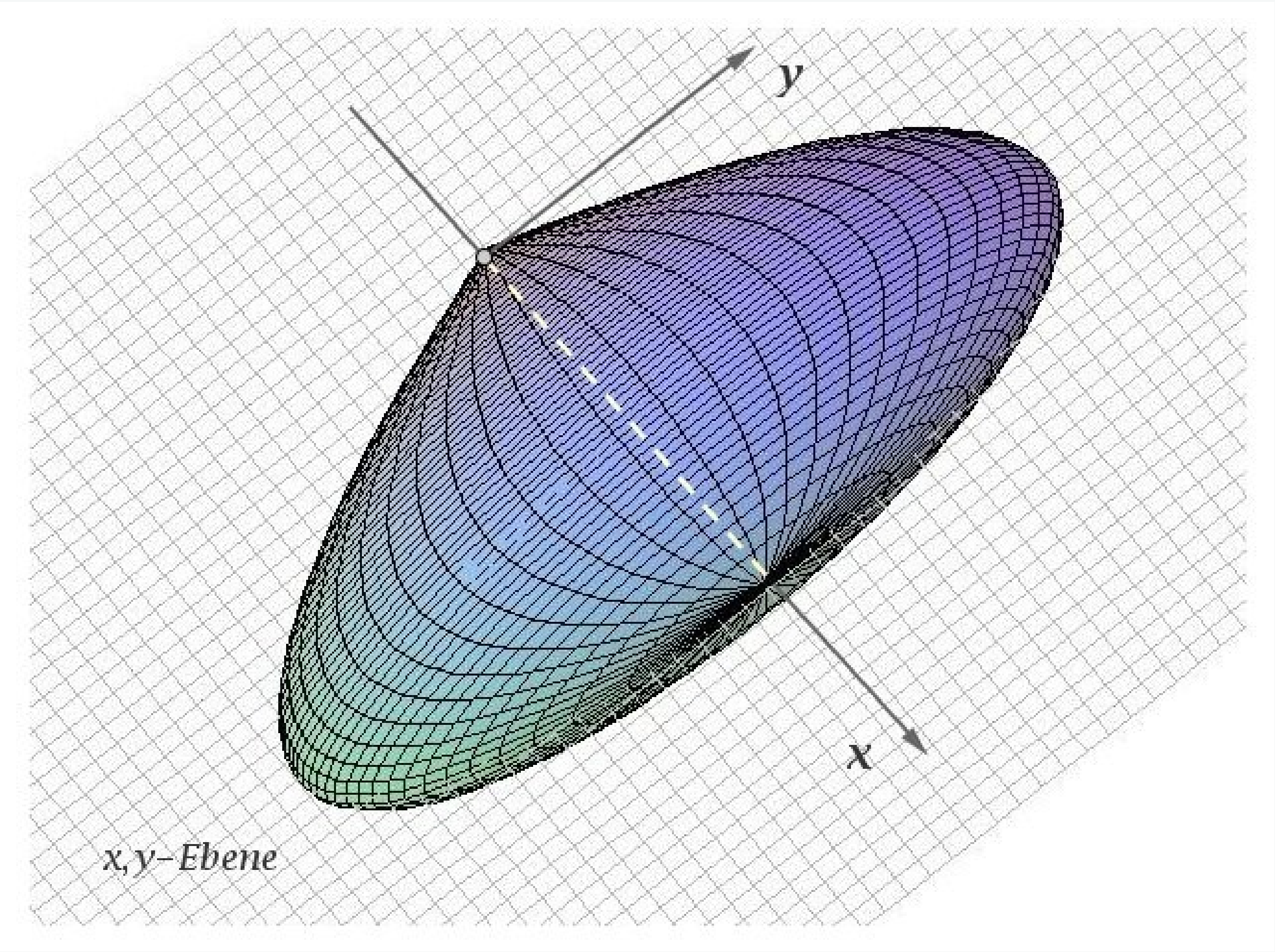


*Abb. 23-2a: Durch Rotation des Kurvenstücks* $y = (4 - x)\sqrt{2x}$ $(0 \le x \le 4)$ *um die x-Achse erzeugter Körper*

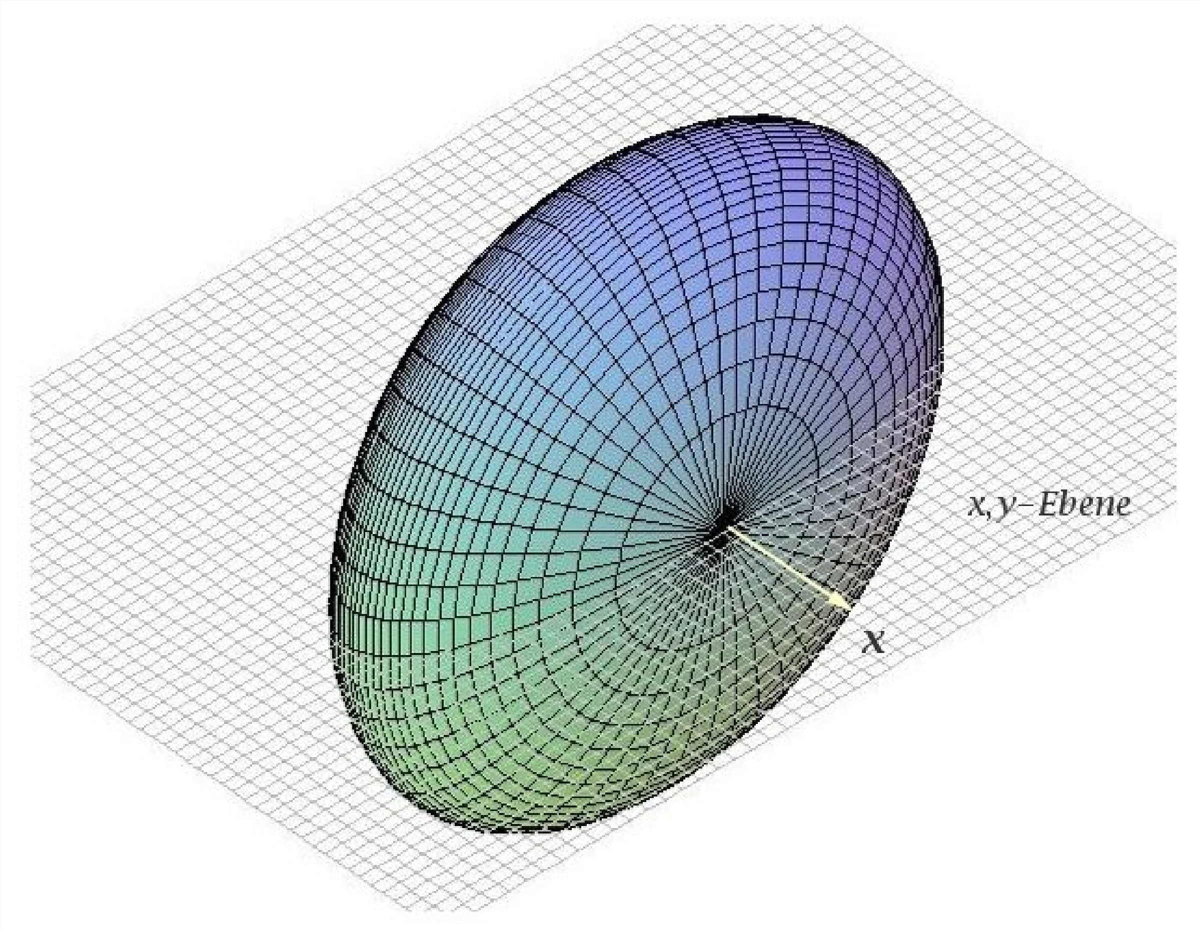


*Abb. 23-2b: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = (4 - x)\sqrt{2x}$ $(0 \le x \le 4)$ um die x-Achse erzeugter Körper*