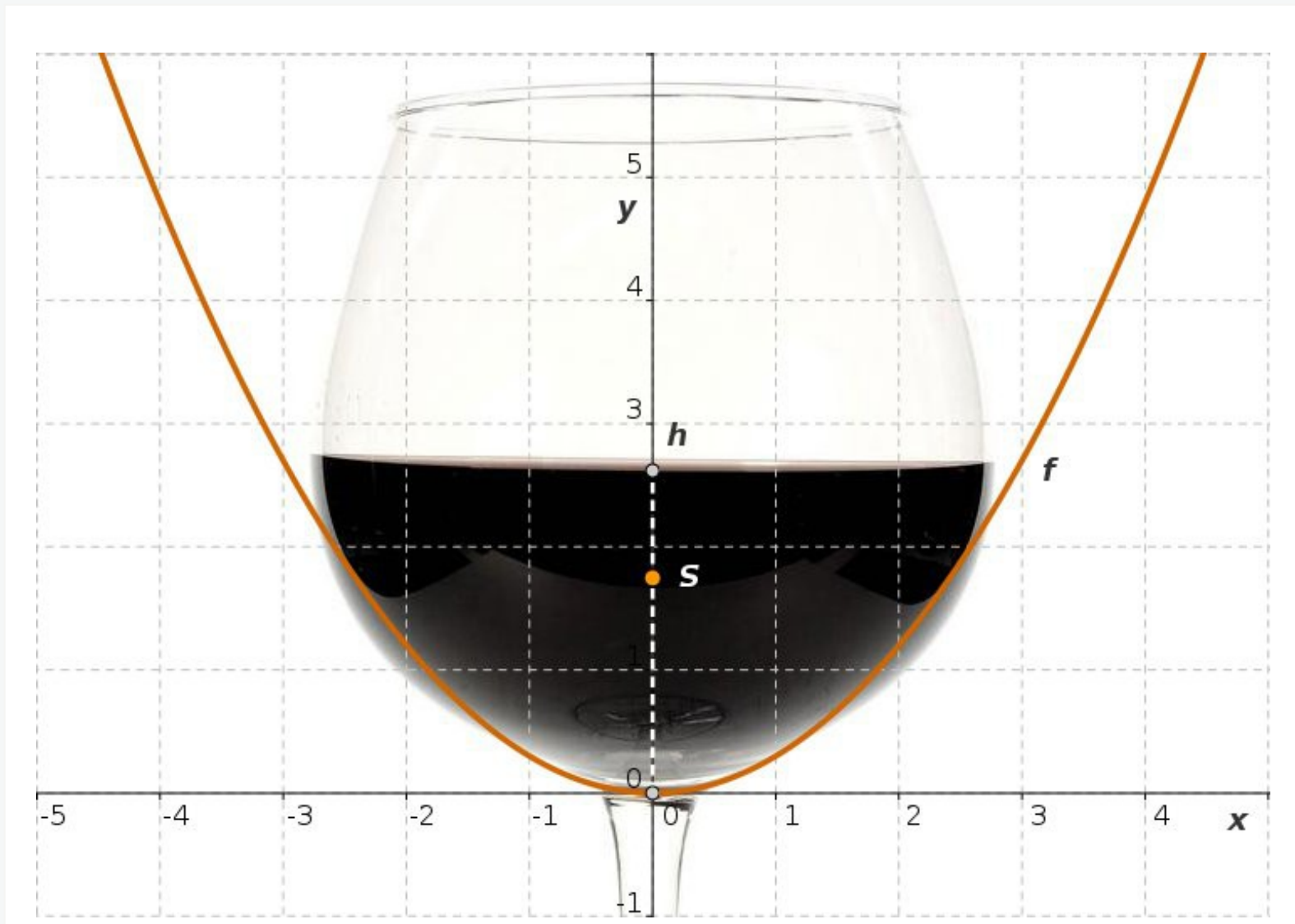




Schwerpunkt homogener Rotationskörper: Aufgaben 1-4



Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse und die y -Achse entsteht

Aufgabe 1: $f(x) = 0.2 x^2, \quad x \in [0, 5]$

Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse entsteht

Aufgabe 2: $f(x) = 0.2 x^2, \quad x \in [-3, 5]$

Aufgabe 3: $f(x) = 0.2 x^2, \quad x \in [-5, 5]$

Aufgabe 4: $f(x) = \alpha x^2, \quad \alpha > 0, \quad x \in [a, b]$

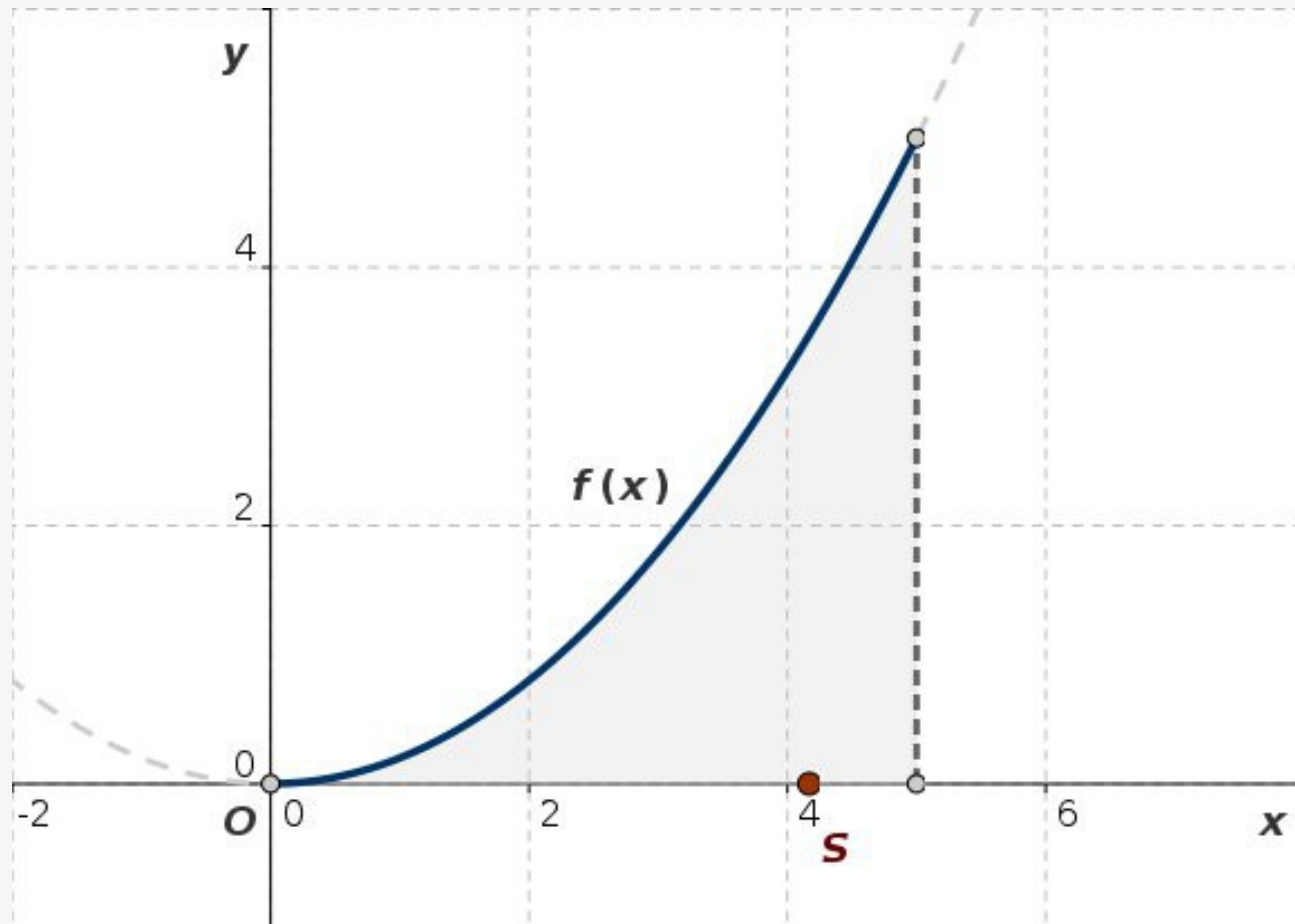


Abb. 1-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = 0.2 x^2$ und der x -Achse im Intervall $[0, 5]$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^5 y^2 dx = \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{x^2}{5} \right)^2 dx = \frac{\pi}{25} \cdot \int_0^5 x^4 dx = \frac{\pi}{5^2} \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^5 = 25 \pi \text{ VE}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^5 x y^2 dx = \frac{\pi}{V_x} \int_0^5 x \left(\frac{x^2}{5} \right)^2 dx = \frac{1}{5^4} \int_0^5 x^5 dx = \frac{25}{6} \simeq 4.17 \text{ (LE)}$$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 1a

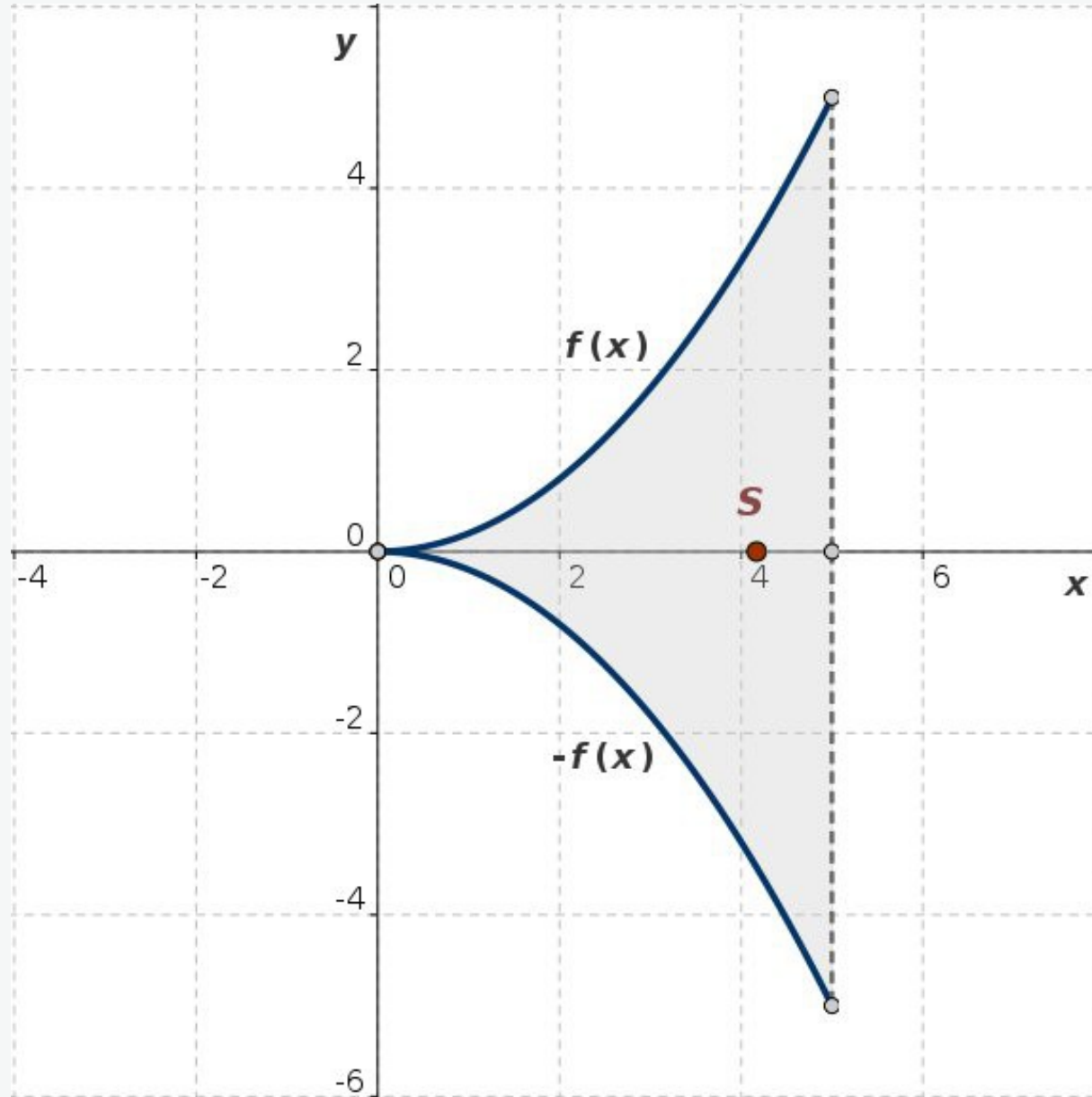


Abb. 1-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene, Schwerpunkt $S = (4.17, 0, 0)$

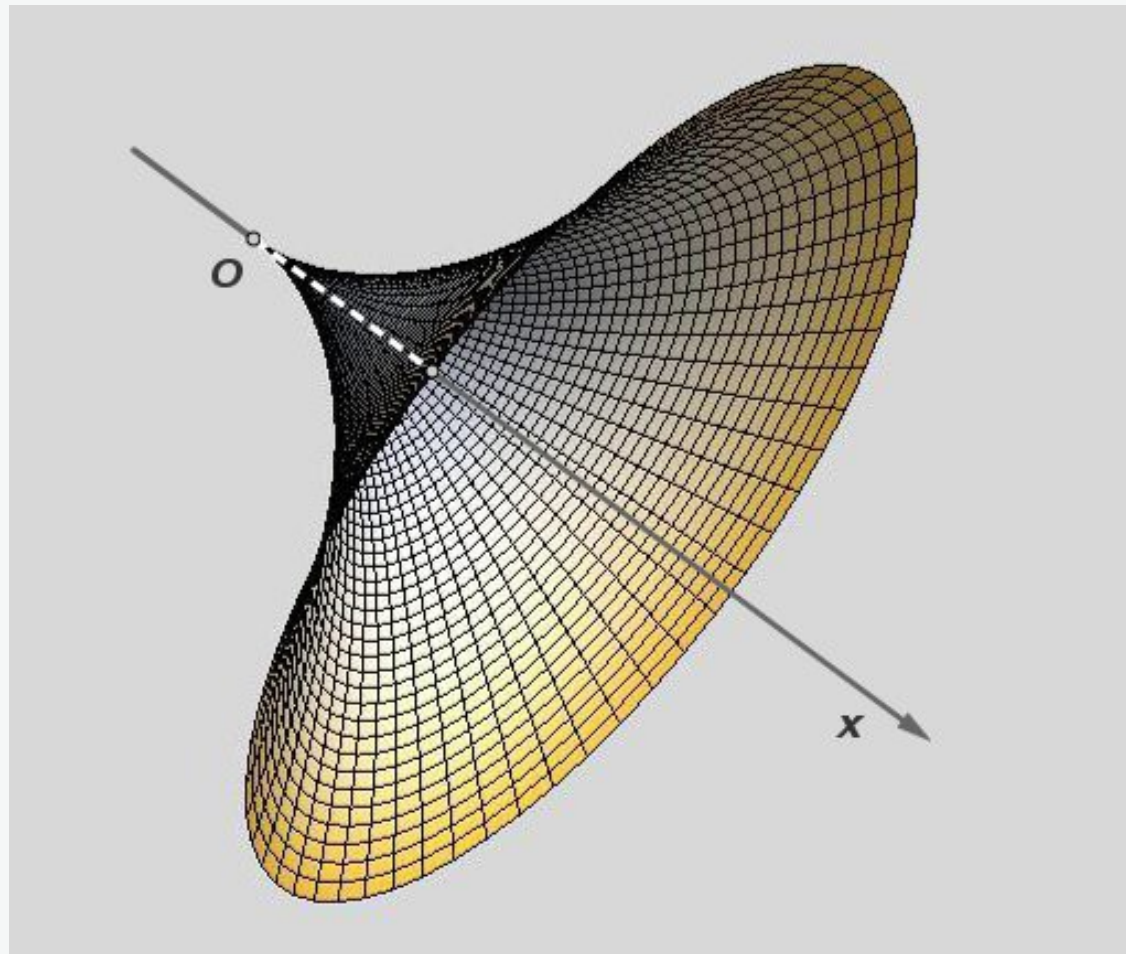


Abb. 1-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 0.2 x^2$ ($0 \leq x \leq 5$) um die x-Achse erzeugter Körper

$$\vec{r}_S = (4.17, 0, 0)$$

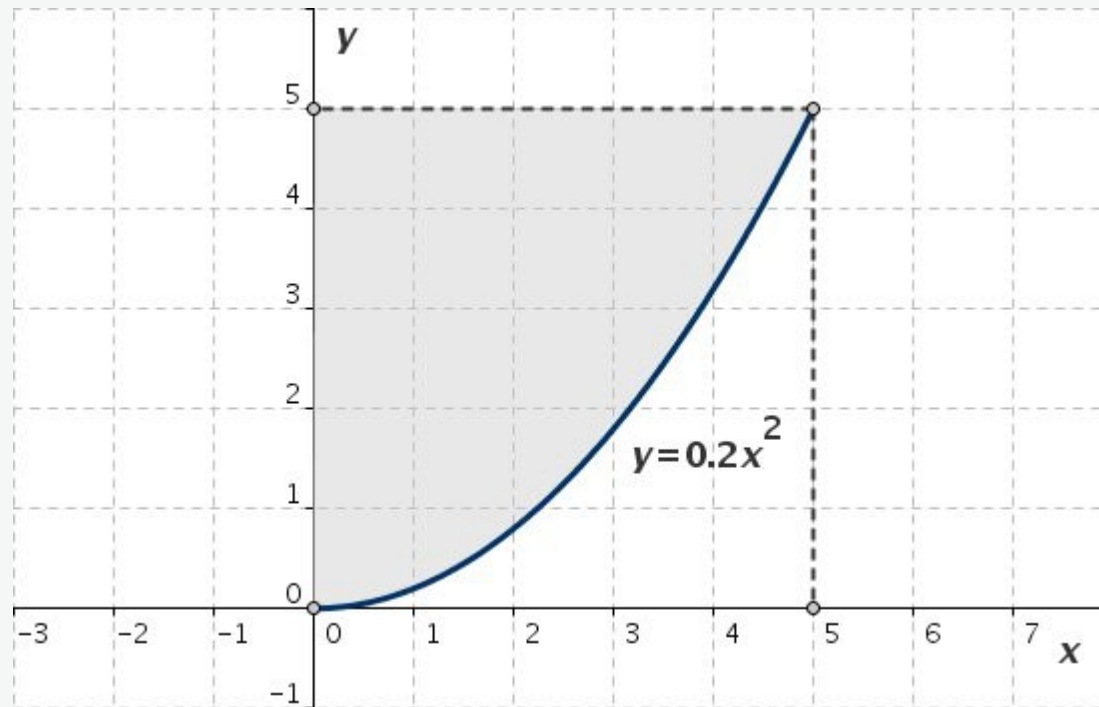


Abb. 1-3: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = 0.2 x^2$ und der y-Achse im Intervall $[0, 5]$

$$y(x) = 0.2 x^2, \quad x(y) = \sqrt{5 y} \quad (x, y \geq 0)$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^5 x^2 dy = \pi \int_0^5 (\sqrt{5 y})^2 dy = 5 \pi \int_0^5 y dy = \frac{5^3 \pi}{2} \text{ (VE)}$$

$$y_S = \frac{\pi}{V_y} \int_0^5 y x^2 dy = \frac{2}{5^2} \int_0^5 y^2 dy = \frac{10}{3} \text{ (LE)}, \quad \vec{r}_S \simeq (0, 3.33, 0)$$

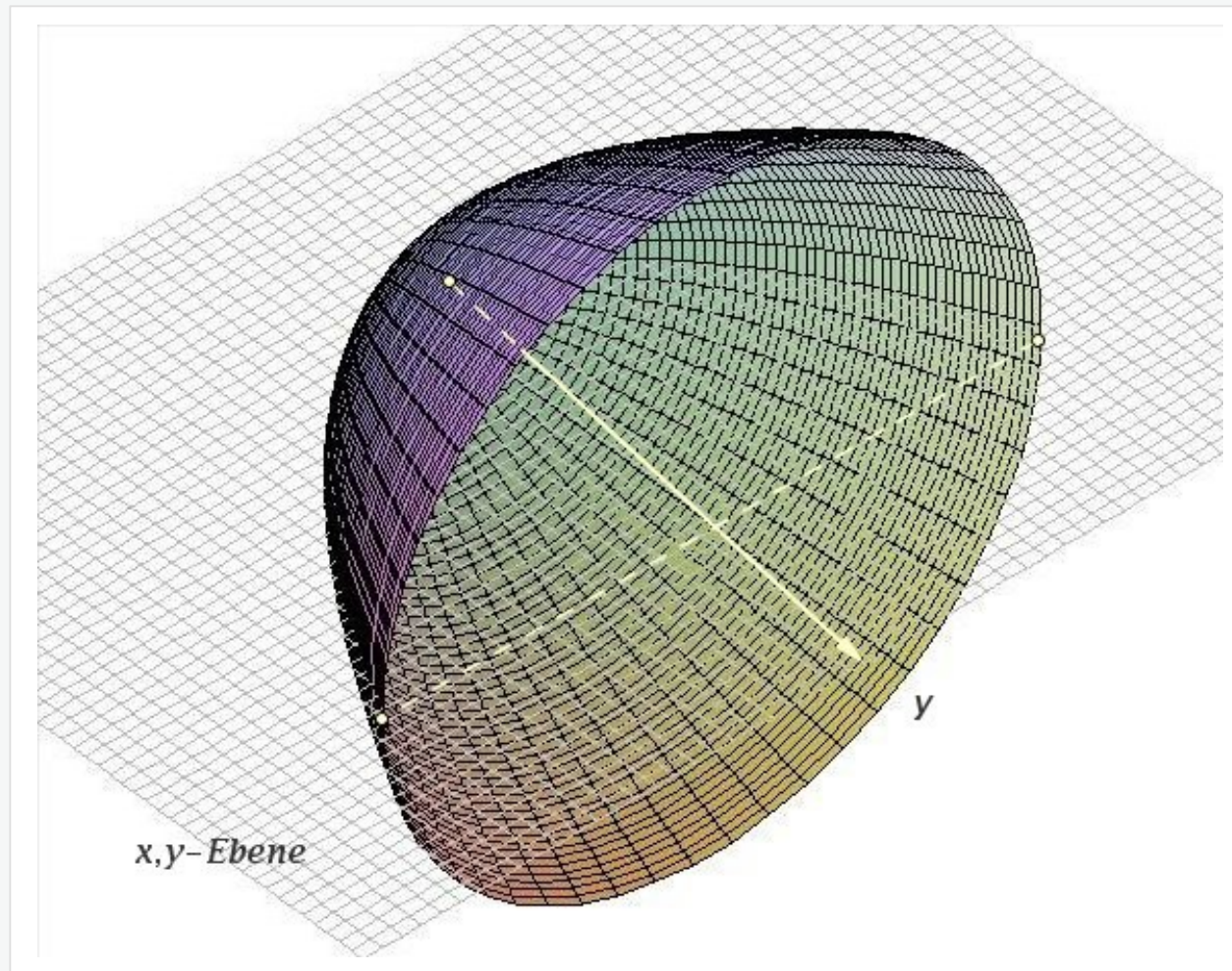


Abb. 1-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 0.2x^2$ ($0 \leq x \leq 5$) um die y-Achse erzeugter Körper

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 2

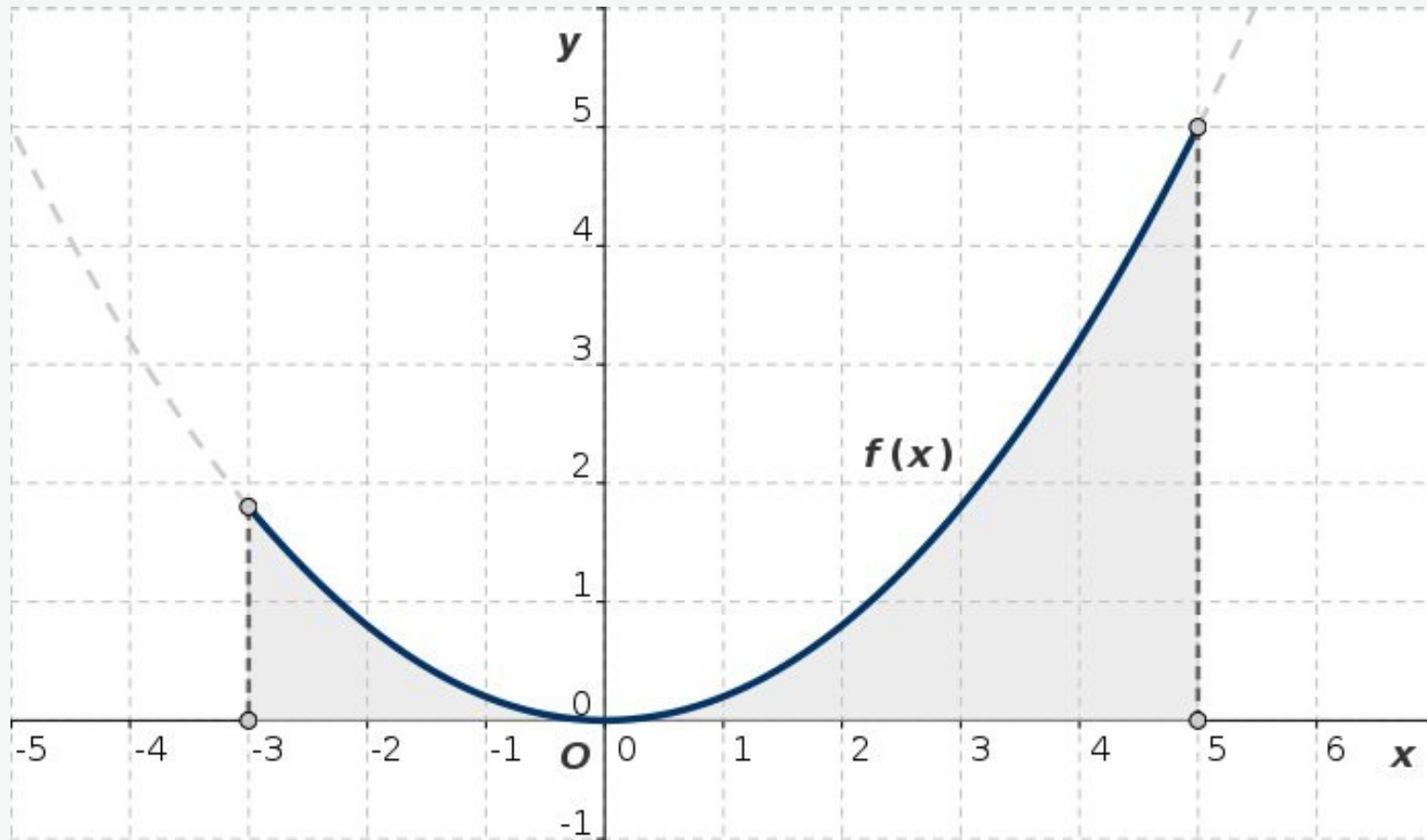


Abb. 2-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 0.2 x^2$ im Intervall $[-3, 5]$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-3}^5 y^2 dx = \frac{\pi}{5^2} \cdot \int_{-3}^5 x^4 dx = \frac{\pi}{5^2} \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-3}^5 = \frac{\pi}{5^3} (5^5 + 3^5) \text{ (VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_{-3}^5 x y^2 dx = \frac{5}{5^5 + 3^5} \int_{-3}^5 x^5 dx = \frac{5 (5^6 - 3^6)}{6 (5^5 + 3^5)} \simeq 3.69 \text{ (LE)}$$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 2

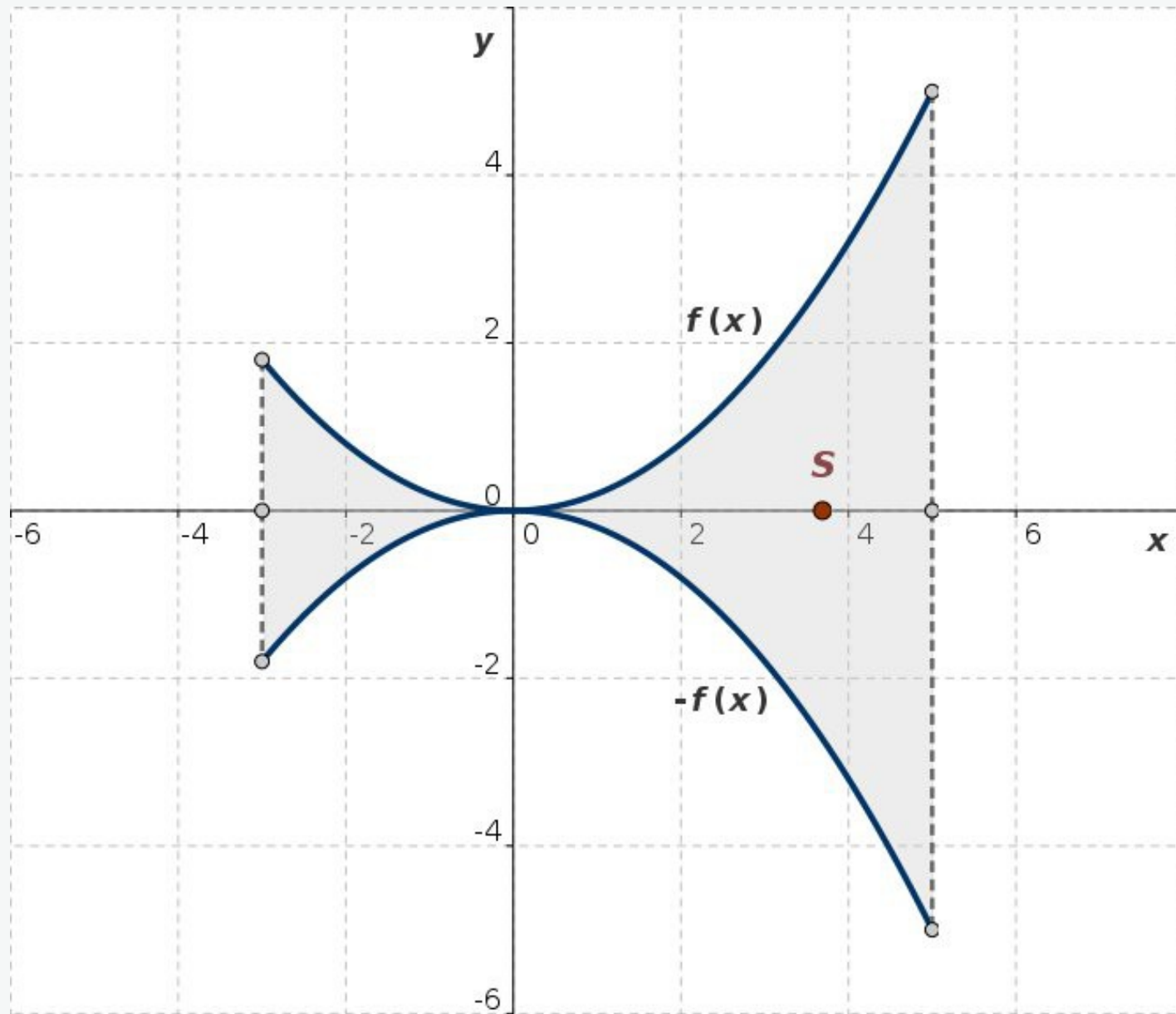


Abb. 2-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene, Schwerpunkt $S = (3.69, 0, 0)$

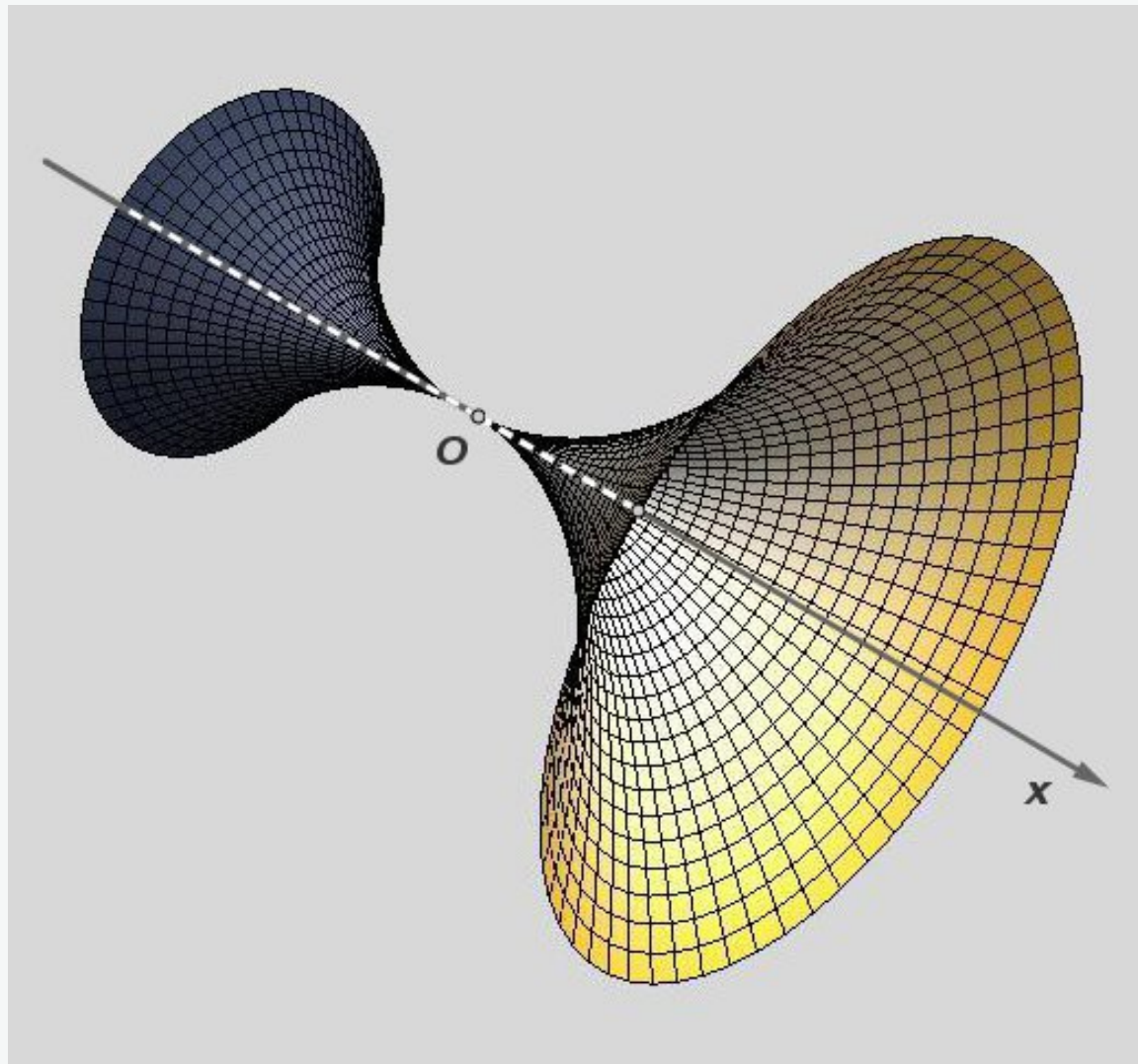


Abb. 2-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 0.2 x^2$ ($-3 \leq x \leq 5$) um die x -Achse erzeugter Körper

$$\vec{r}_S = (3.69, 0, 0)$$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 3

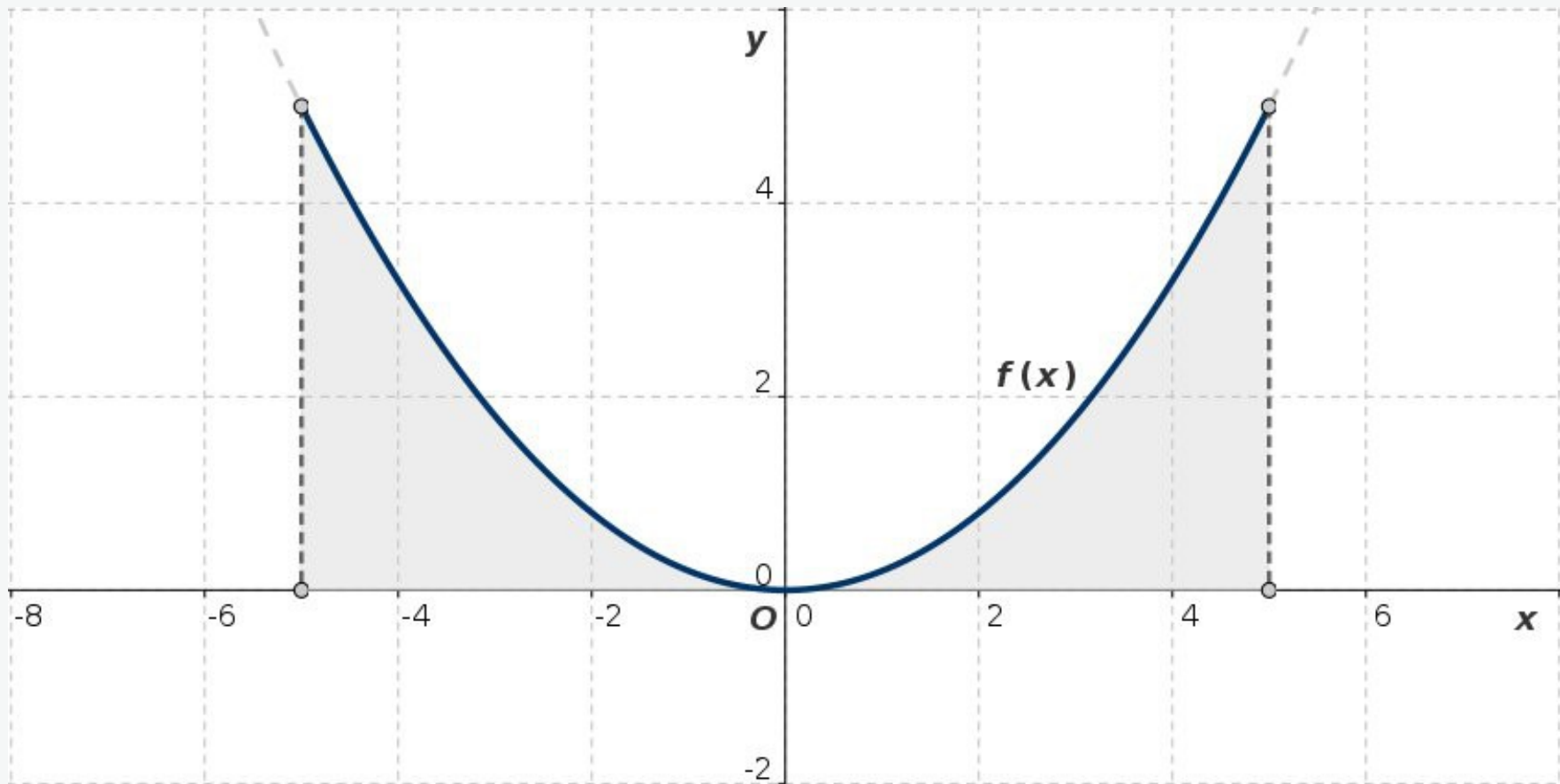


Abb. 3-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 0.2 x^2$ im Intervall $[-5, 5]$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-5}^5 y^2 dx = \frac{\pi}{5^2} \cdot \int_{-5}^5 x^4 dx = \frac{\pi}{5^2} \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-5}^5 = 2 \cdot 5^2 \pi \text{ (VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_{-5}^5 x y^2 dx = \frac{1}{2 \cdot 5^4} \int_{-5}^5 x^5 dx = 0 \text{ (LE)}$$

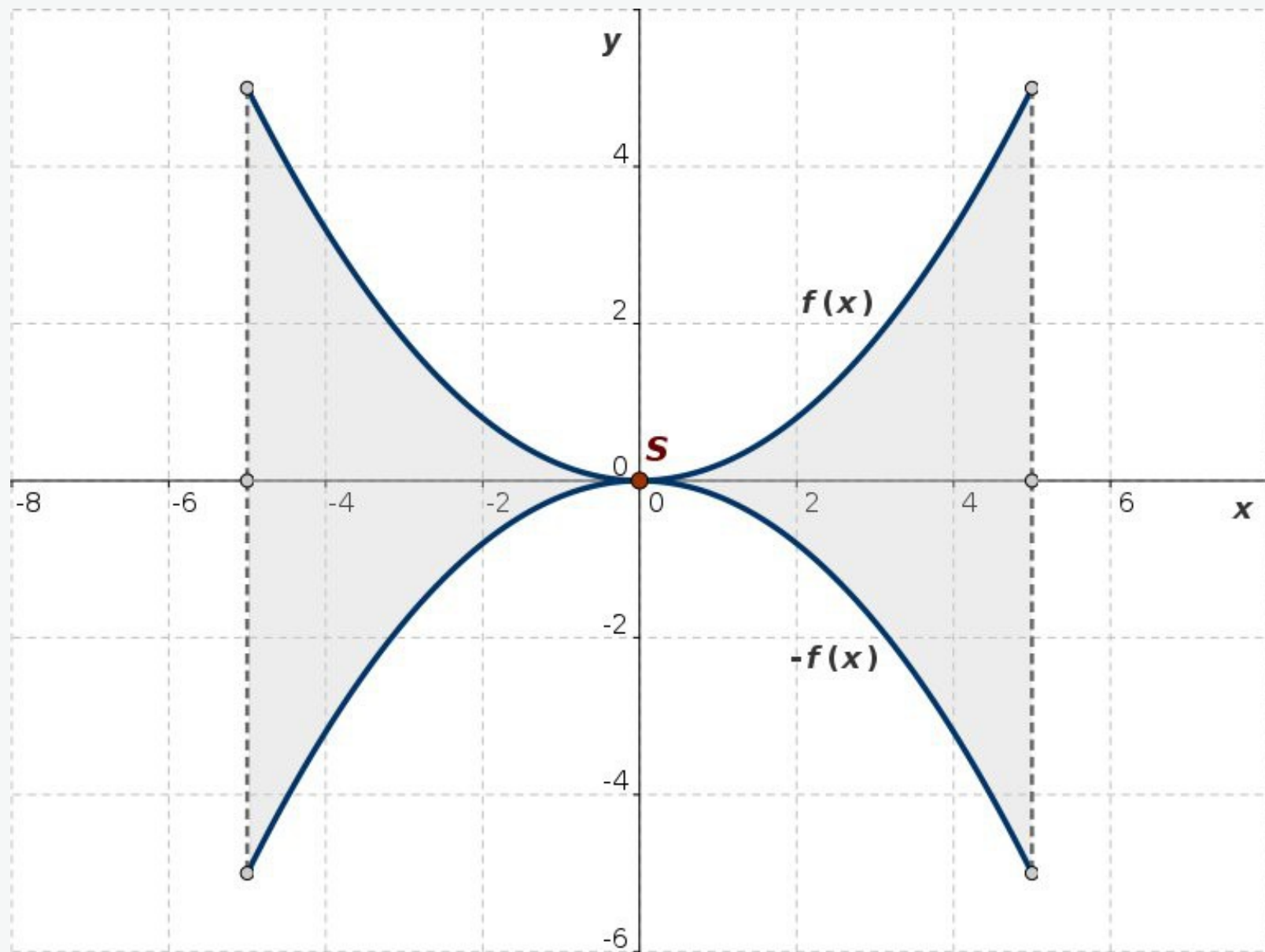


Abb. 3-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene, Schwerpunkt $S = (0, 0, 0)$

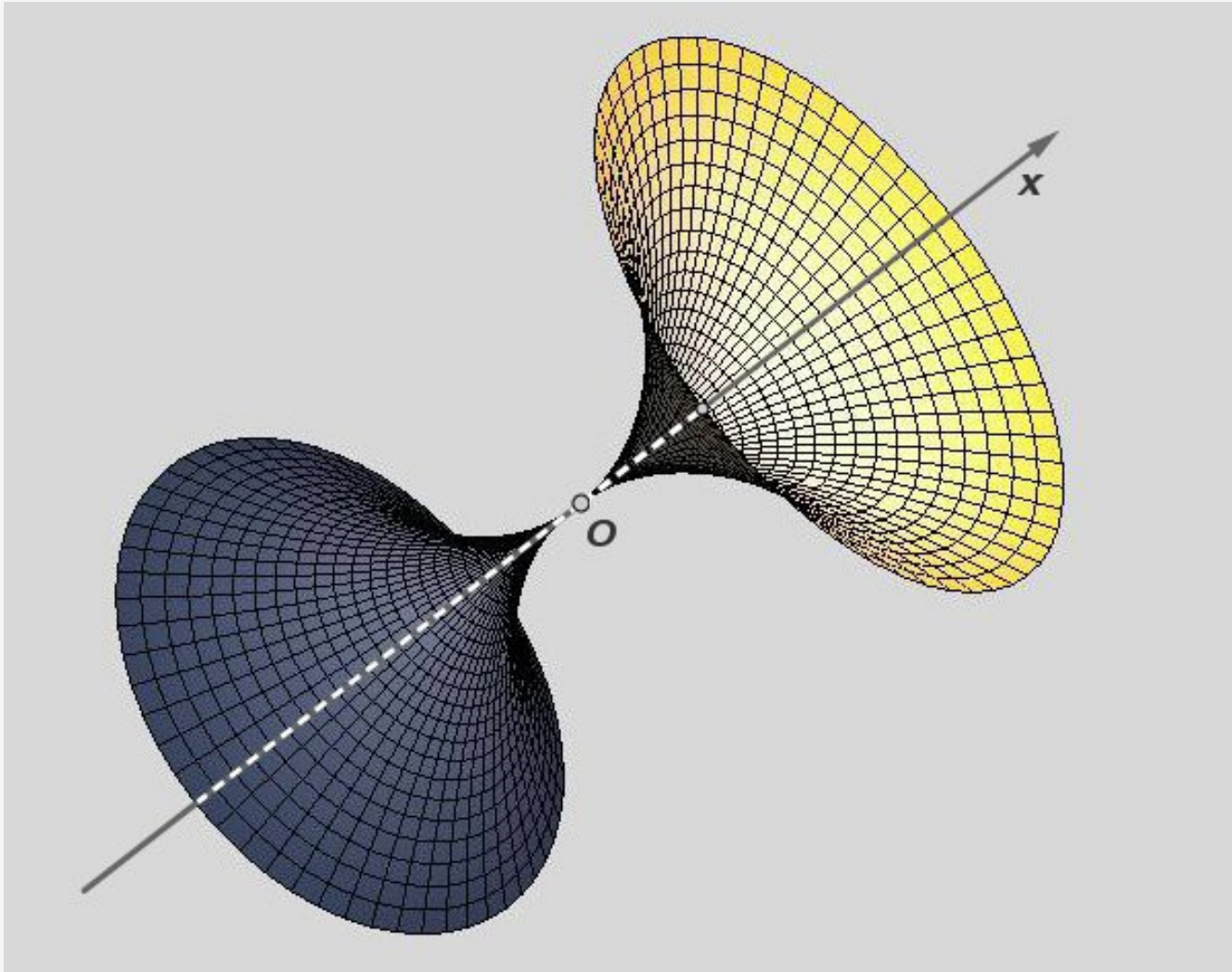


Abb. 3-3a: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 0.2 x^2$ ($-5 \leq x \leq 5$) um die x -Achse erzeugter Körper

$$\vec{r}_S = (0, 0, 0)$$

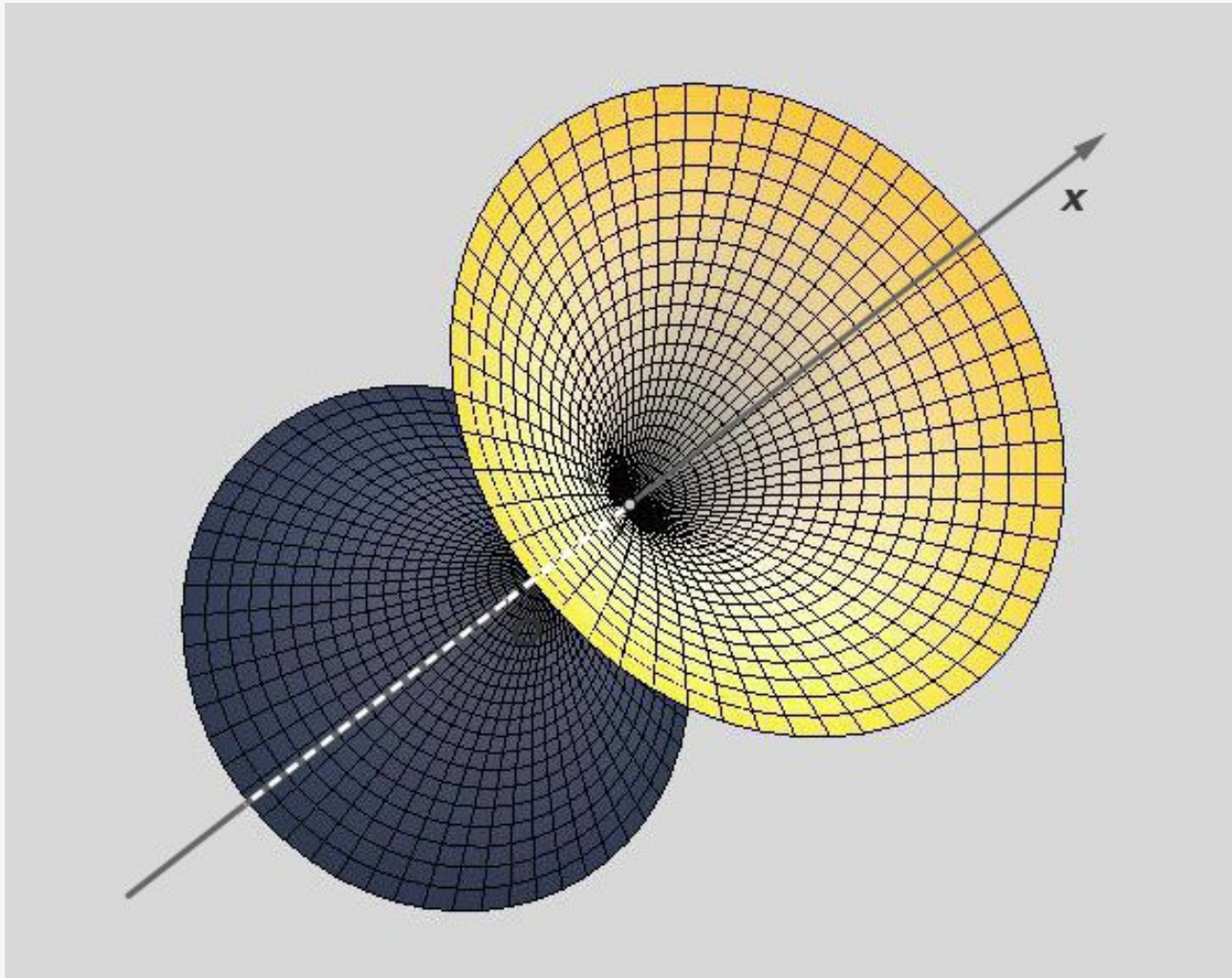


Abb. 3-3b: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 0.2 x^2$ ($-5 \leq x \leq 5$) um die x -Achse erzeugter Körper

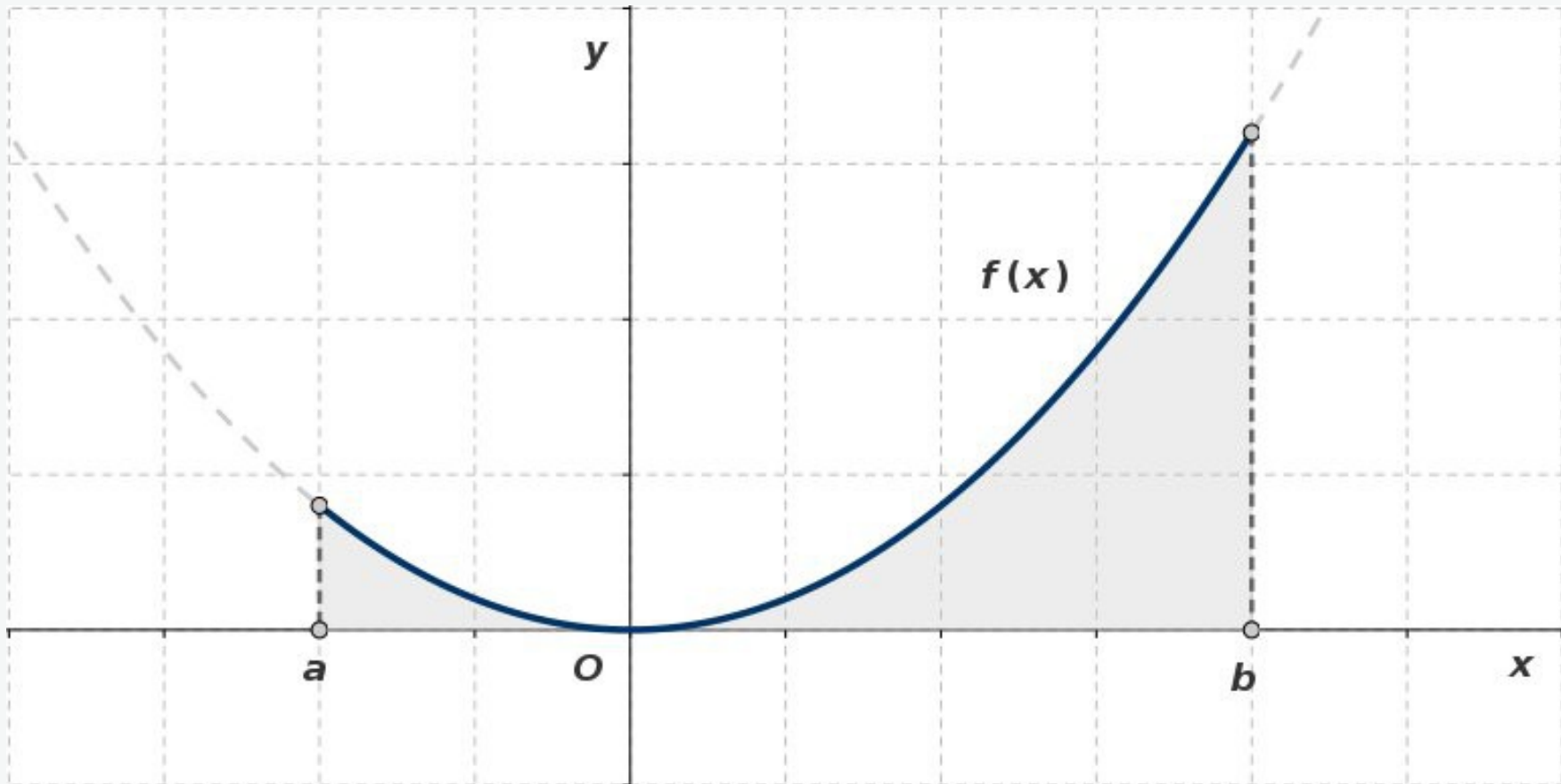


Abb. 4-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 0.2 x^2$ im Intervall $[a, b]$

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (\alpha x^2)^2 dx = \pi \alpha^2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_a^b = \frac{\pi \alpha^2}{5} (b^5 - a^5) \quad (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_a^b x y^2 dx = \frac{5}{b^5 - a^5} \int_a^b x^5 dx = \frac{5 (b^6 - a^6)}{6 (b^5 - a^5)} \quad (\text{LE})$$

4-4b



Abb. 4-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene, $y = 0.2 x^2$ im Intervall $[a, b]$,
($a = -2$, $b = 5$), Schwerpunkt $S = (4.11, 0, 0)$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 4

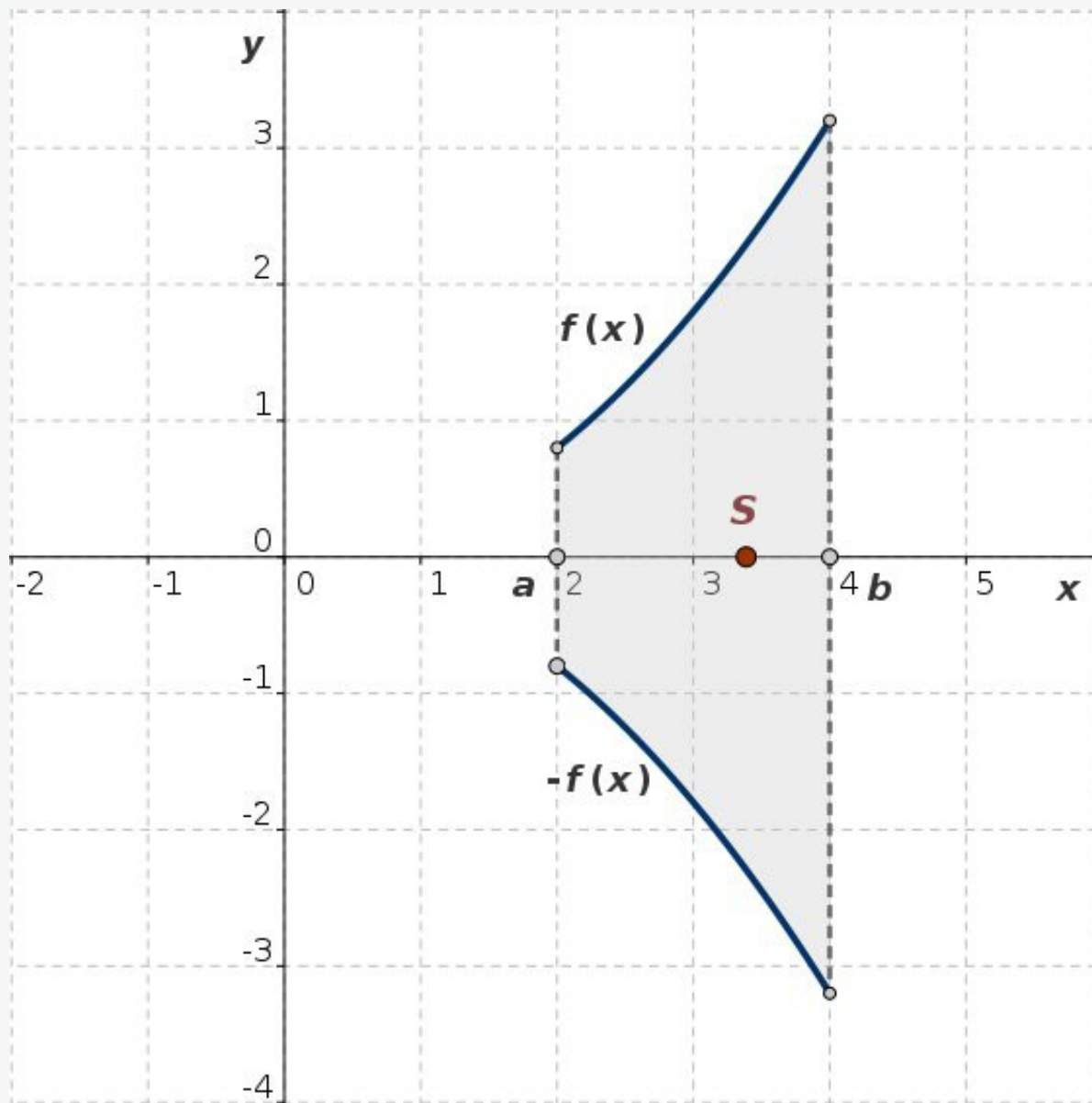


Abb. 4-3: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene, $y = 0.2 x^2$ im Intervall $[a, b]$,
($a = 2$, $b = 4$), Schwerpunkt $S = (3.39, 0, 0)$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 4

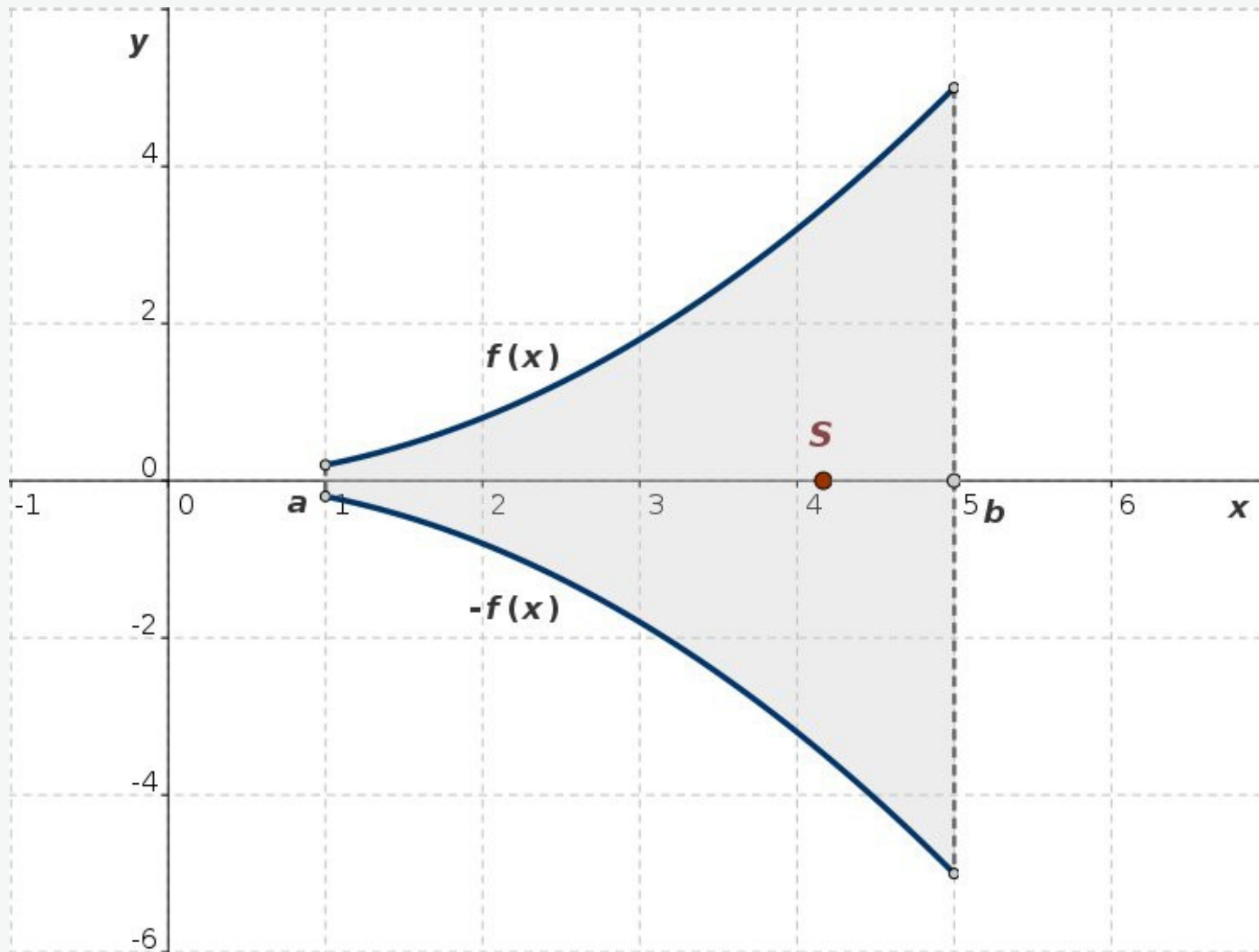


Abb. 4-4: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene, $y = 0.2 x^2$ im Intervall $[a, b]$,
($a = 1$, $b = 5$), Schwerpunkt $S = (4.17, 0, 0)$