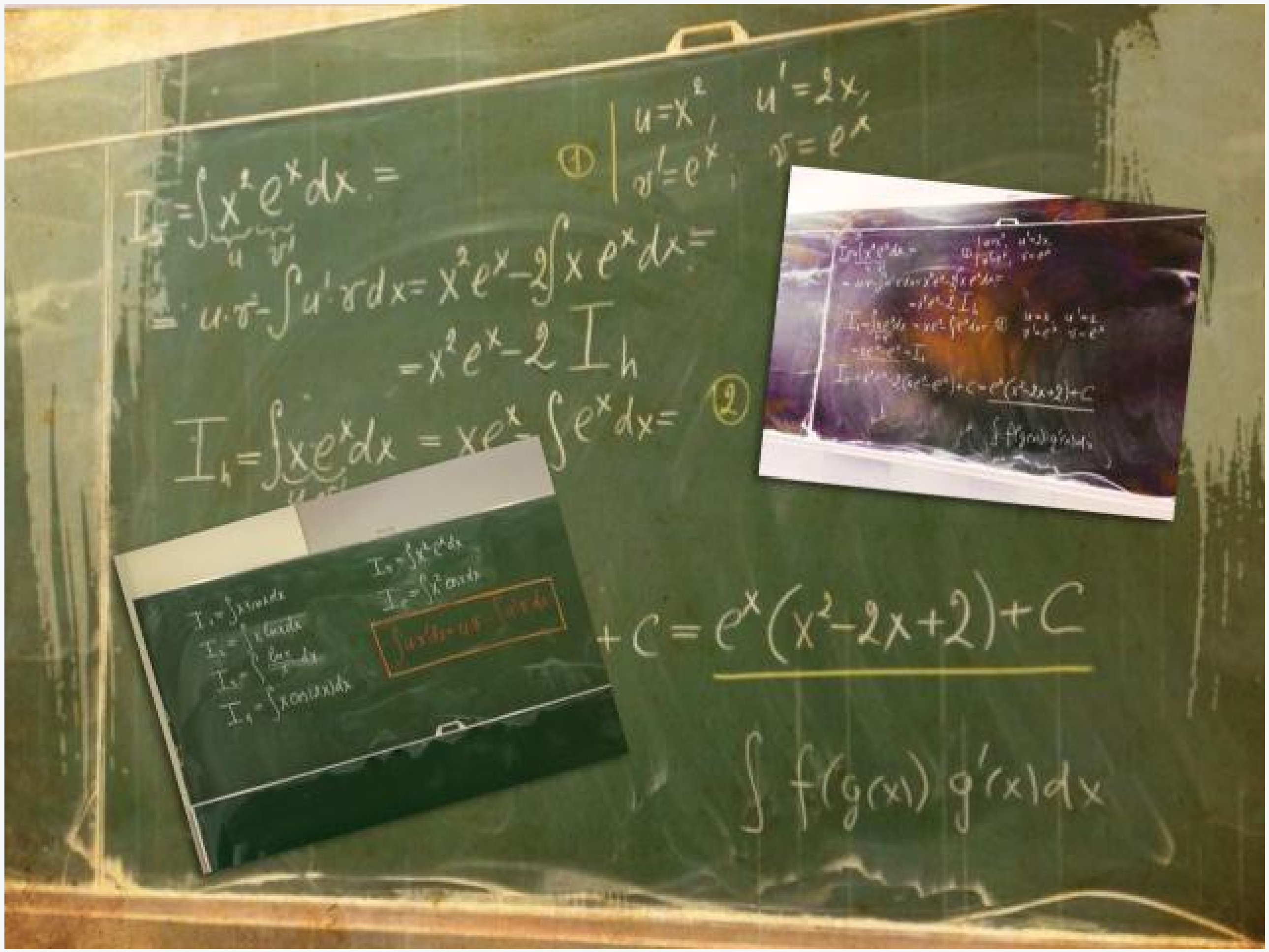


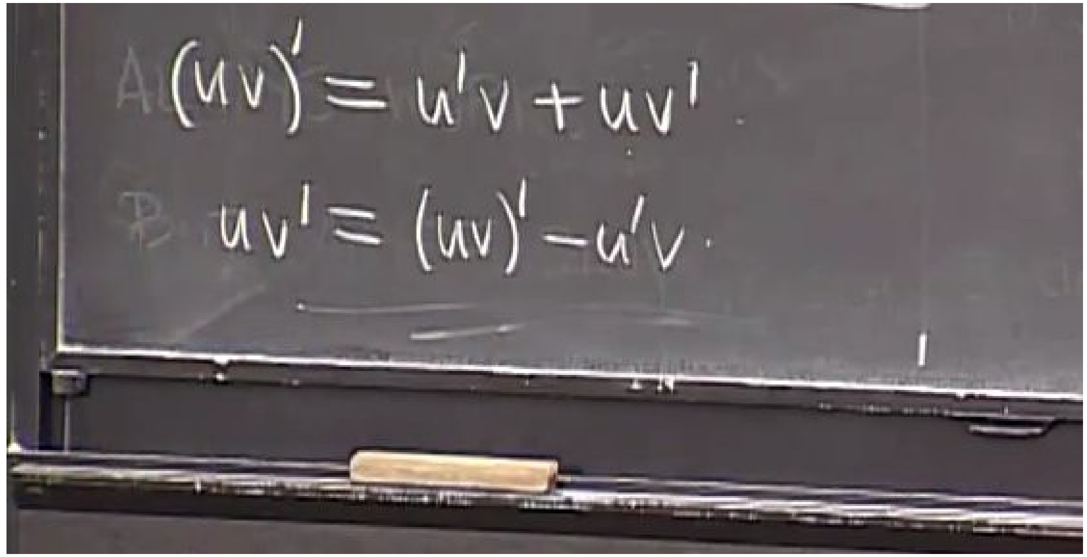
Partielle Integration

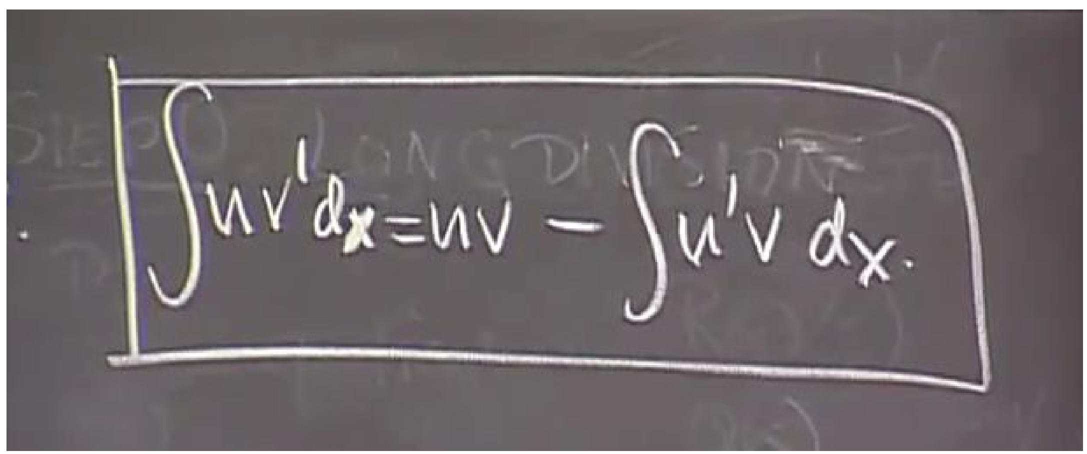
Produktintegration

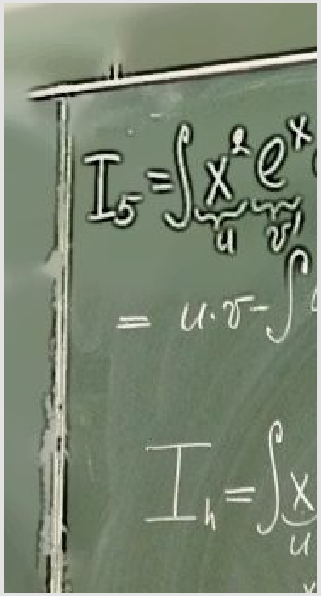
$$\int x \cdot \cos x \, d\, x$$

Wie kann man ein solches Integral bestimmen?

Während eine Summe integrierbarer Funktionen leicht zu integrieren ist (Summenregel), gibt es keine einfache Regel für die Integration von Produkten von Funktionen. Nur in speziellen Fällen gelingt die Integration durch eine geeignete Substitution. Wir haben zwar eine Regel für die Differentiation von Produkten, aber daraus folgt keine Regel für die Integration beliebiger Produkte. Und dennoch ergibt sich aus der Produktregel der Differentiation ein sehr nützliches Integrationsverfahren.


(uv)' = u'v + uv'
uv' = (uv)' − u'v


∫uv' dx = uv − ∫u'v dx



$$\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx$$

Ausgangsintegral *Hilfsintegral*

Unter welchen Voraussetzungen verwendet man diese Formel?

Für eine geeignete, richtige Zerlegung des Integranden in zwei Faktorfunktionen ist Folgendes wichtig:

- die Stammfunktion $v(x)$ zur Faktorfunktion $v'(x)$ muss problemlos bestimmt werden können;
- das Hilfsintegral muss elementar lösbar sein.

Partielle Integration: Beispiel

$$\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx$$

$$\int x \cdot e^x\, dx \quad \Rightarrow \quad u\, v' = x \cdot e^x$$

Zerlegung 1: $u = x\,, \quad v' = e^x$

Zerlegung 2: $u = e^x\,, \quad v' = x$

Wir bestimmen das Integral für beide Zerlegungen.

$$\int x \cdot e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad u\,v' = x \cdot e^x$$

Zerlegung 1: $u = x, \quad v' = e^x$

$$u = x, \quad u' = 1$$

$$v' = e^x, \quad v = \int v' \, dx = \int e^x \, dx = e^x$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C = (x - 1) \cdot e^x + C$$

Zerlegung 2: $u = e^x, \quad v' = x$

$$u = e^x, \quad u' = e^x$$

$$v' = x, \quad v = \int v' \, dx = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int e^x \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^x \, dx$$

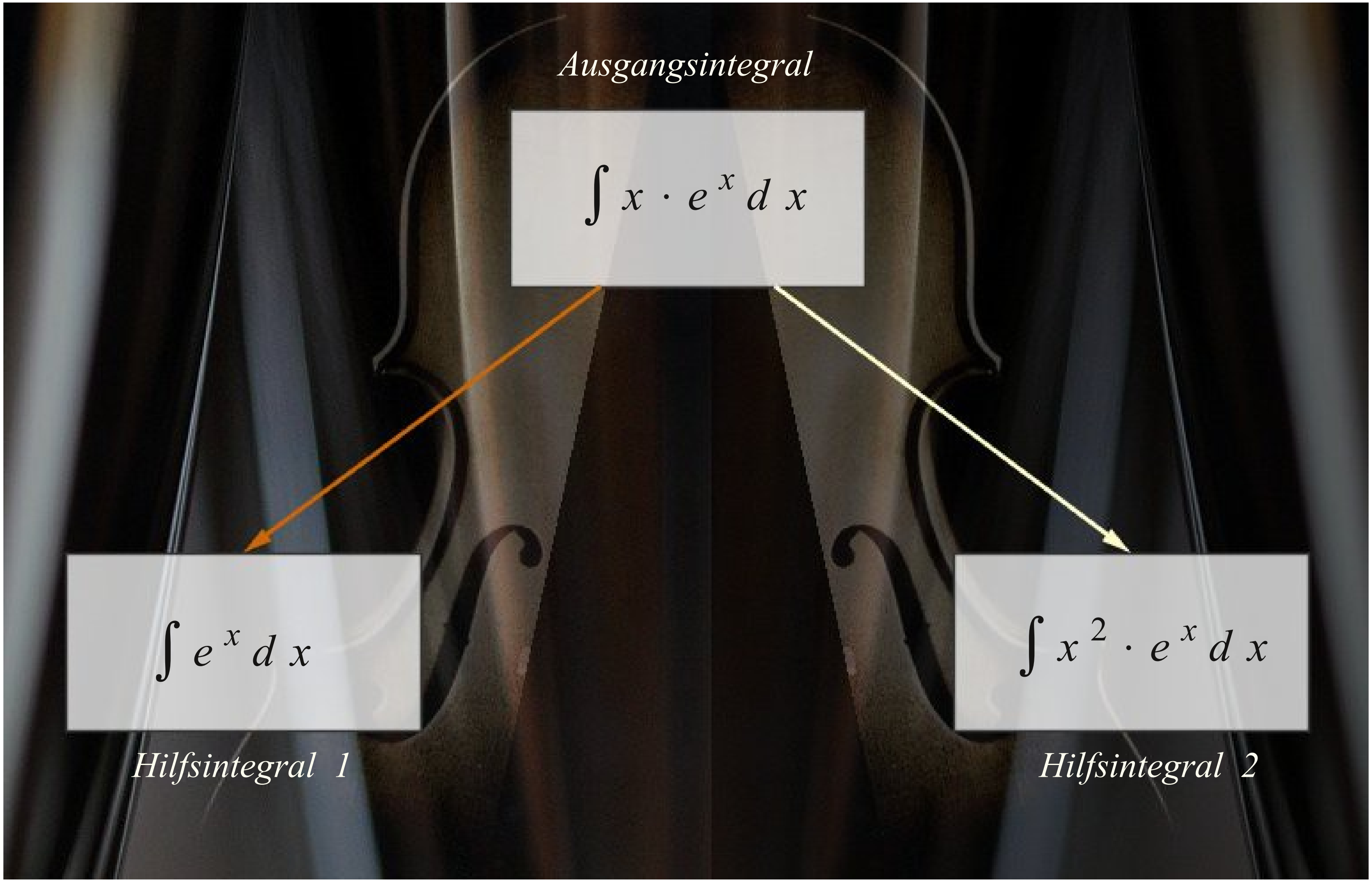
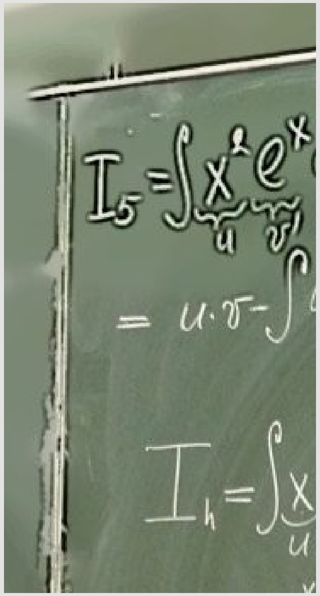


Abb. 1: Partielle Integration – Vergleich von zwei unterschiedlichen Zerlegungen

Nur die erste Zerlegung führt zu einer einfachen Lösung.



Berechnen Sie folgende Integrale:

Aufgabe 1: $I_1 = \int \ln x \; d\, x$

Aufgabe 2: $I_2 = \int (\ln x)^2 \; d\, x$

Aufgabe 3: $I_3 = \int e^x \sin x \; d\, x$

Lösung 1: $I_1 = \int \ln x \; d\,x$

$u \cdot v' = \ln x: \quad u = \ln x, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v' = 1, \quad v = \int 1 \; d\,x = x$

$$\int \ln x \; d\,x = \ln x \cdot x - \int dx = x\,(\ln x - 1) + C$$

Lösung 2: $I_2 = \int (\ln x)^2 \; d\,x$

$u \cdot v' = (\ln x)^2: \quad u = (\ln x)^2, \quad u' = \frac{2}{x} \cdot \ln x, \quad v' = 1, \quad v = x$

$$\int (\ln x)^2 \; d\,x = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2\, I_1 =$$

$$= x \cdot (\ln x)^2 - 2\,x\,(\ln x - 1) + C$$

$$I_3 = \int e^x \cdot \sin x \, d\,x$$

$$u = \sin x\,, \qquad v\,' = e^x$$

$$u\,' = \cos x\,, \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, d\,x = e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, d\,x + C$$

– War die partielle Integration sinnvoll?

– Ja, wenn man das entstehende Integral nochmals partiell integriert:

$$u = \cos x\,, \qquad v\,' = e^x$$

$$u\,' = -\sin x\,, \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, d\,x = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, d\,x\right) + C =$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, d\,x + C$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, d\,x = \frac{1}{2}\, e^x (\sin x - \cos x) + C$$

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$I_1 = \int x \cdot \sin x \, dx$$

$$I_2 = \int x \ln x \, dx$$

$$I_3 = \int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$I_4 = \int x \cdot \cos(2x) \, dx$$

$$I_5 = \int x^2 \cdot e^x \, dx$$

$$I_6 = \int x^2 \cdot \cos x \, dx$$

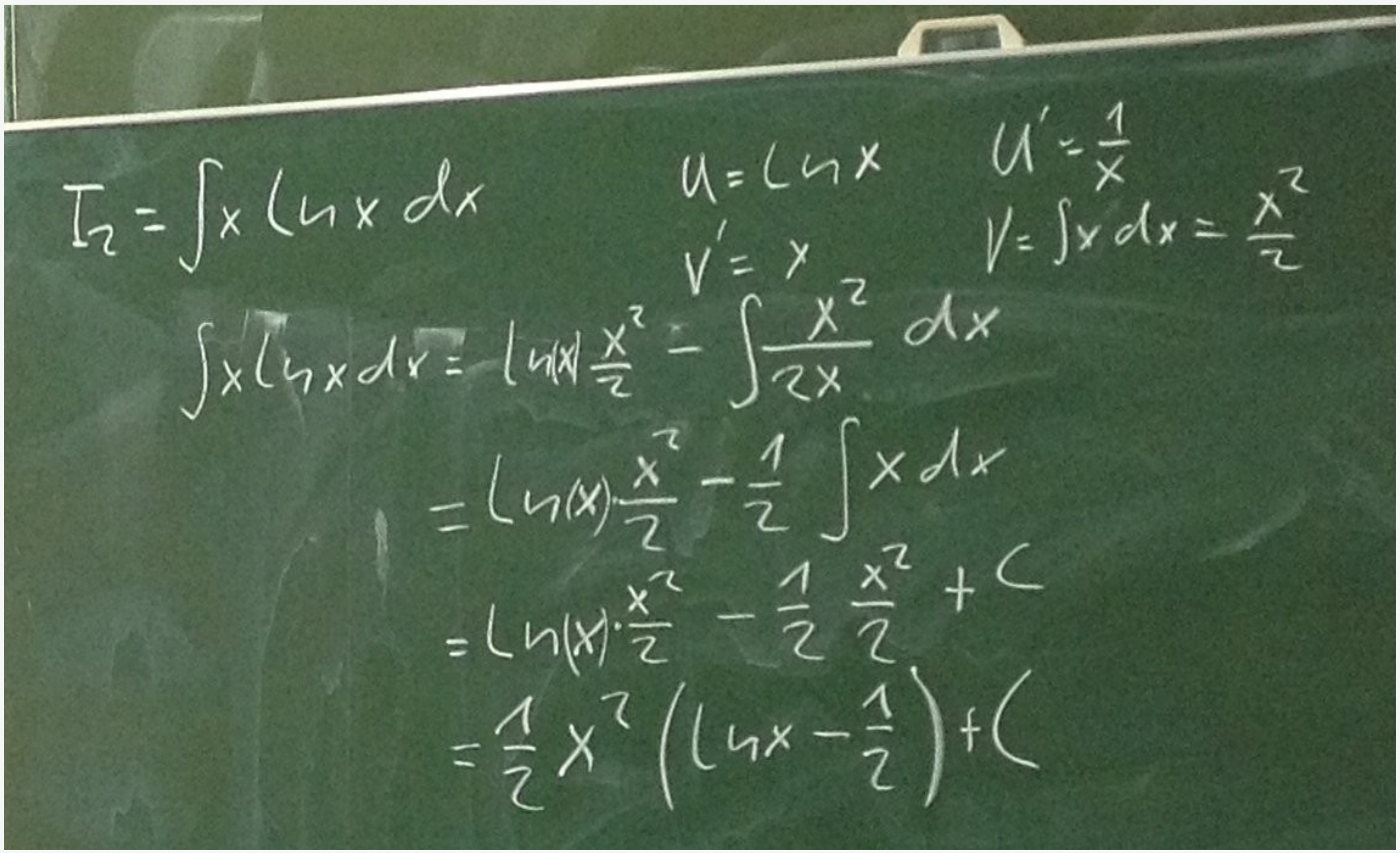
$I_1 = \int x \cdot \sin x \, dx$

Zerlegung: $u = x, \quad v' = \sin x$

Resultat: $I_1 = -x \cos x + \sin x + C$

Partielle Integration: Lösung 4-2

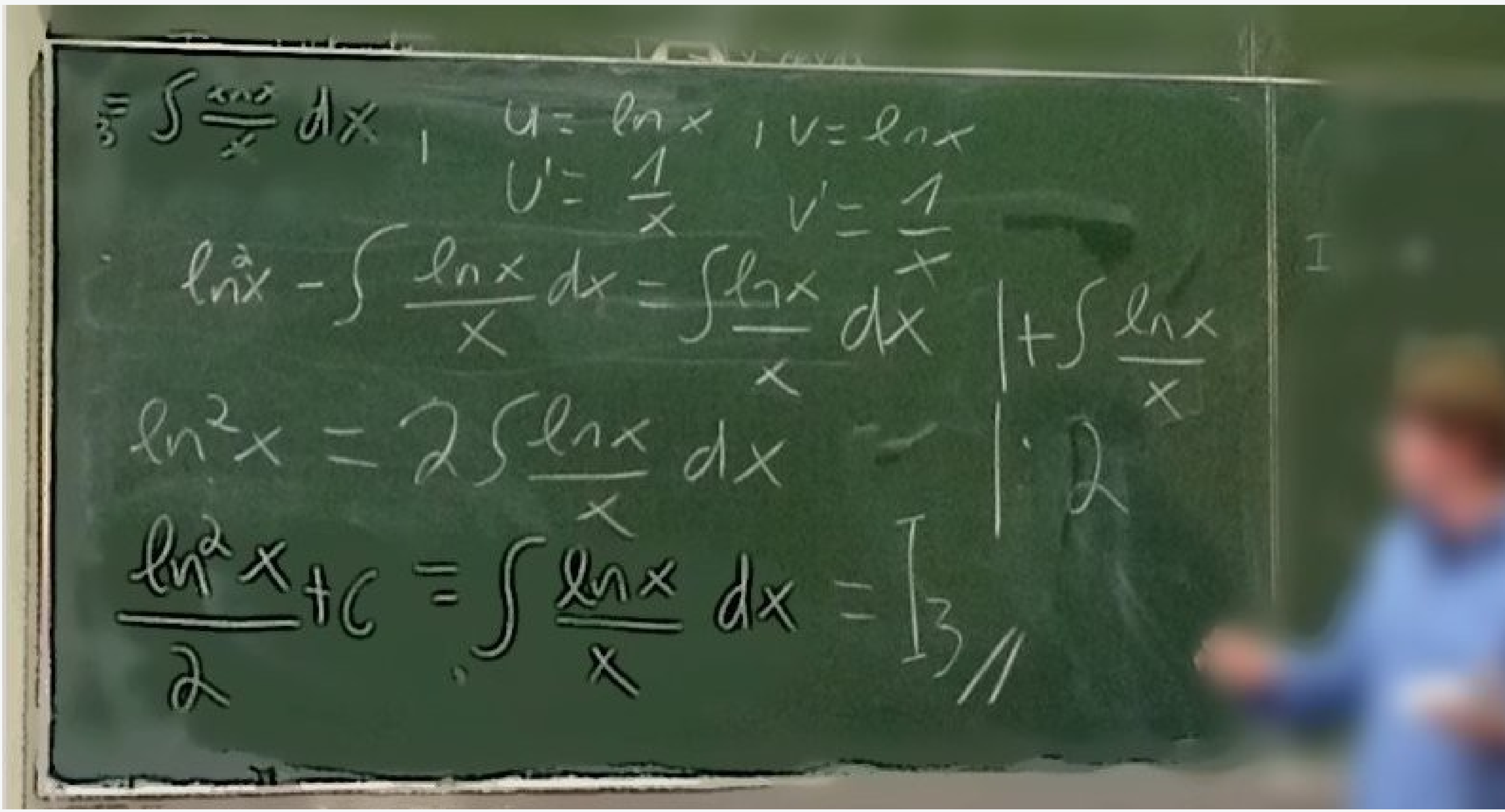
$I_2 = \int x \ln x \, dx$ **Zerlegung:** $u = \ln x, \quad v' = x$



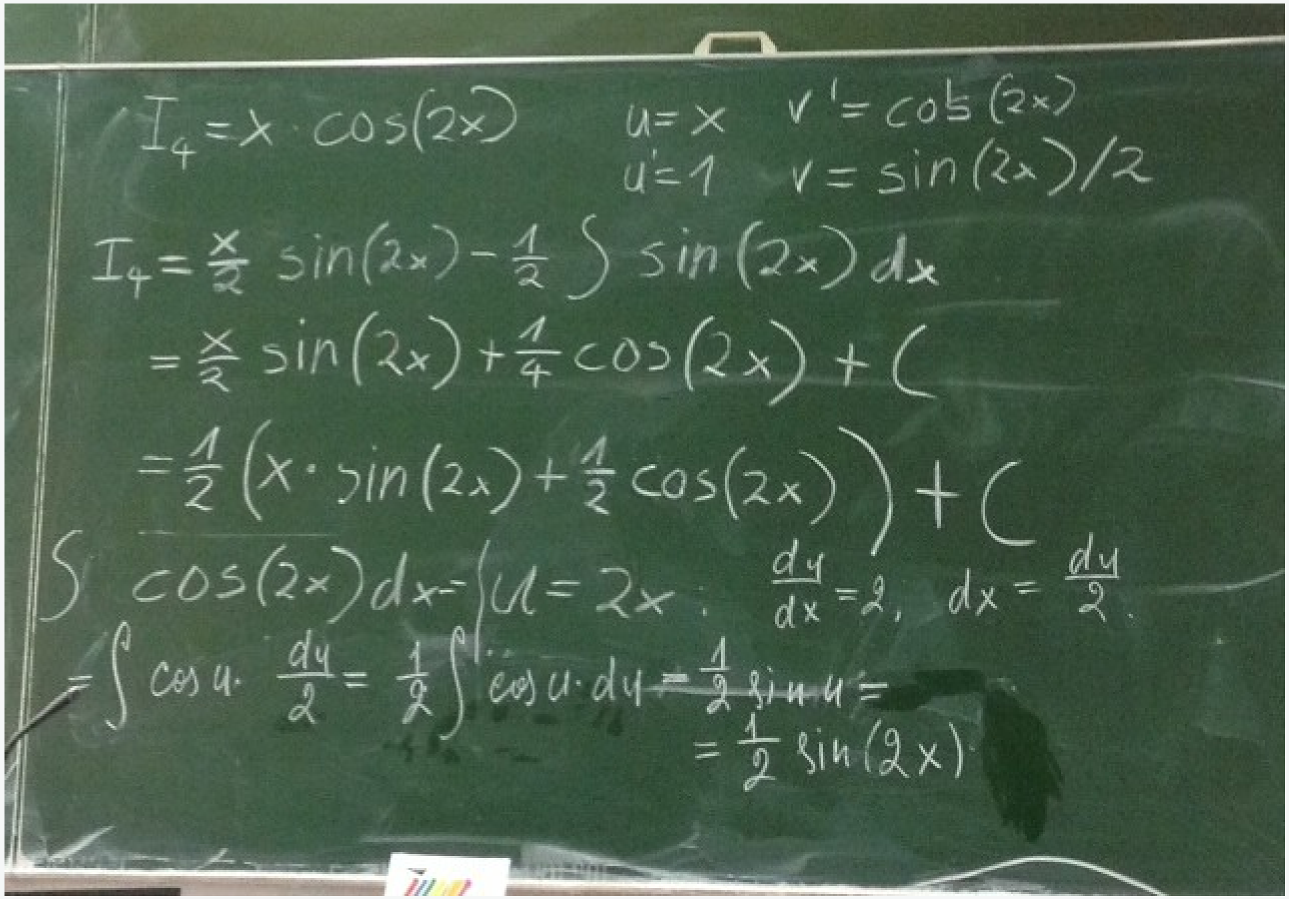
$$I_2 = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$$

$$I_3 = \int \frac{\ln x}{x}\, d\, x$$

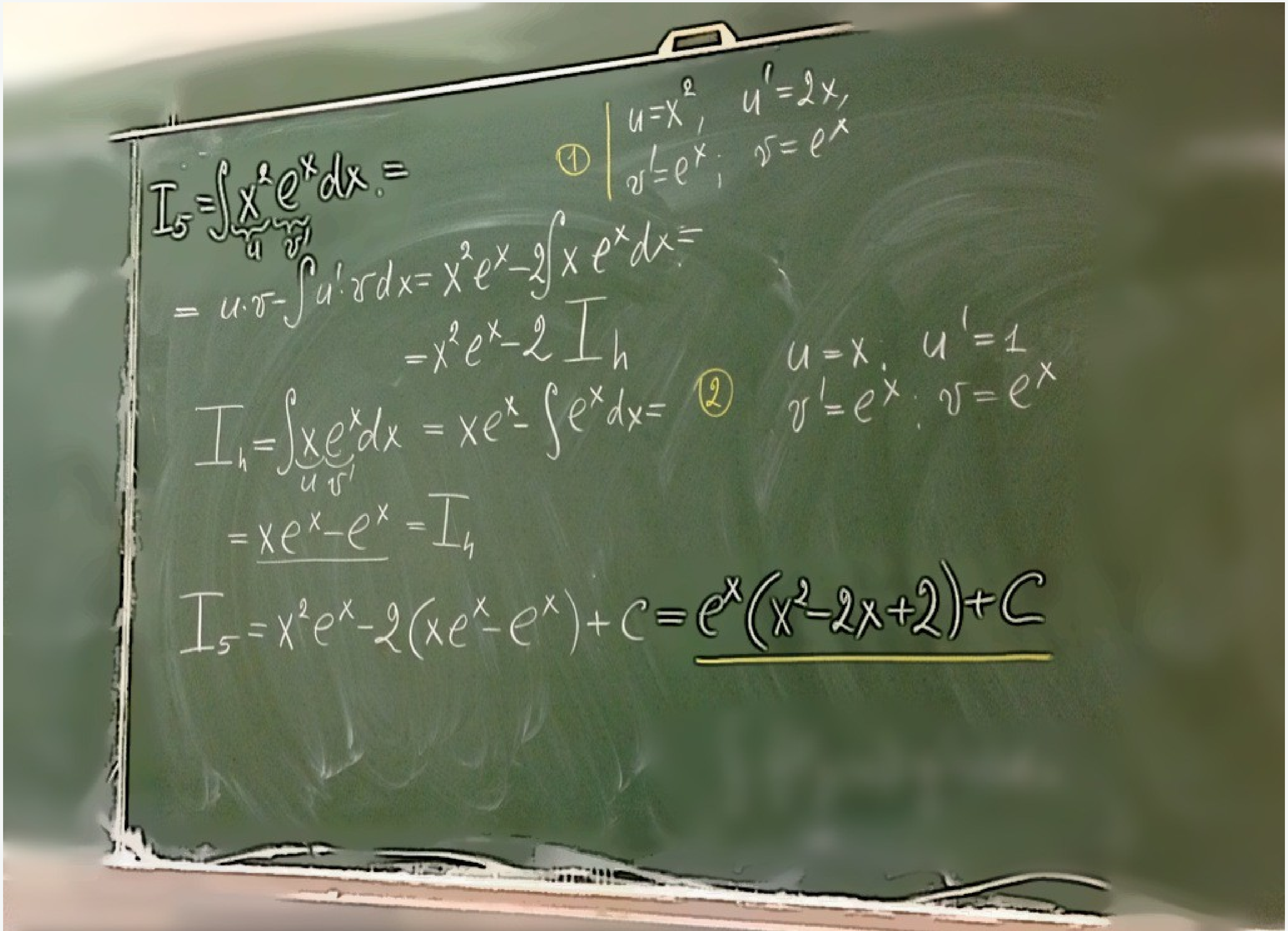
Zerlegung: $u = \ln x\,, \quad v\,' = \dfrac{1}{x}$



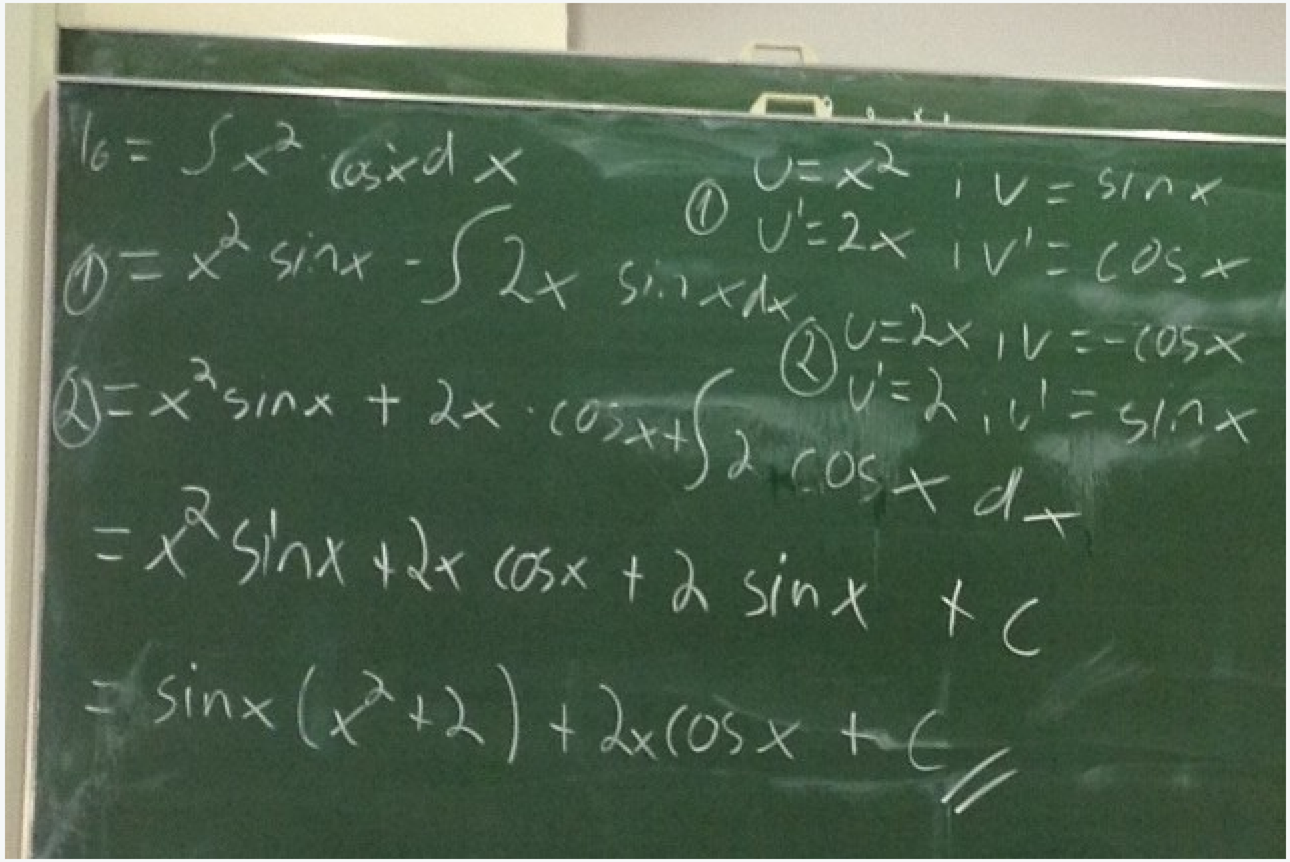
$$I_3 = \frac{1}{2}\,(\ln x)^2 + C$$



$$I_4 = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C$$

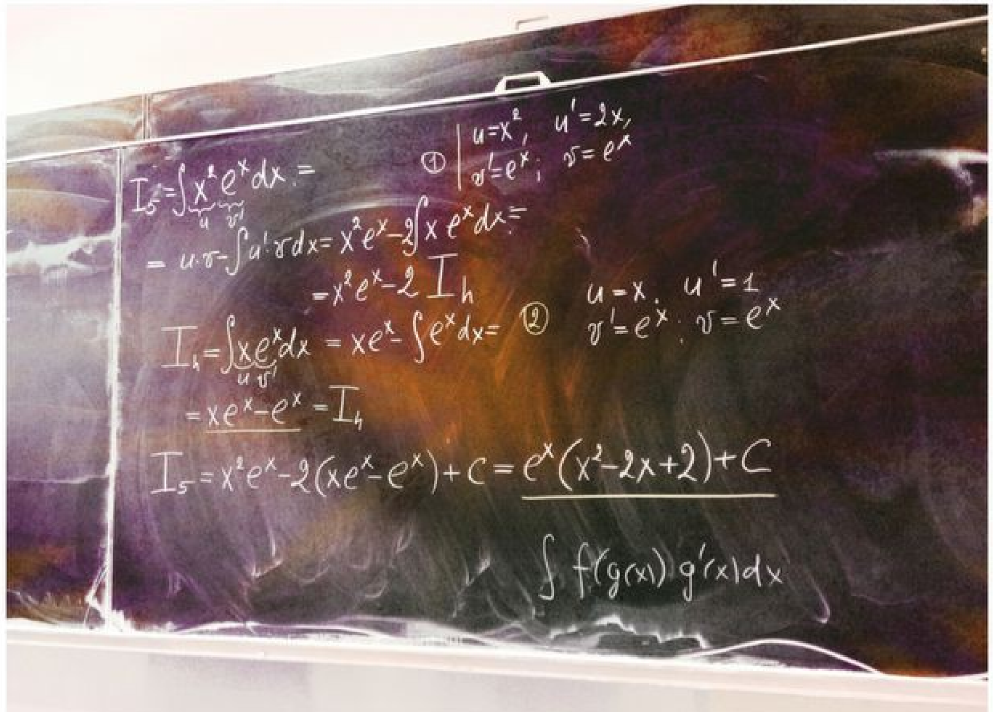


$$I_5 = \int x^2 \cdot e^x \, d\,x = e^x \left(x^2 - 2\,x + 2\right) + C$$



$$I_6 = \int x^2 \cdot \cos x \, d\,x = x^2 \sin x + 2\,x\,\cos x - 2\,\sin x + C$$

2012



January

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

February

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29			

March

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

April

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

May

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

June

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

July

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

August

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

September

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
2	3	4	5	6	7	1/8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

October

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

November

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

December

SU	MO	TU	WE	TH	FR	SA
2	3	4	5	6	7	1/8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					