Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Aufgaben

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Aufgaben 11-14

Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht

Aufgabe 11: $a)\ f(x) = \sqrt{\sin x}\,, \quad x \in [0,\ \pi]$

$b)\ f(x) = \sqrt{\cos x}\,, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$

Aufgabe 12: $a)\ f(x) = \sqrt{|\sin x|}\,, \quad x \in [0,\ 2\pi]$

$b)\ f(x) = \sqrt{|\sin x|}\,, \quad x \in [0,\ 3\pi]$

Aufgabe 13: $f(x) = \sin x$

$a)\ x \in [0,\ \pi], \quad b)\ x \in [0,\ 2\pi], \quad c)\ x \in [0,\ 3\pi]$

Aufgabe 14: $f(x) = \sin^2 x$

$a)\ x \in [0,\ \pi], \quad b)\ x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right], \quad c)\ x \in [0,\ 2\pi]$

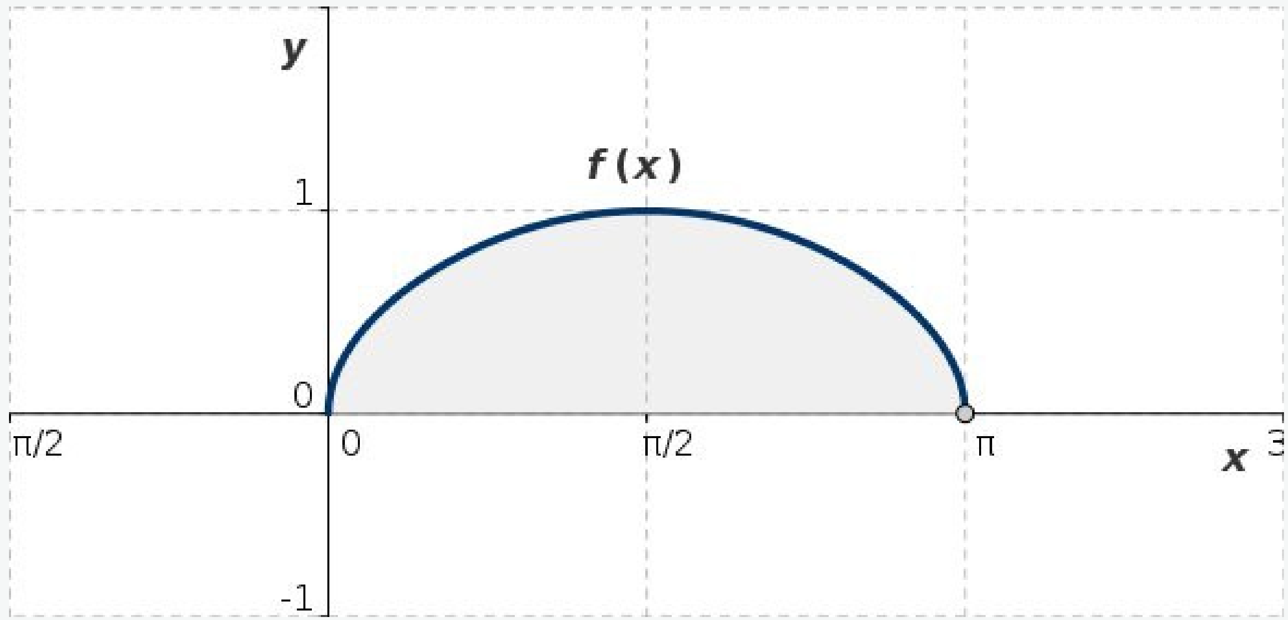

Abb. 11-1: Fläche unter der Kurve mit Gleichung $y = f(x)$ im Intervall $[0, \pi]$

$$y = \sqrt{\sin x}\,, \qquad V_x = \pi \cdot \int_0^{\pi} y^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\pi \left[\cos x\right]_0^{\pi} = 2\pi \ (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{\pi} x\, y^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} \ (\text{LE})$$

$$\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x$$

$$\vec{r}_S = \left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ 0 \right)$$

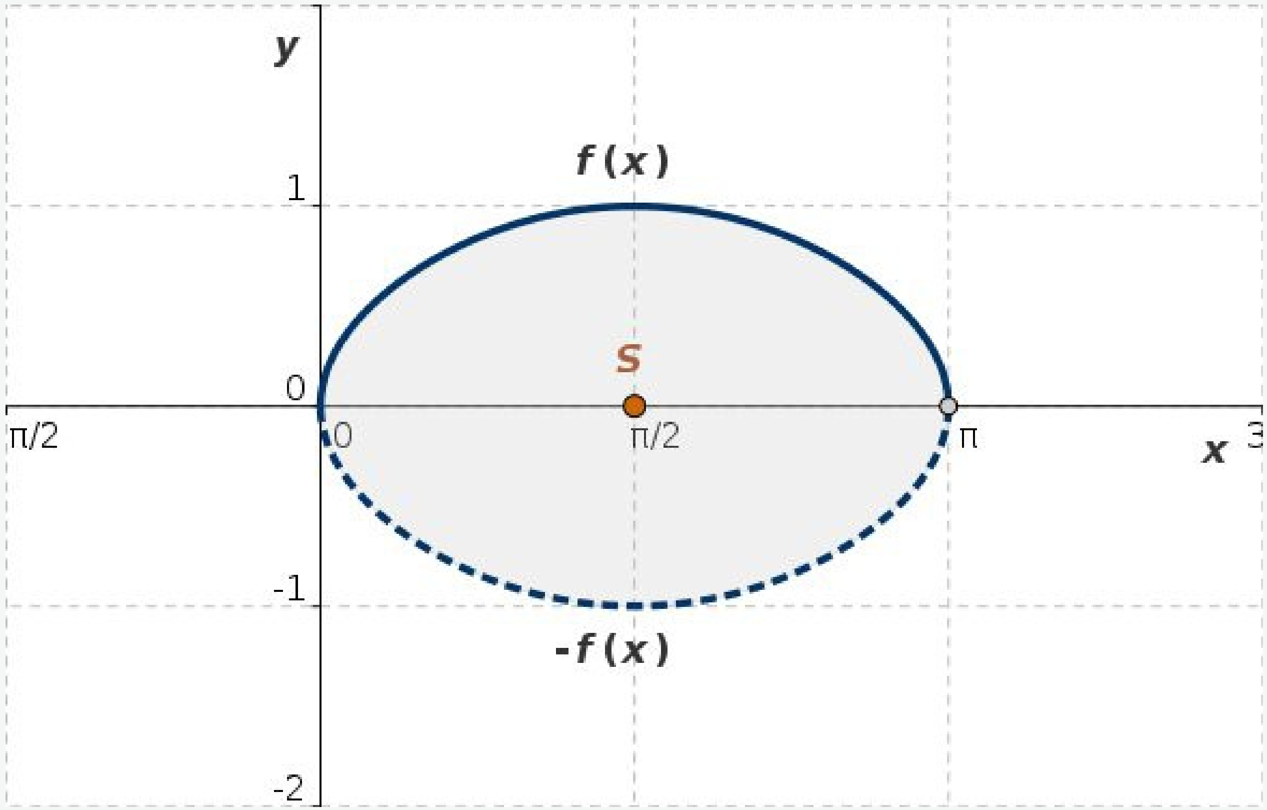

Abb. 11-2: Die Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene

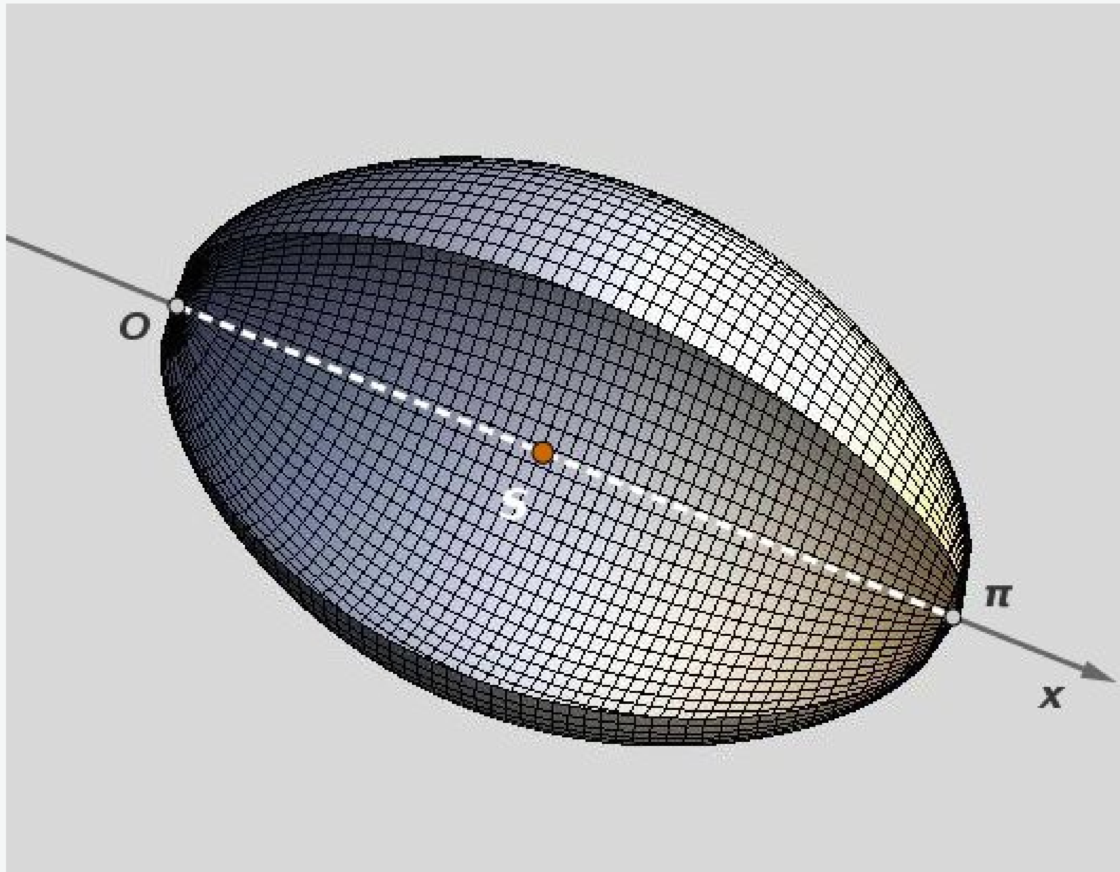

Abb. 11-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ ($\varphi = 3\pi/2$) um die x-Achse erzeugter Körper

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 11a

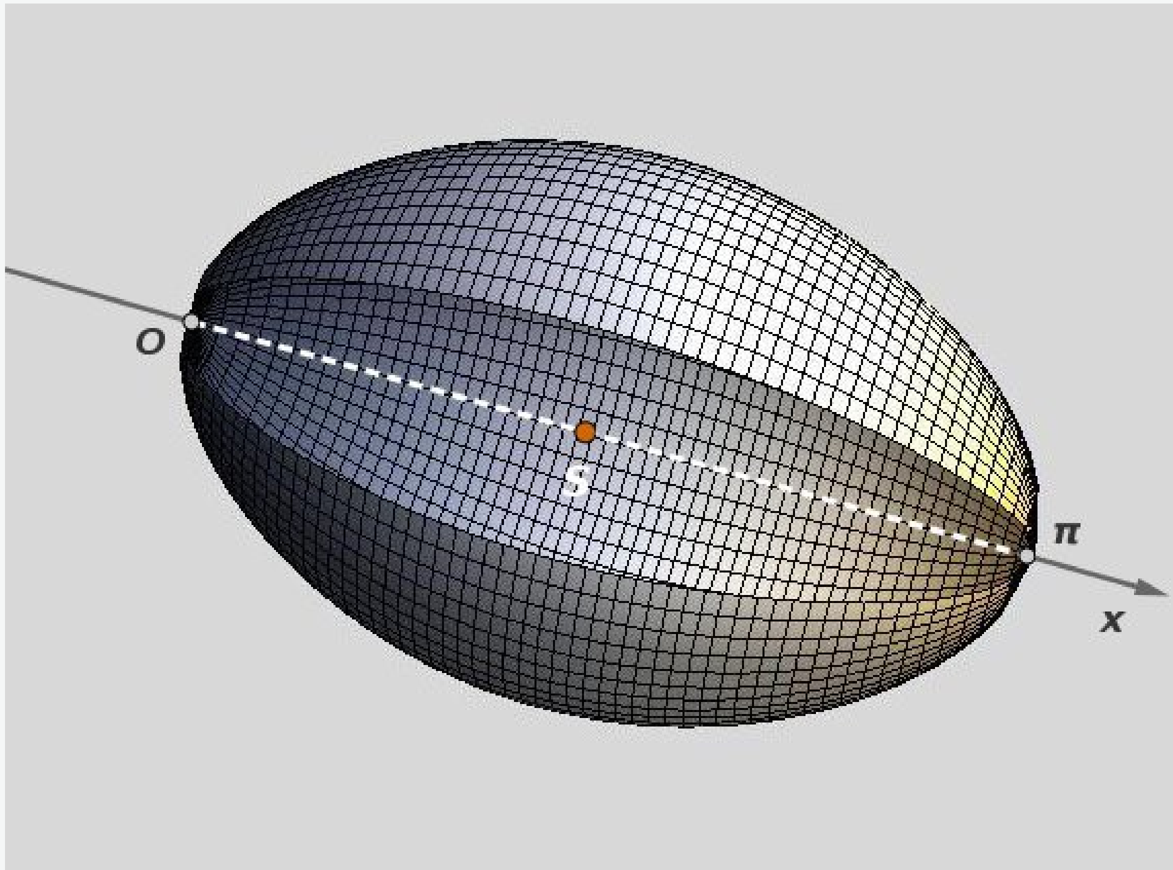

Abb. 11-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ ($\varphi = 7\pi/4$) um die x-Achse erzeugter Körper

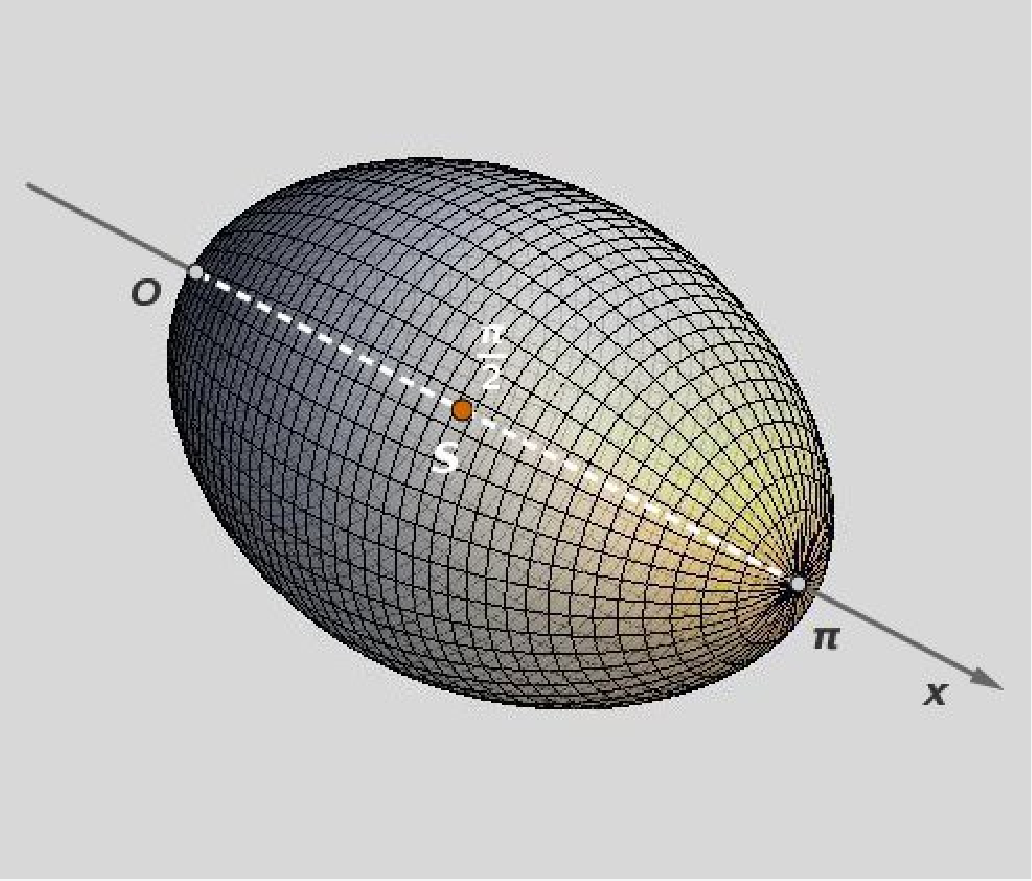

Abb. 11-5: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq \pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

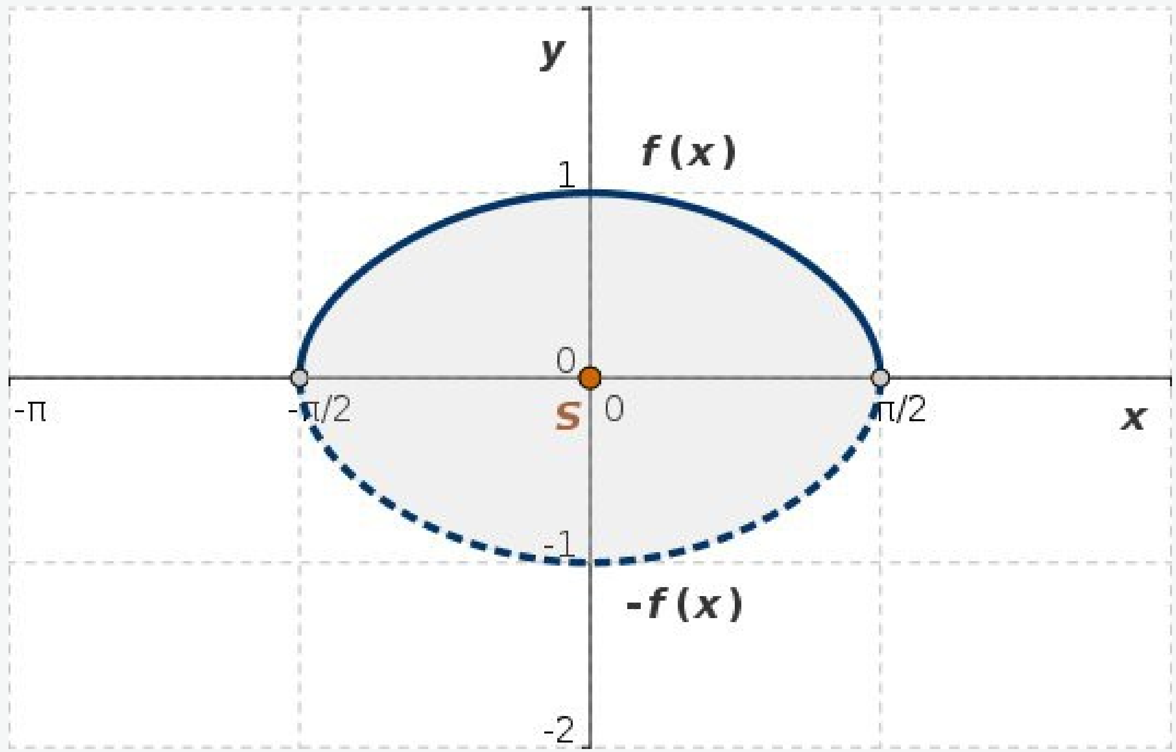

Abb. 11-4: Die Kurve $y = f(x)$ im Intervall [-π/2, π/2] und die Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene

$$y = \sqrt{\cos x}\,, \qquad V_x = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2\, dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\pi \ (\mathrm{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\, y^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x\, dx = 0 \ (\mathrm{LE})\,, \qquad S = (0,\ 0,\ 0)$$

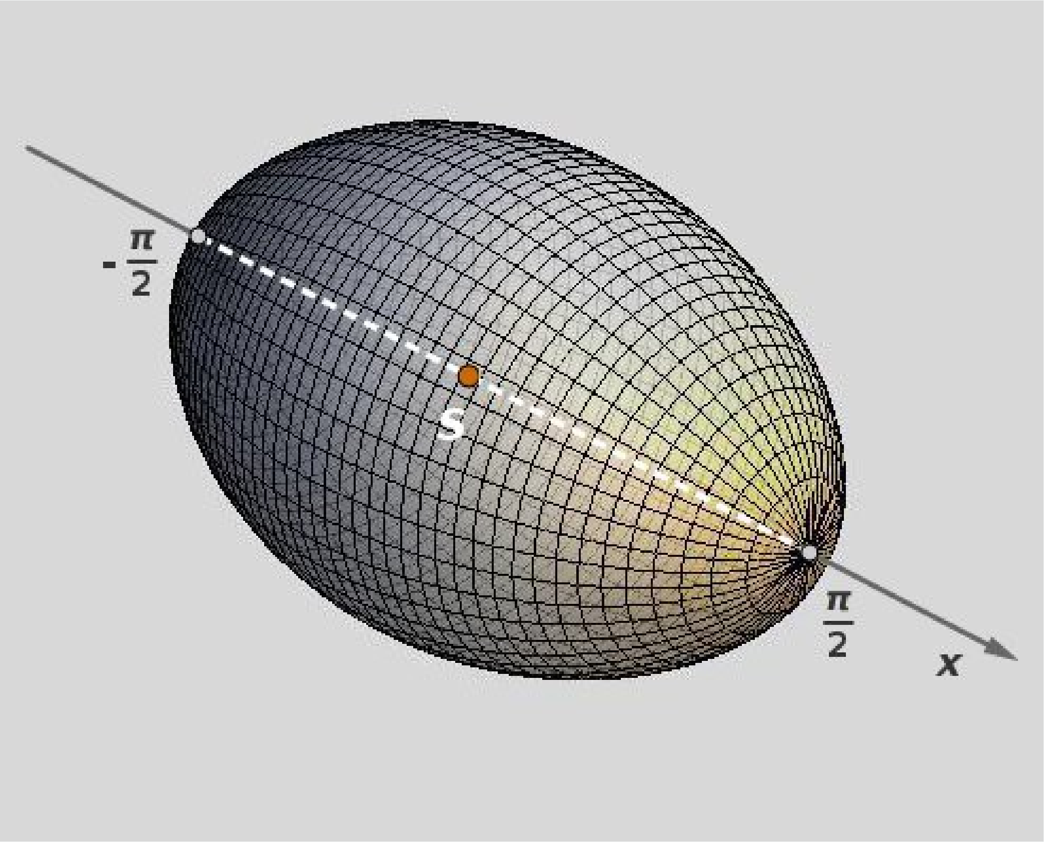

Abb. 11-5: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse erzeugte Fläche

Auch aus Symmetriegründen ergibt sich, dass der Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt.

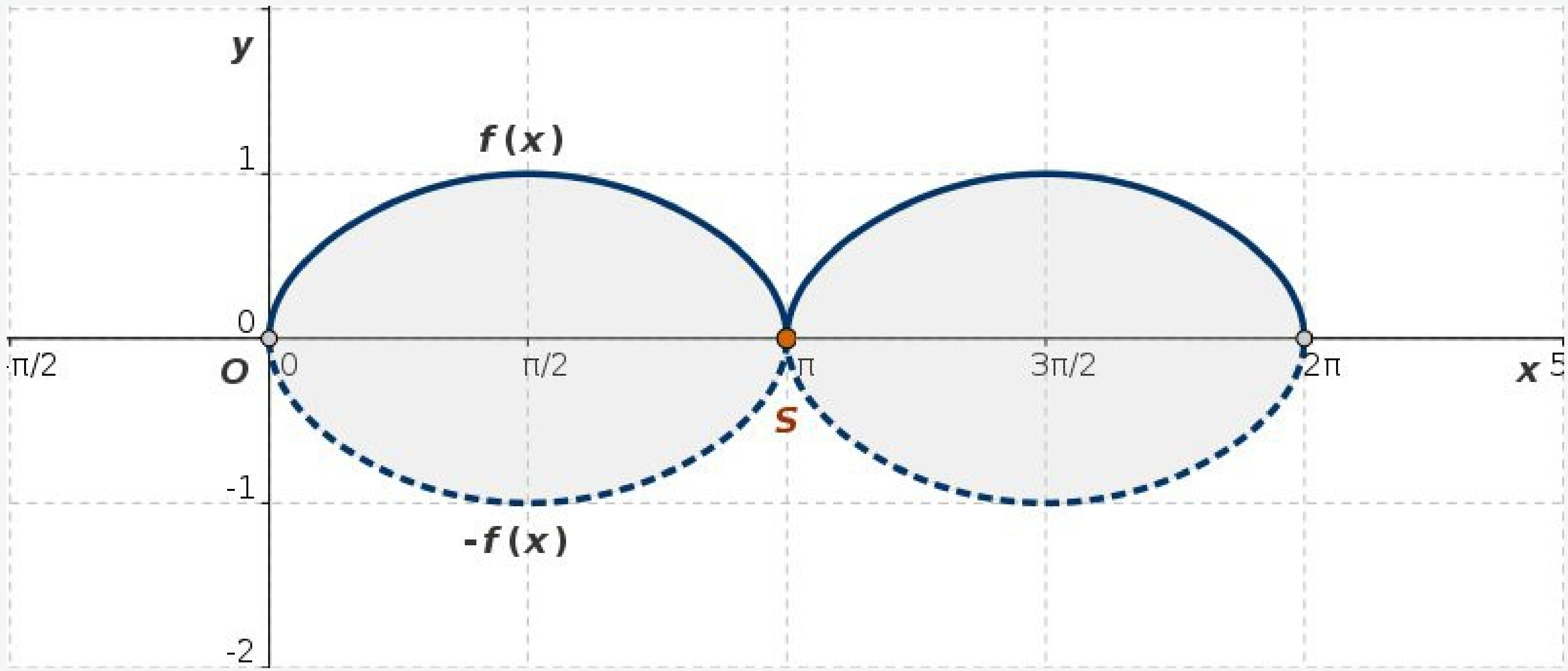

Abb. 12-1: Die Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene

$$y = \sqrt{|\sin x|}$$

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} y^2 \, dx = \pi \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = \pi \left[\int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right] = 4\pi \ (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x \, y^2 \, dx = \frac{1}{4} \left[\int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right] = \pi \ (\text{LE})$$

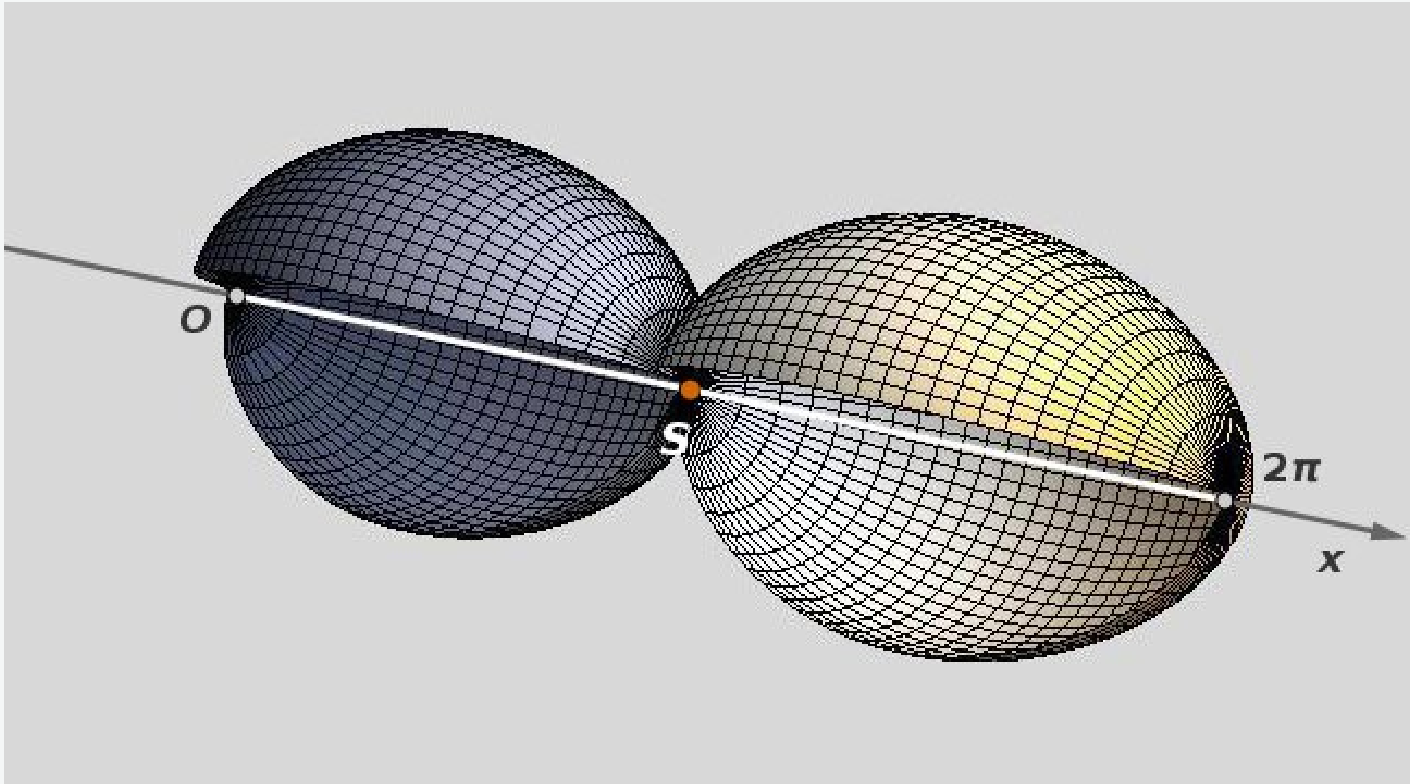

Abb. 12-2: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(\varphi = 3\pi/2)$ um die x-Achse erzeugter Körper

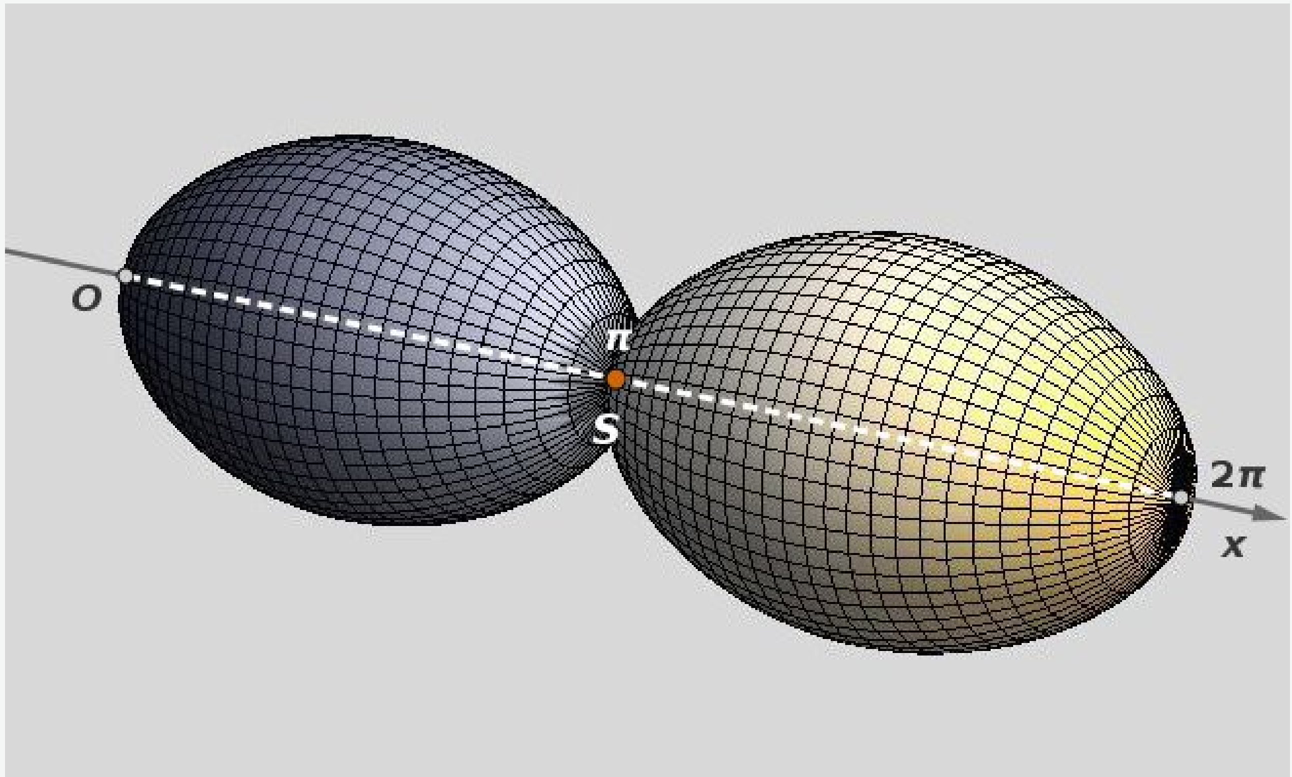

Abb. 12-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(\varphi = 2\pi)$ *um die x-Achse erzeugter Körper*

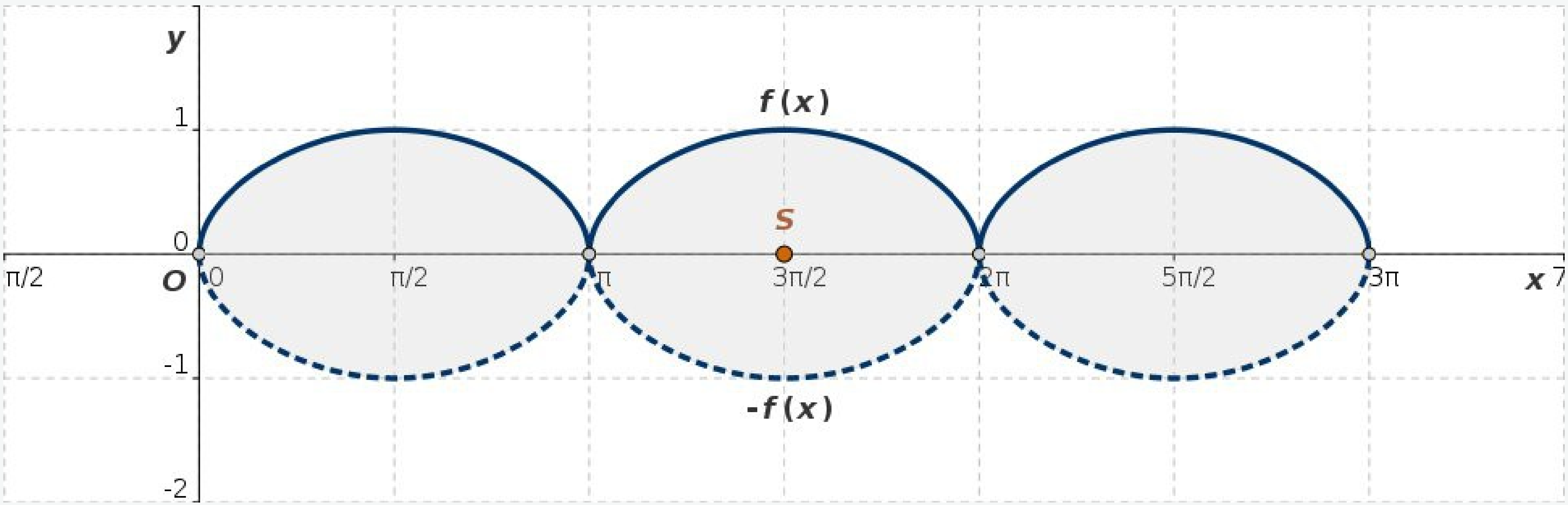

Abb. 12-4: Die Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene

$$y = \sqrt{|\sin x|}\,, \qquad V_x = \pi \int_0^{3\pi} y^2\,dx = \pi \int_0^{3\pi} |\sin x|\,dx = 3\pi \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 6\pi \ \text{(VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{3\pi} x\,y^2\,dx = \frac{1}{6} \int_0^{3\pi} x\,|\sin x|\,dx = \frac{3}{2}\pi \ \text{(LE)}$$

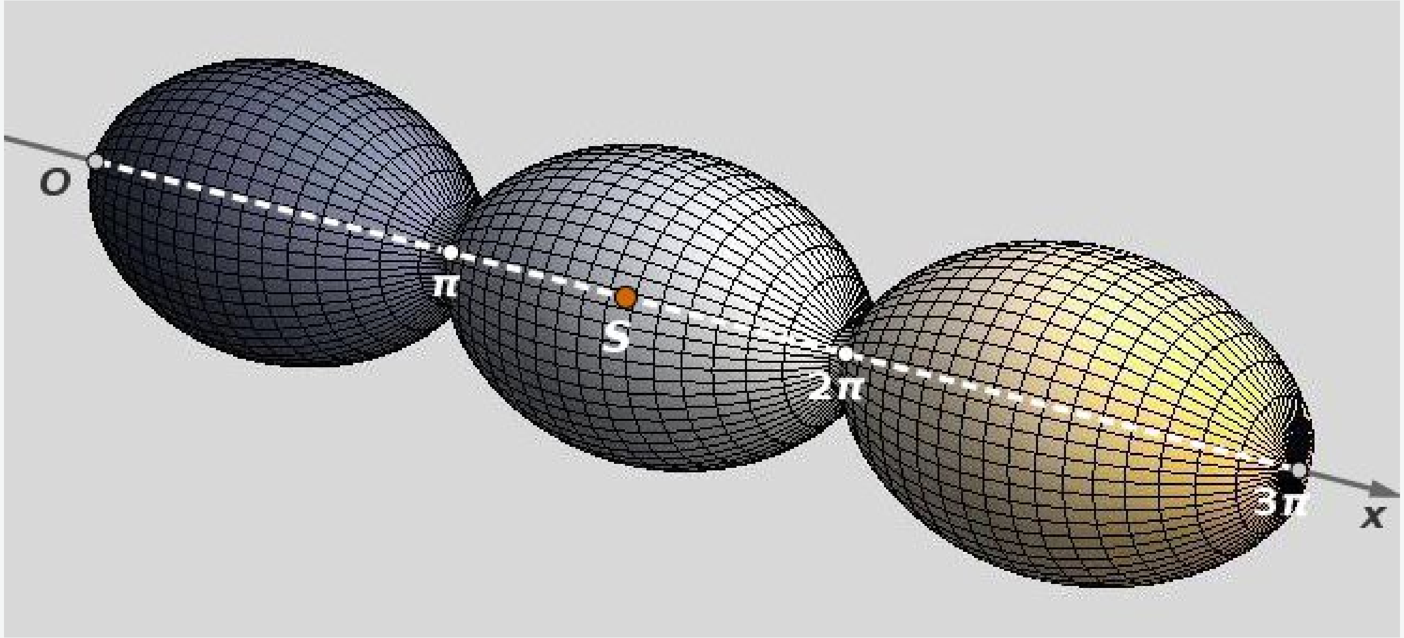

Abb. 12-5: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ ($\varphi = 2\pi$) um die x-Achse erzeugter Körper