Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Aufgaben

15-E2

Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht

Aufgabe 15: $f(x) = \sqrt{2 + 2\sin(2x)}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$

Aufgabe 16: $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sin(4x)}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$

Aufgabe 17: $f(x) = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$

Aufgabe 18: $f(x) = \sqrt{a\sin\left(\frac{x}{2}\right)(b + \cos x)}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$

1) $a = 1, \quad b = 2, \qquad$ 2) $a = 2, \quad b = 1.1$

$a,\ b \in \mathbb{R}, \qquad a,\ b > 0$

Aufgabe 19: $f(x) = 2 + \sin(x), \qquad x \in [0,\ 2\pi]$

Aufgabe 20: $f(x) = 0.4\,x + \sin(2x) + 1, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$

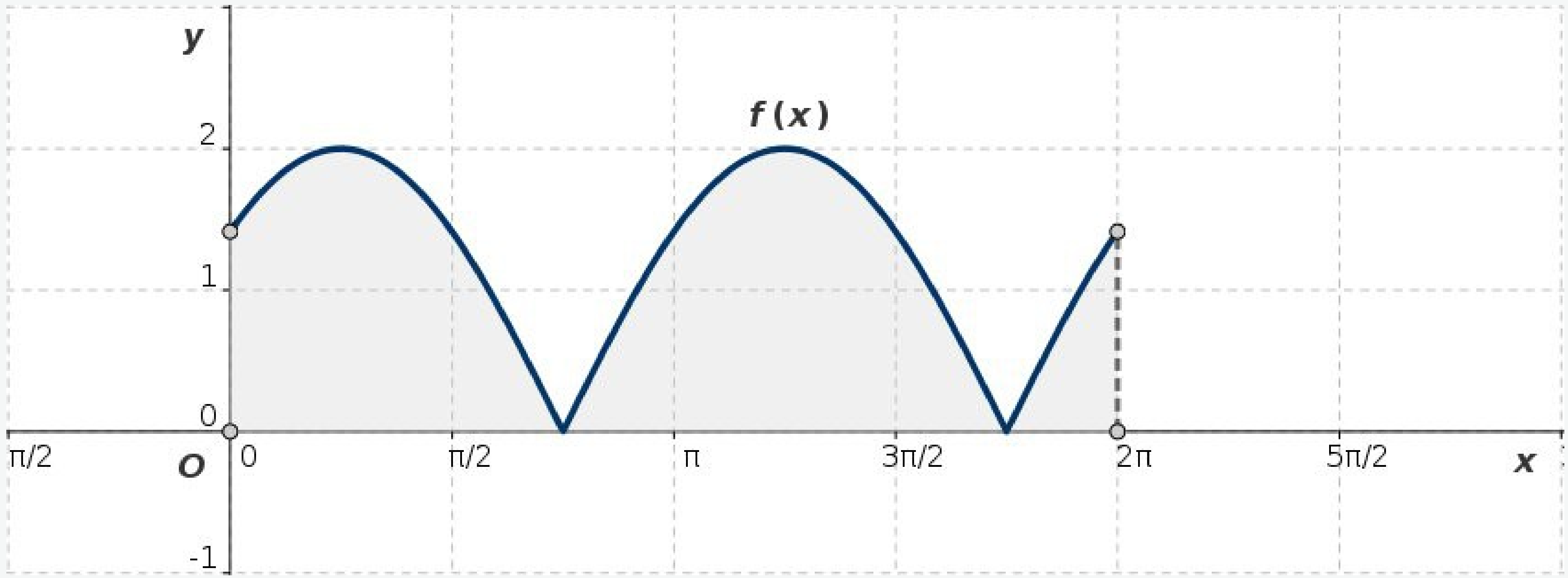

Abb. 15-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \sqrt{2 + 2\sin(2x)}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\, dx = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \sin(2x))\, dx = 2\pi \left[x - \frac{1}{2}\cos(2x) \right]_0^{2\pi} =$$

$$= 4\pi^2 \text{ (VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\, (1 + \sin(2x))\, dx =$$

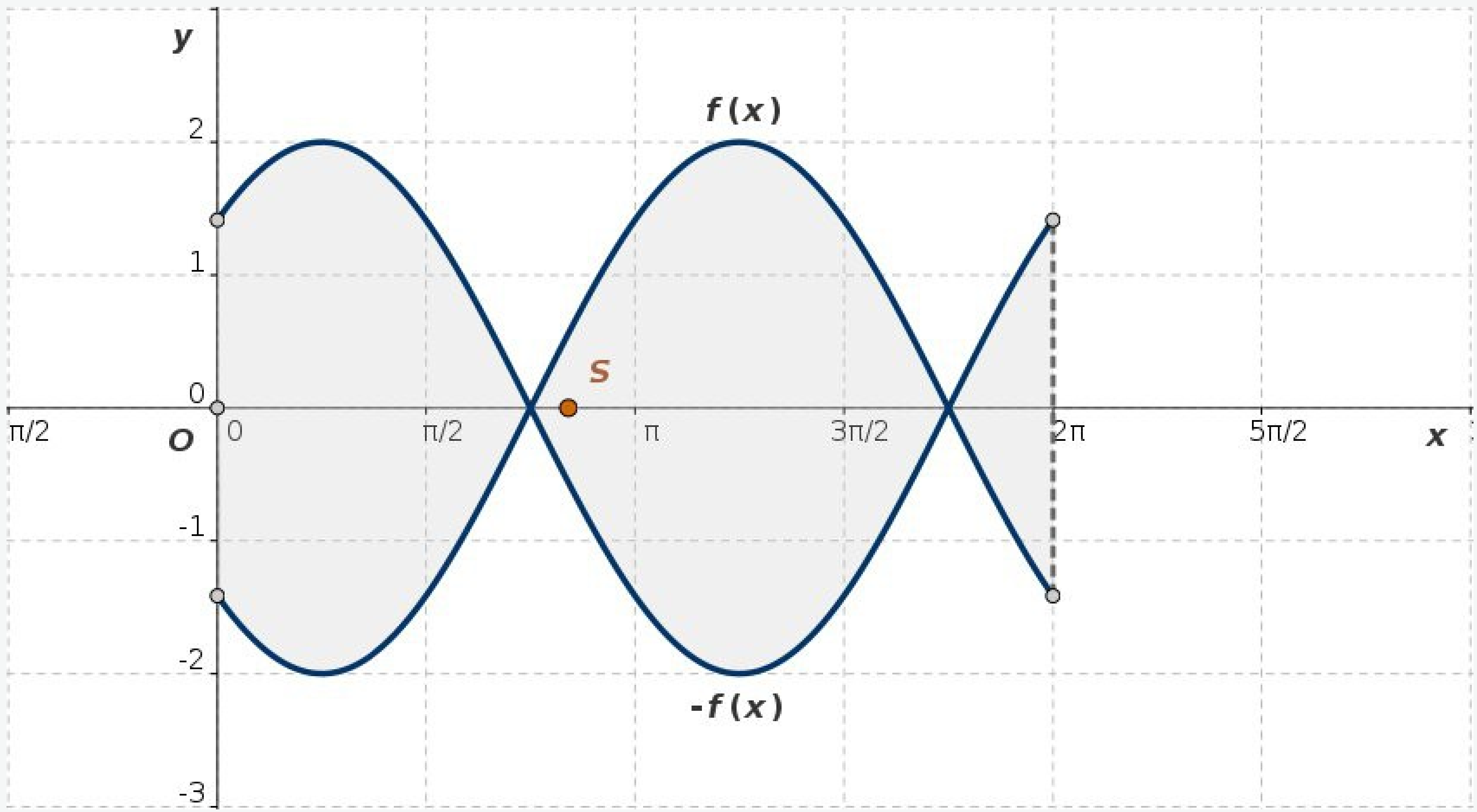

Abb. 15-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt S = (2.64, 0, 0)

$$x_S = \frac{1}{8\,\pi}\left[\,2\,x^2 + \sin(2\,x) - 2\,x\cos(2\,x)\,\right]_0^{2\,\pi} = \pi - \frac{1}{2} \simeq 2.64 \quad (\mathrm{LE})$$

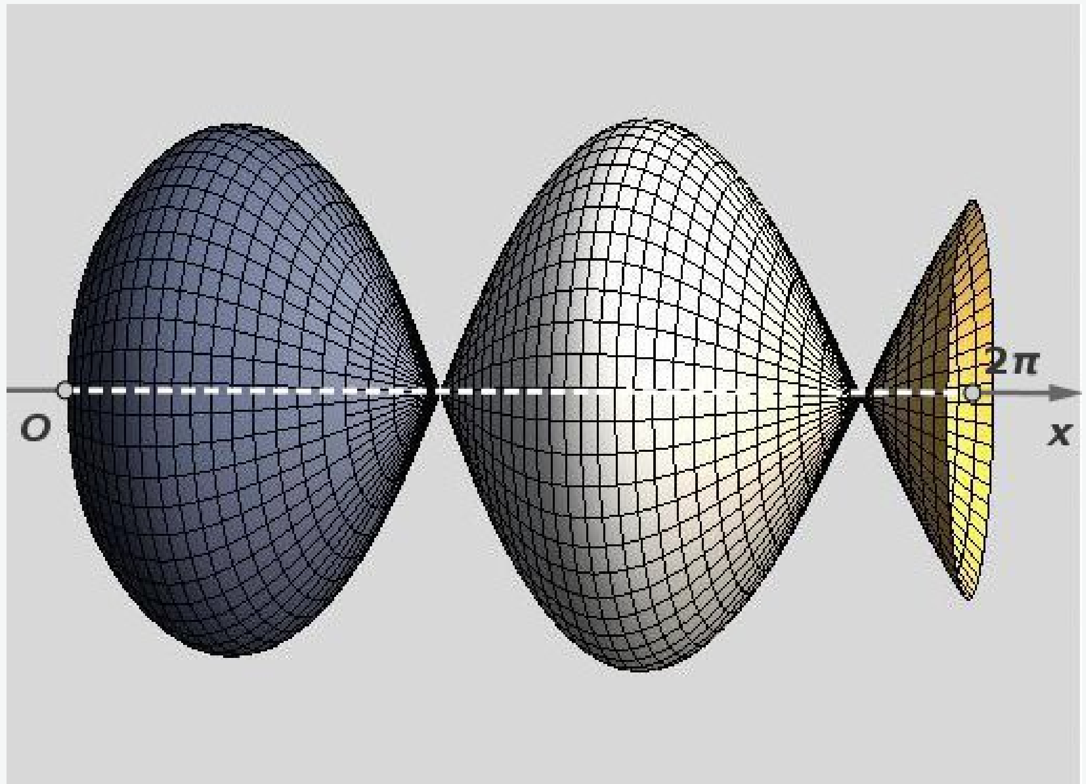

Abb. 15-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

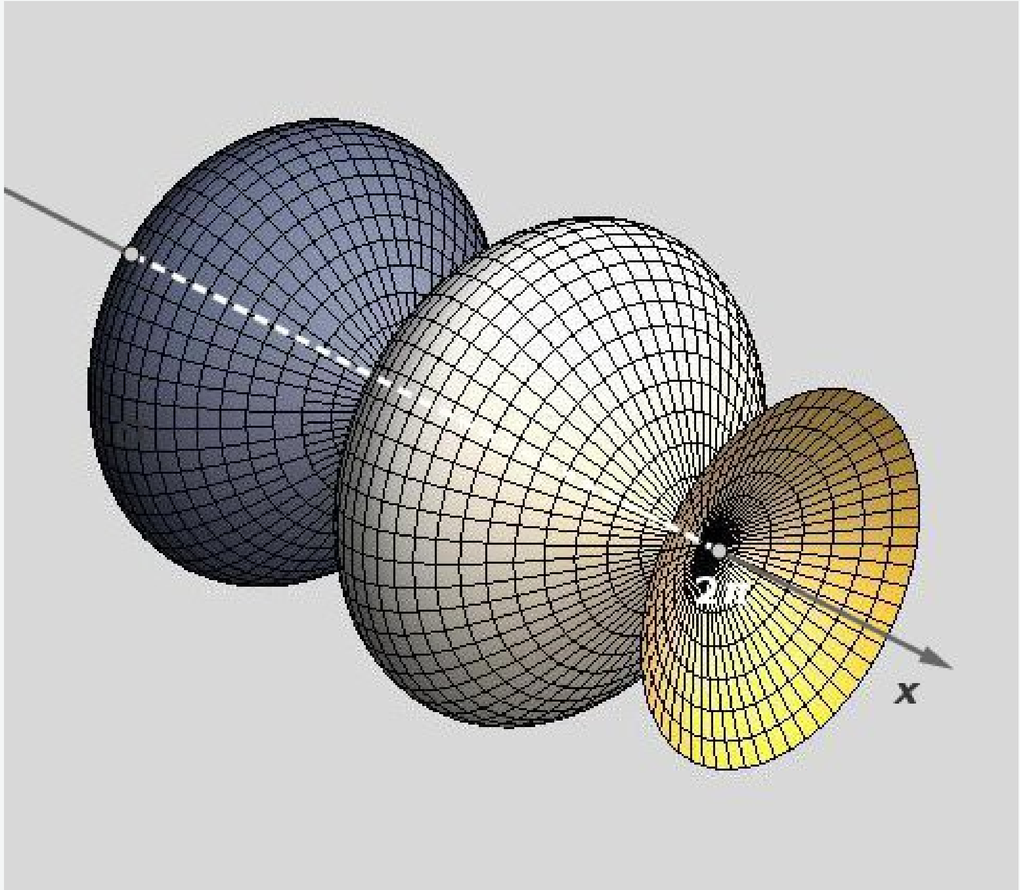

Abb. 15-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

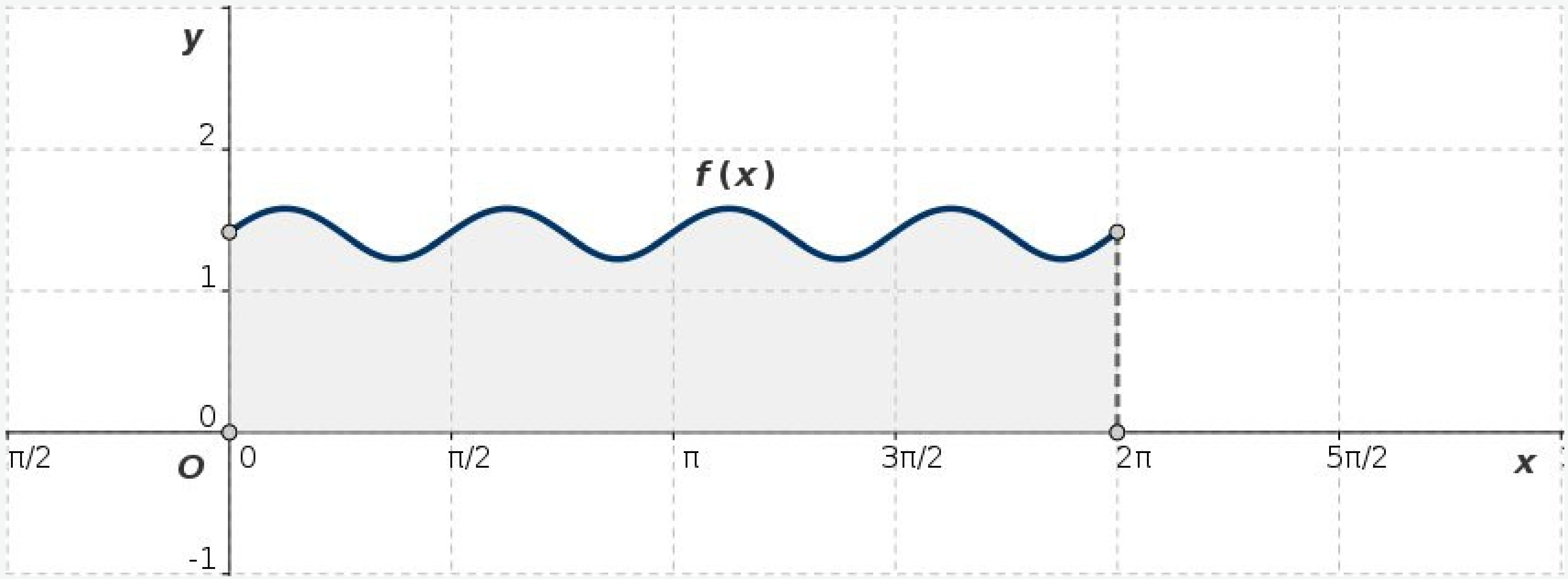

Abb. 16-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{2} \sin(4x)}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{2} \sin(4x)\right) dx = 4\pi^2 \text{ (VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x \, y^2 \, dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x \left(2 + \frac{1}{2} \sin(4x)\right) dx = \left(\pi - \frac{1}{16}\right) \simeq 3.08 \text{ (LE)}$$

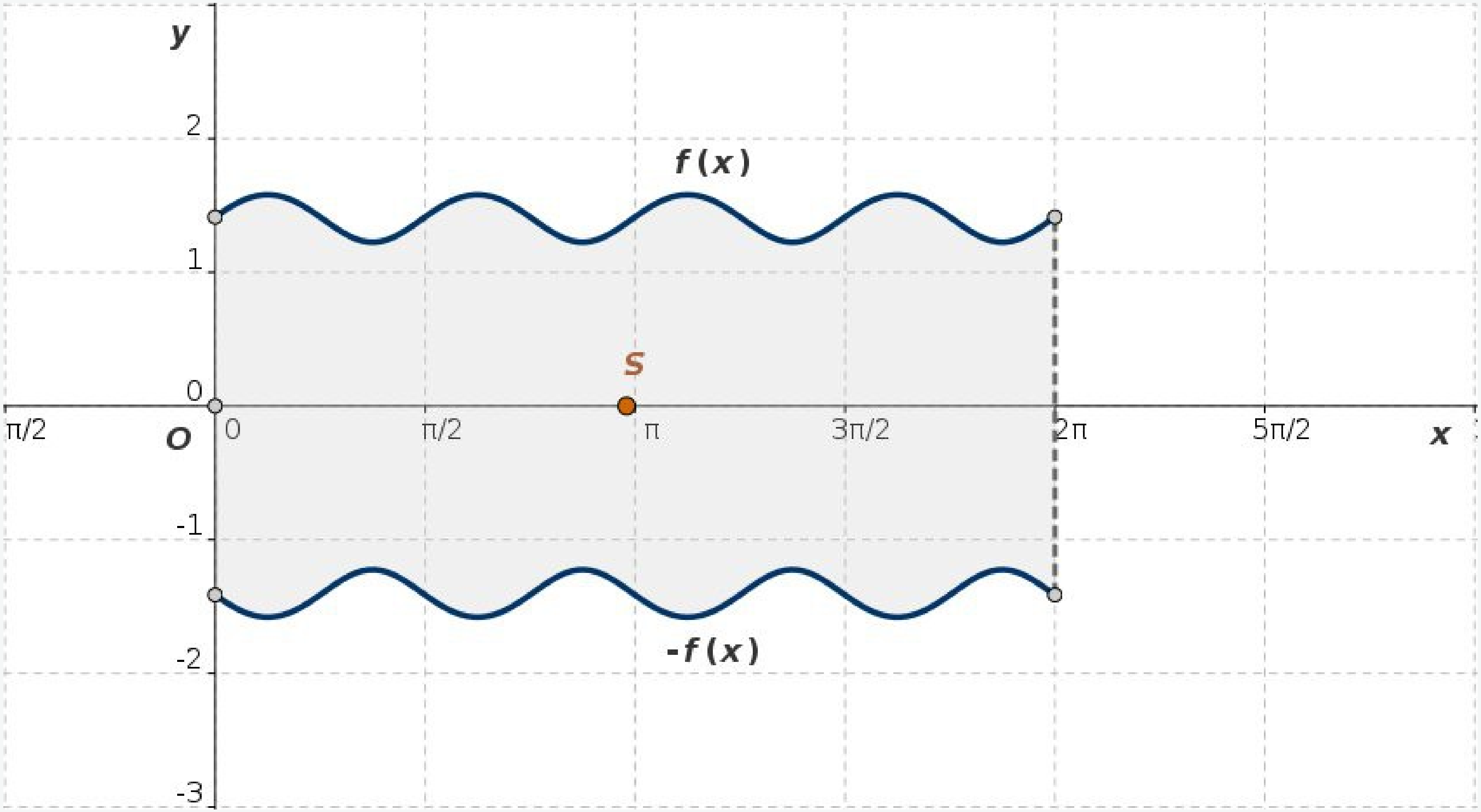

Abb. 16-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt $S = (3.08, 0, 0)$

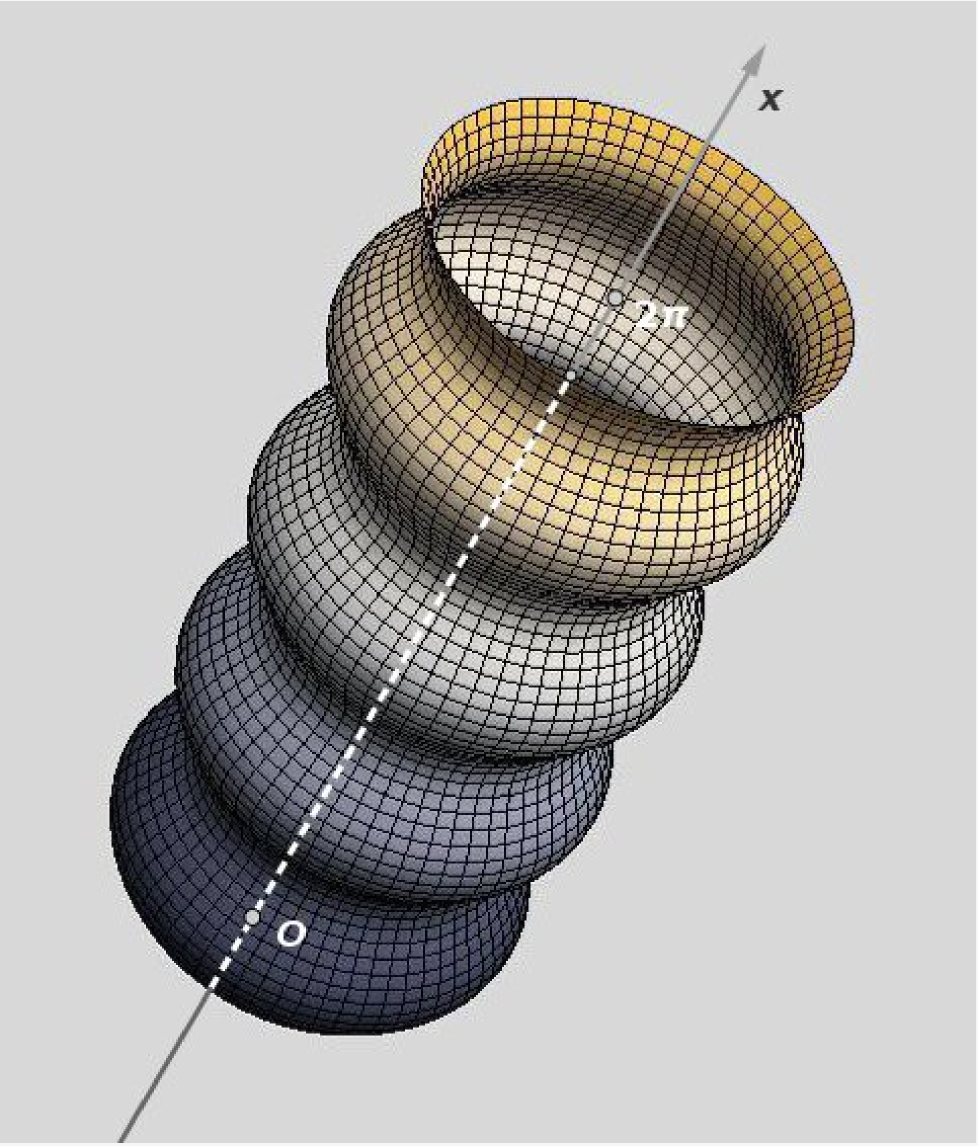

Abb. 16-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

Abb. 16-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper, eine Vase

$$f(x) = \sqrt{4 + \sin(4x)}, \qquad x \in [0, 2\pi]$$

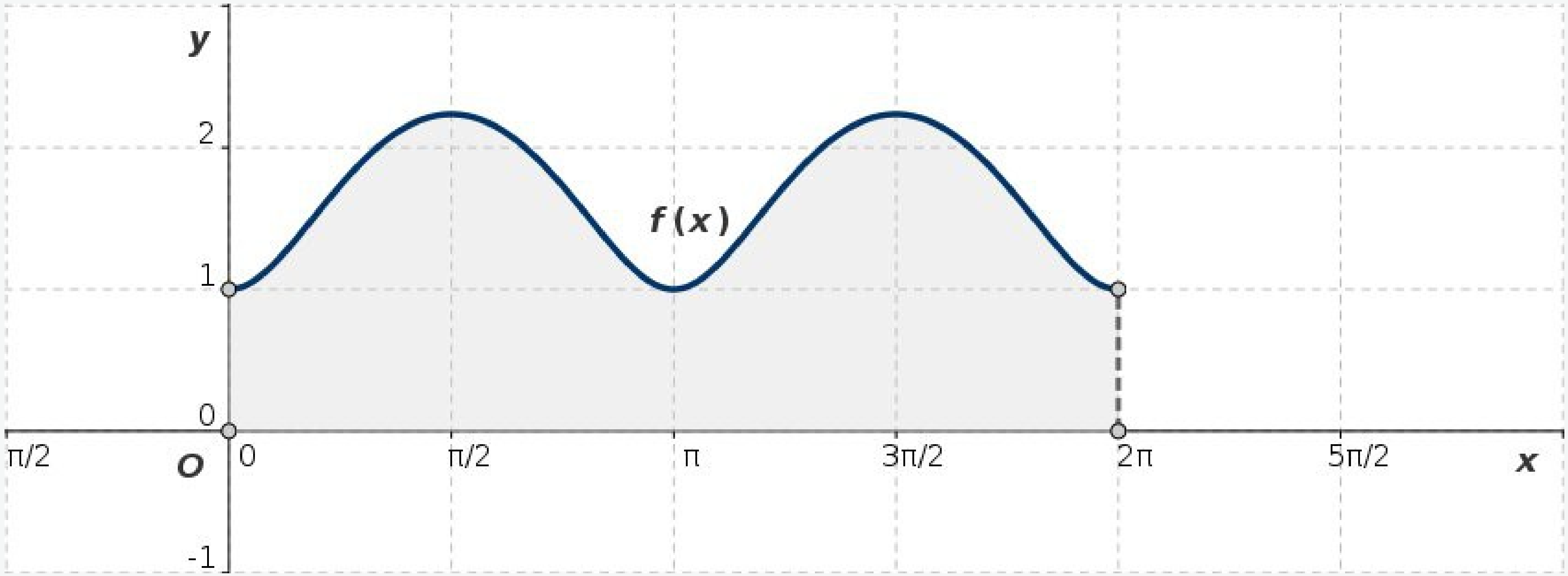

Abb. 17-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} \left(1 + 4\sin^2 x\right) dx = 6\pi^2 \ (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} x\left(1 + 4\sin^2 x\right) dx = \pi \simeq 3.14 \ (\text{LE})$$

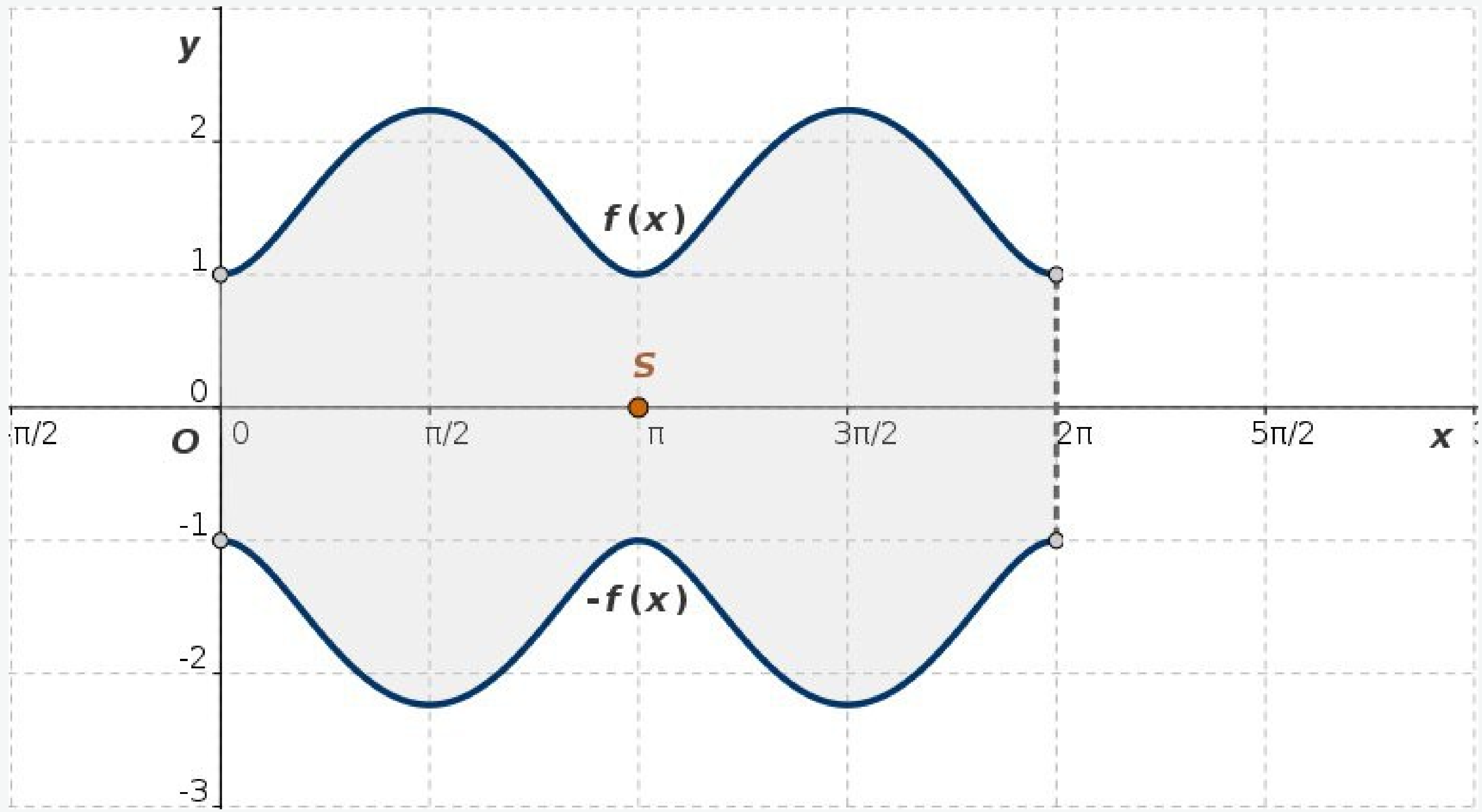

Abb. 17-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt $S = (\pi, 0, 0)$

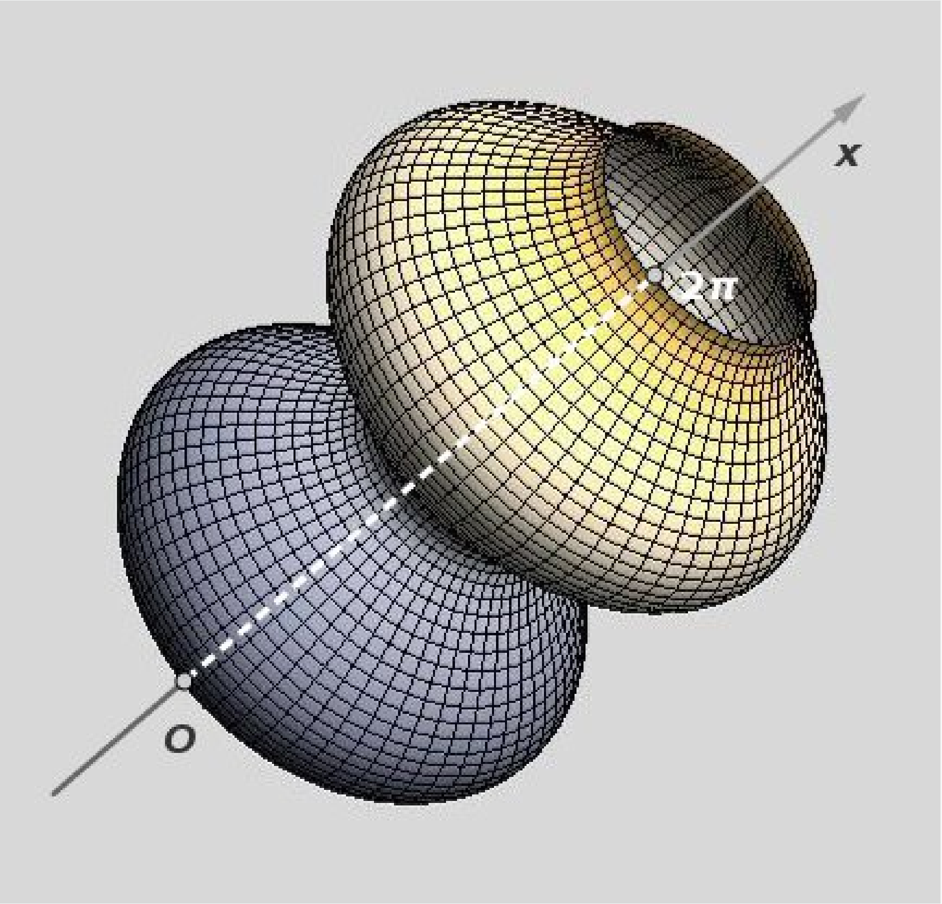

Abb. 17-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

$$f(x) = \sqrt{a \sin\left(\frac{x}{2}\right)(b + \cos x)}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\, dx = a\pi \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)(b + \cos x)\right) dx =$$

$$= a\pi \left[b \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos x \, dx \right] =$$

$$= a\pi \left[(1 - 2b) \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\, a\pi\, (3b - 1)\ (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \frac{3}{4(3b-1)} \int_0^{2\pi} x \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)(b + \cos x)\right) dx = \pi\ (\text{LE})$$

$$\int \sin(\alpha x)\, dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$$

$$\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x)\, dx = \frac{1}{2} \int \left(\sin((\alpha - \beta)x) + \sin((\alpha + \beta)x) \right) dx$$

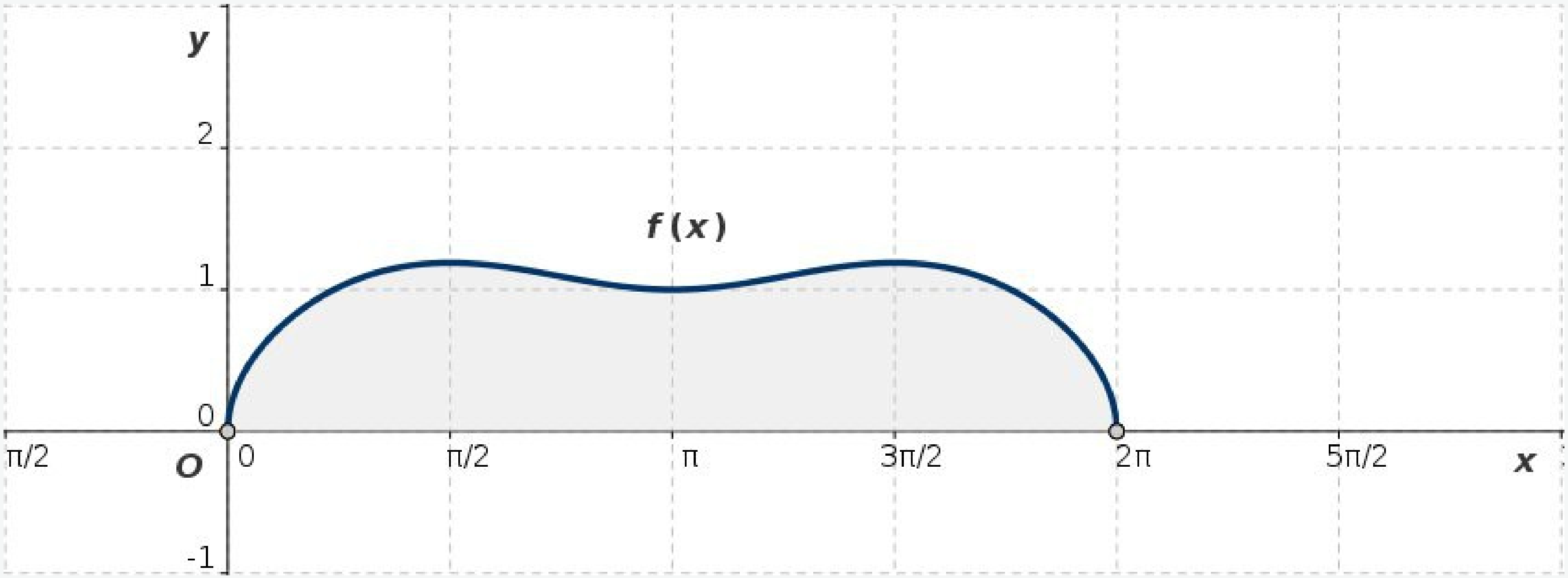

Abb. 18-1a: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{2}\right)(2 + \cos x)}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)(2 + \cos x)\right) dx = \frac{20}{3}\pi \ \text{(VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \frac{3}{20} \int_0^{2\pi} x \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)(2 + \cos x)\right) dx = \pi \simeq 3.14 \ \text{(LE)}$$

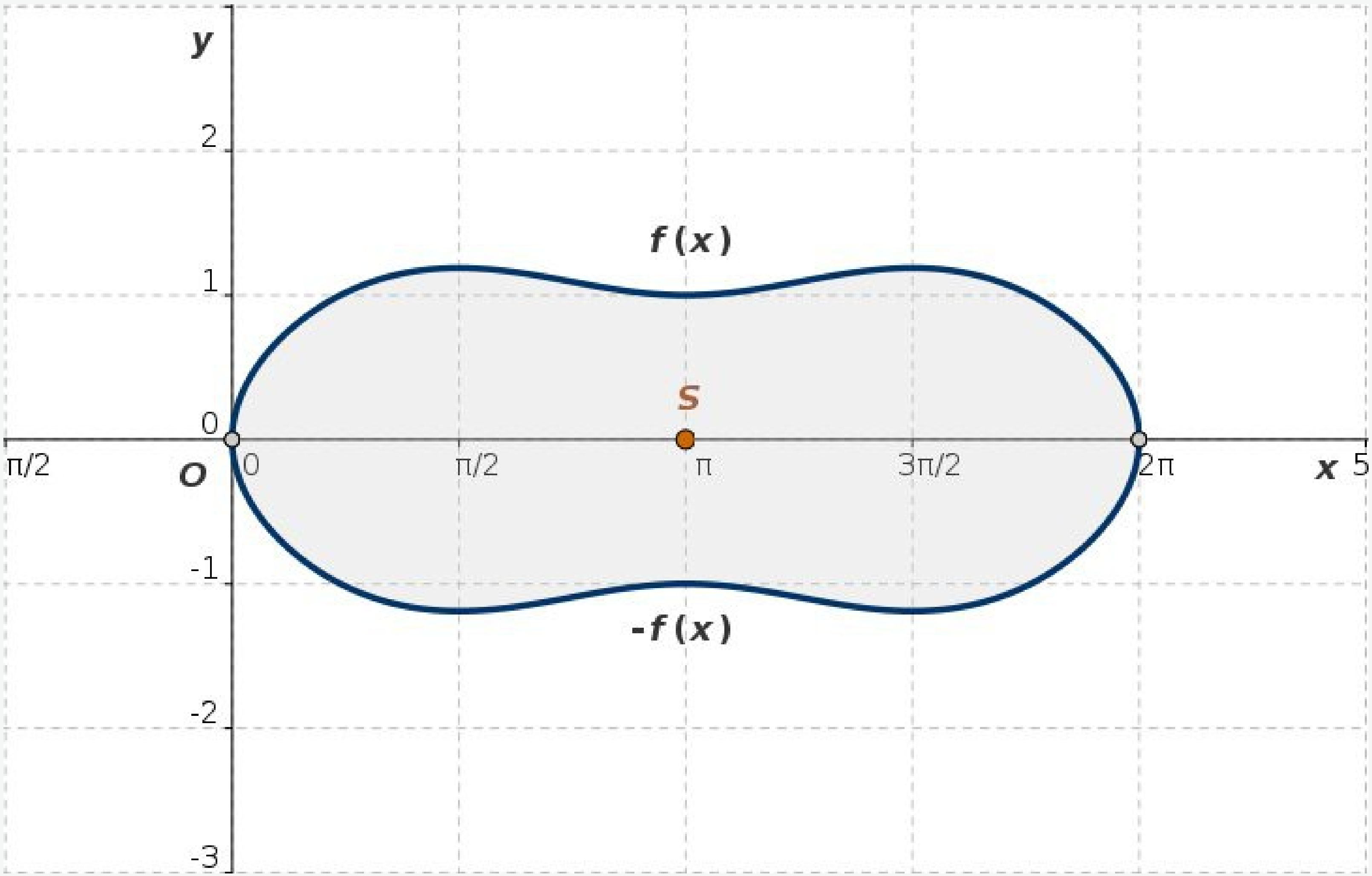

Abb. 18-1b: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt S = (π, 0, 0)

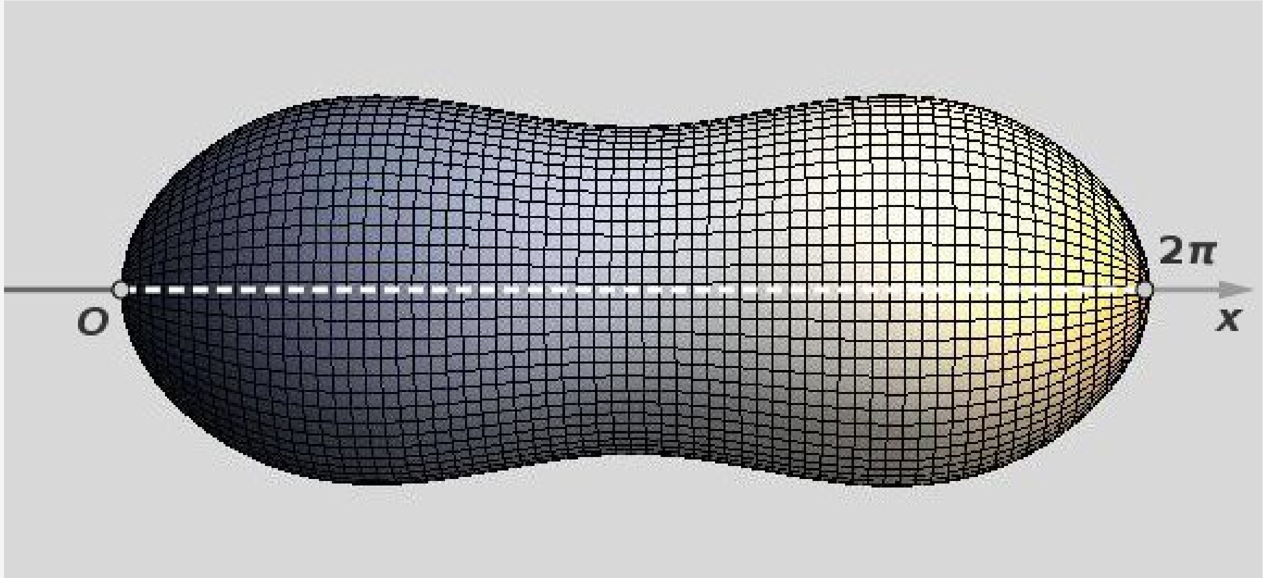

Abb. 18-1c: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Lösung 18-2

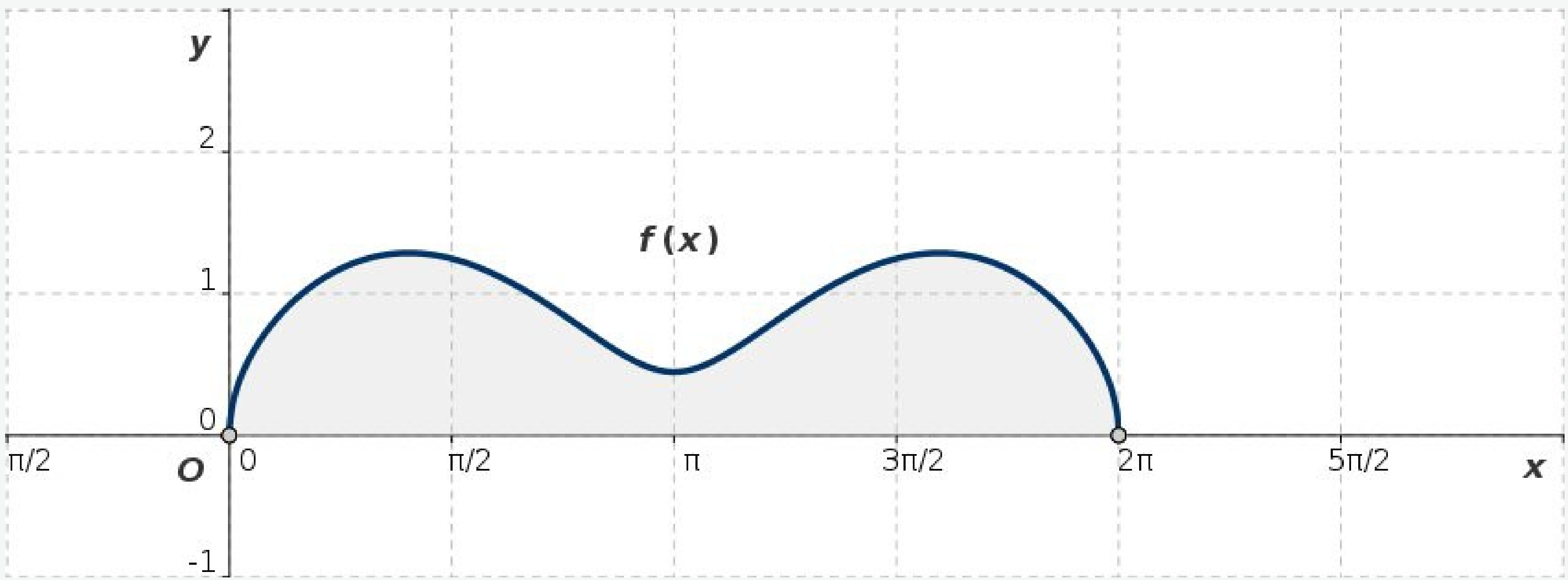

Abb. 18-2a: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0, 2π]

$$f(x) = \sqrt{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)(1.1 + \cos x)}\,, \qquad x \in [0,\ 2\pi]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\, dx = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)(1.1 + \cos x)\right) dx =$$

$$= \frac{8}{3}\pi\ (3\,b - 1) \simeq 19.27\ (\mathrm{VE})$$

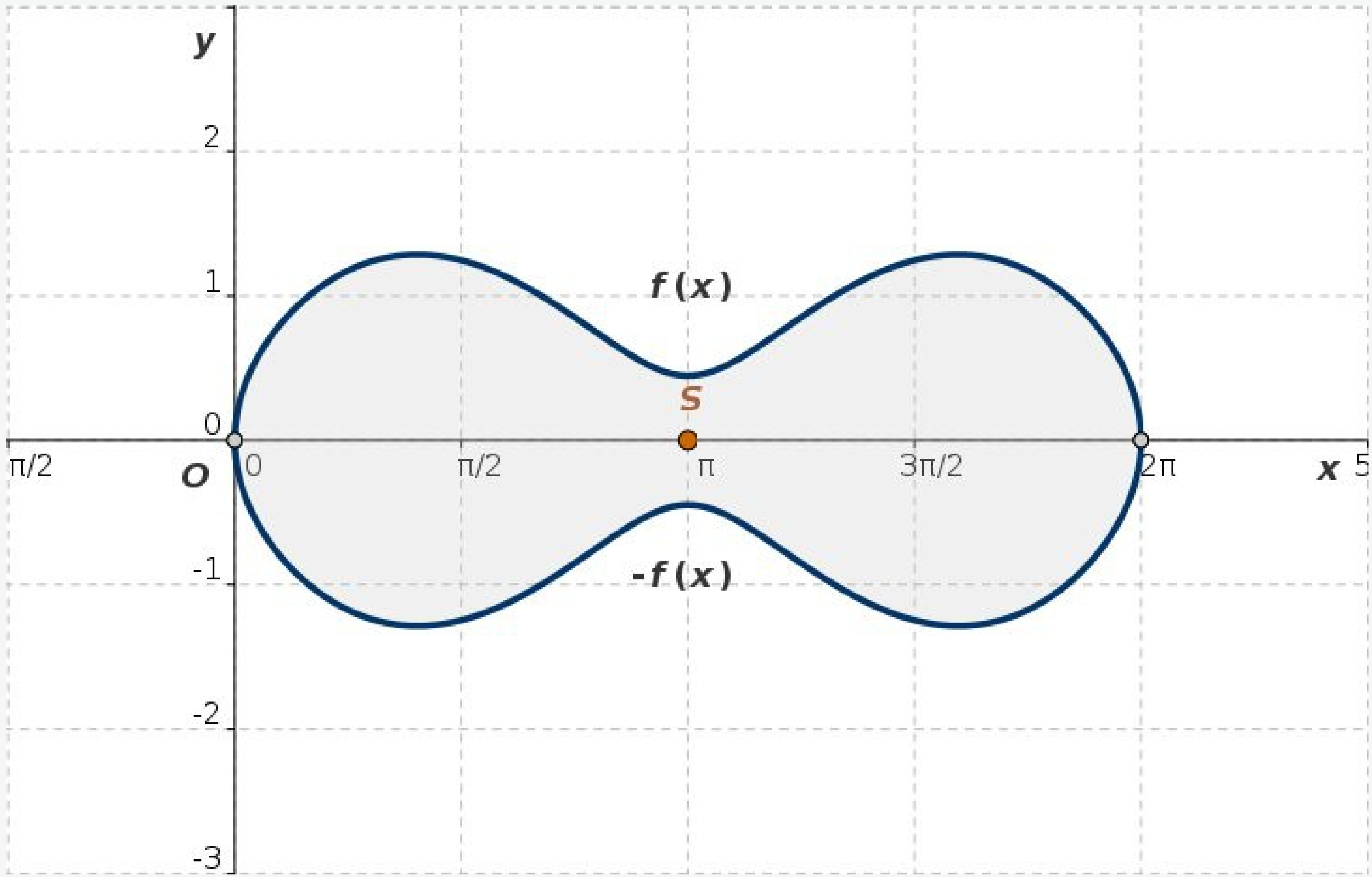

Abb. 18-2b: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt S = (π, 0, 0)

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \pi \simeq 3.14 \ (\text{LE})$$

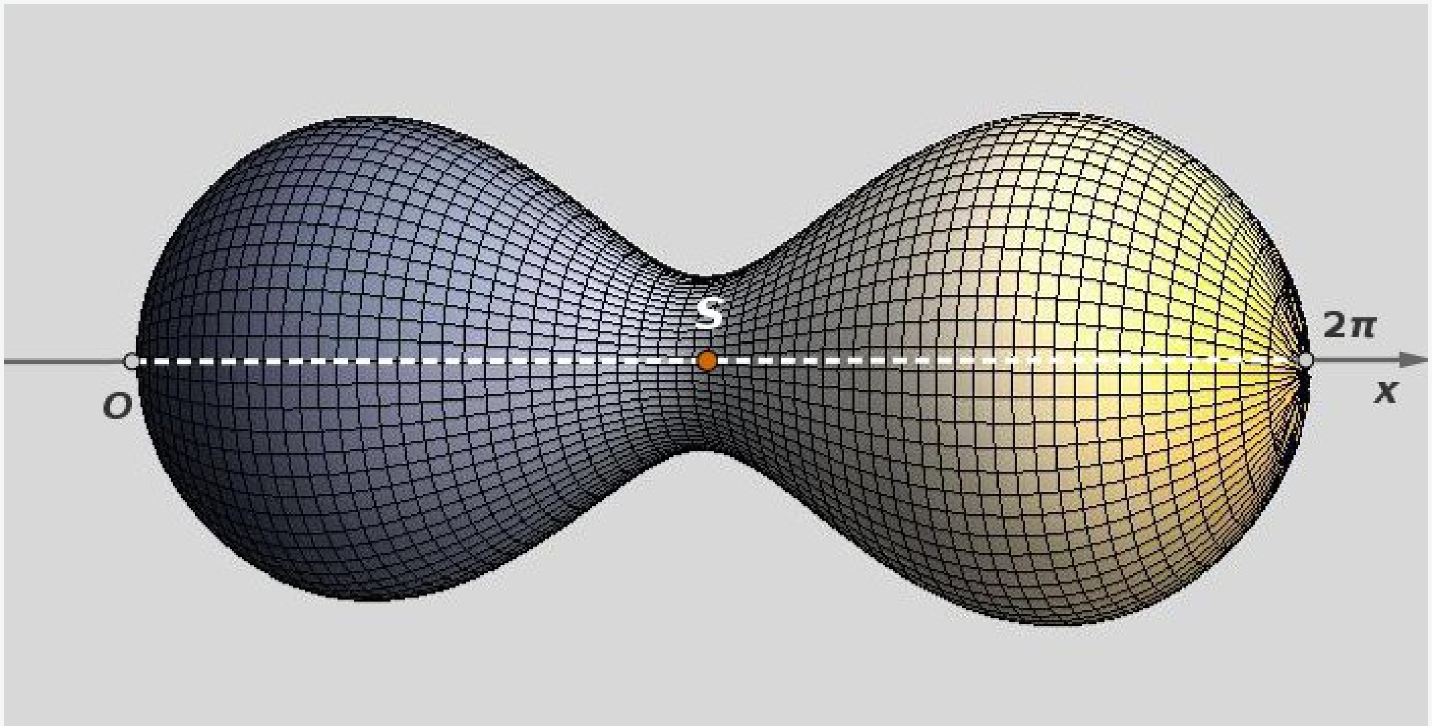

Abb. 18-2c: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

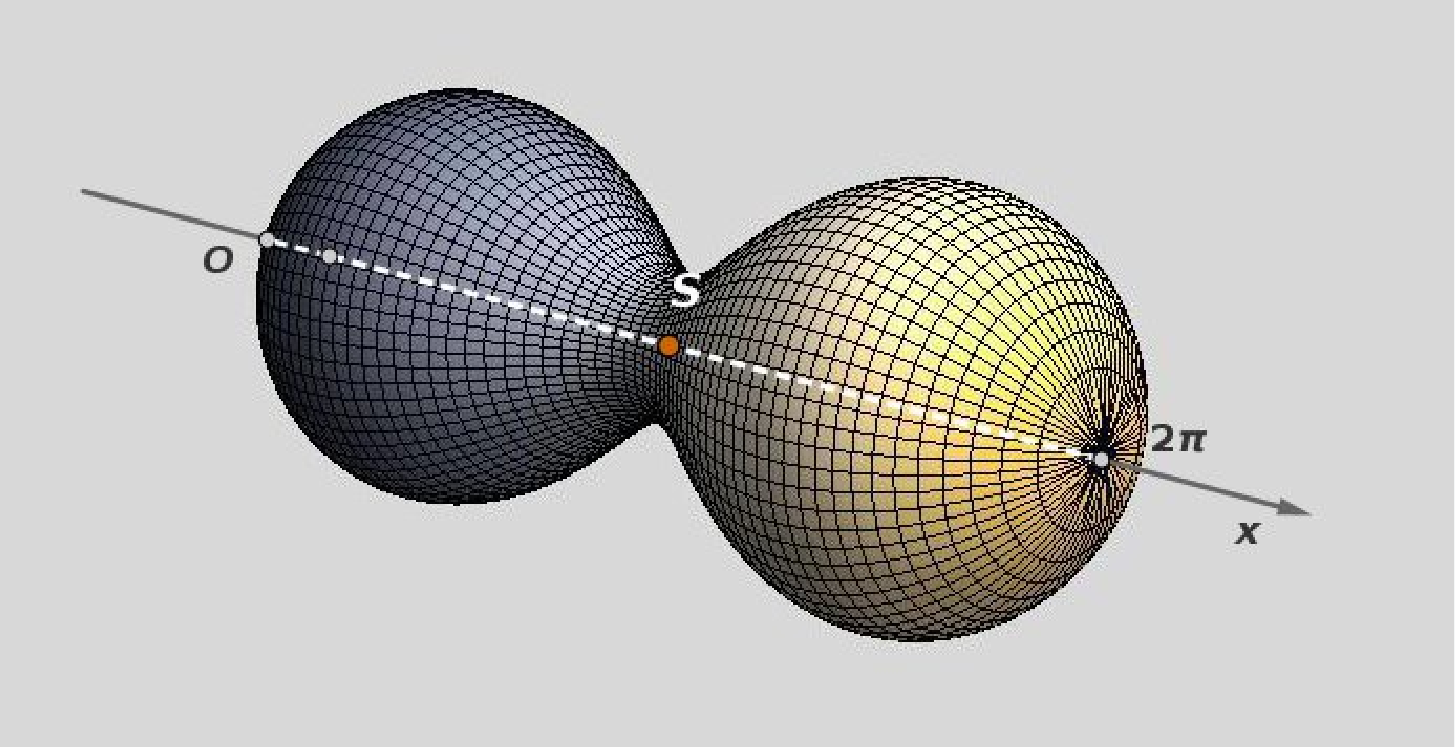

Abb. 18-2d: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

Abb. 19-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 2 + \sin x$ im Intervall $[0, 2\pi]$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} (2 + \sin x)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} (4 + 4 \sin x + \sin^2 x)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{9}{2} \int_0^{2\pi} dx + 4 \int_0^{2\pi} \sin x\, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x)\, dx \right] = 9\pi^2$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} x\,(2 + \sin x)^2\; dx =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} x\,(4 + 4 \sin x + \sin^2 x)\; dx =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \left[4 \int_0^{2\pi} x\, dx + 4 \int_0^{2\pi} x \sin x\, dx + \int_0^{2\pi} x \sin^2 x\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \left[2\, x^2 + 4\,(\sin x - x \cos x) + \frac{x^2}{4} - \frac{\cos^2 x}{4} - \frac{x}{2} \sin x\; \cos x \right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{8}{9} + \pi \simeq 2.25\,(\mathrm{LE})$$

$$\vec{r}_S = (\,2.25,\; 0,\; 0\,)$$

$$\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x$$

$$\int x \sin^2 x\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{x}{2} \sin x \cos x$$

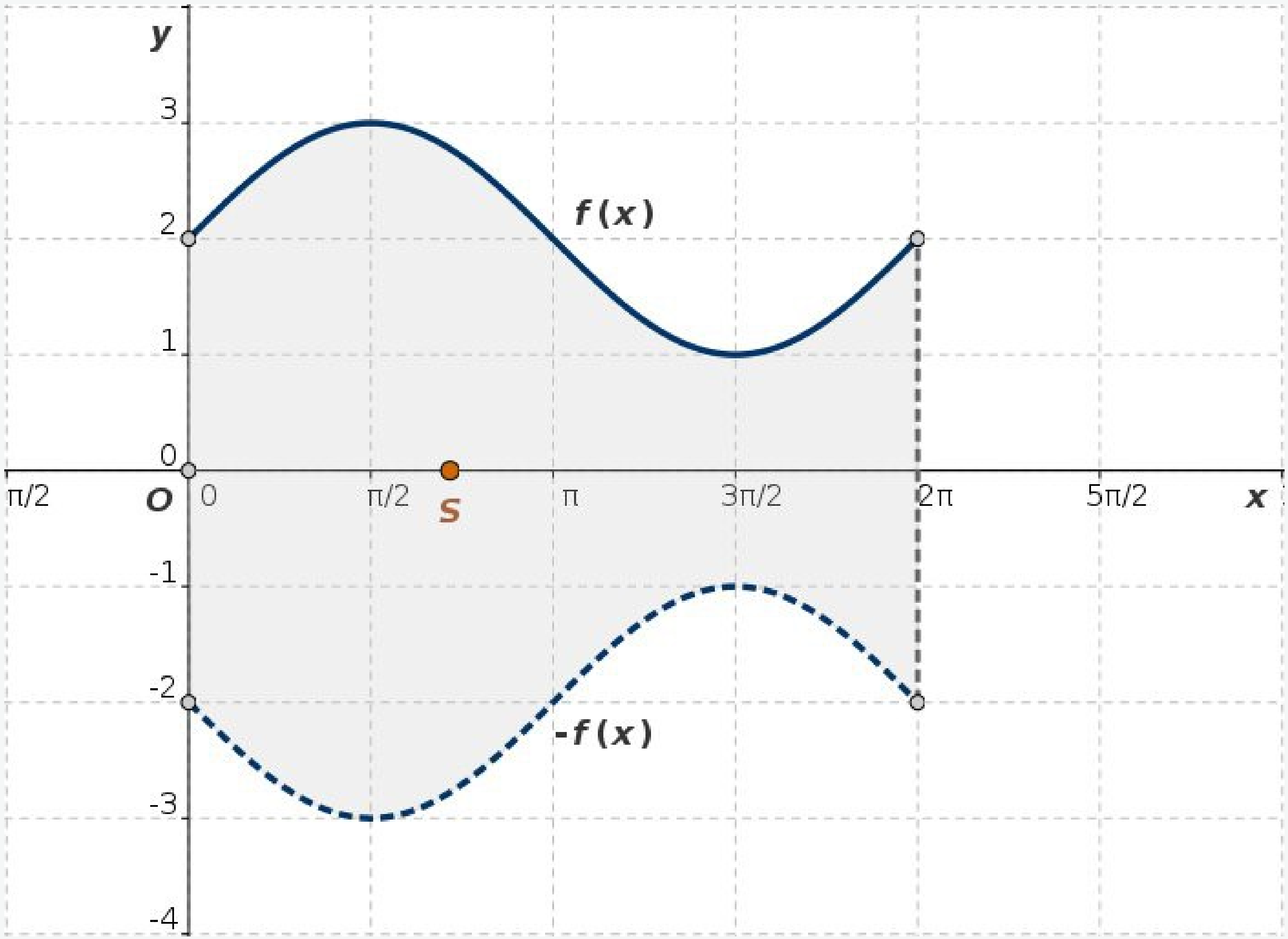

Abb. 19-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt S = (2.25, 0, 0)

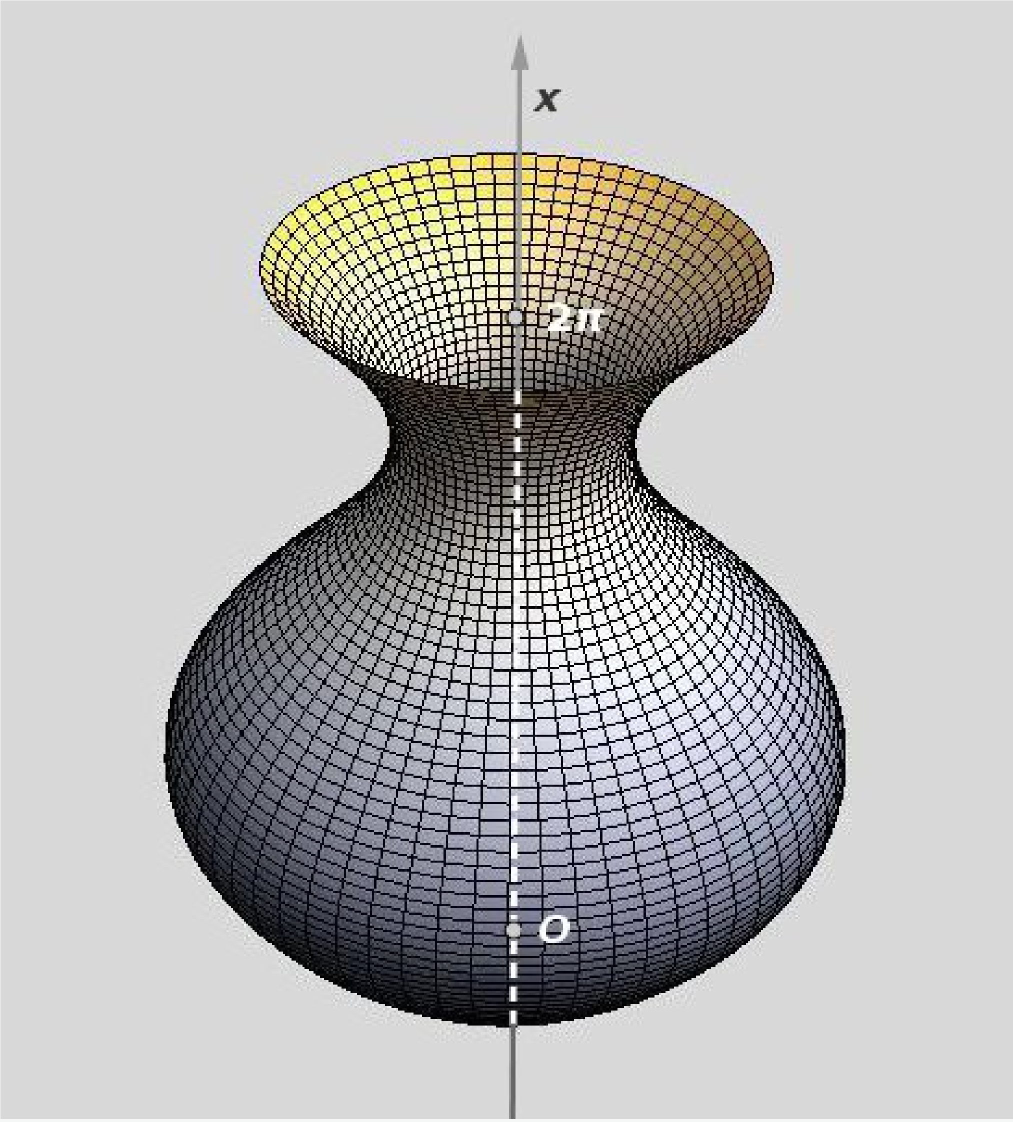

Abb. 19-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 2 + \sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

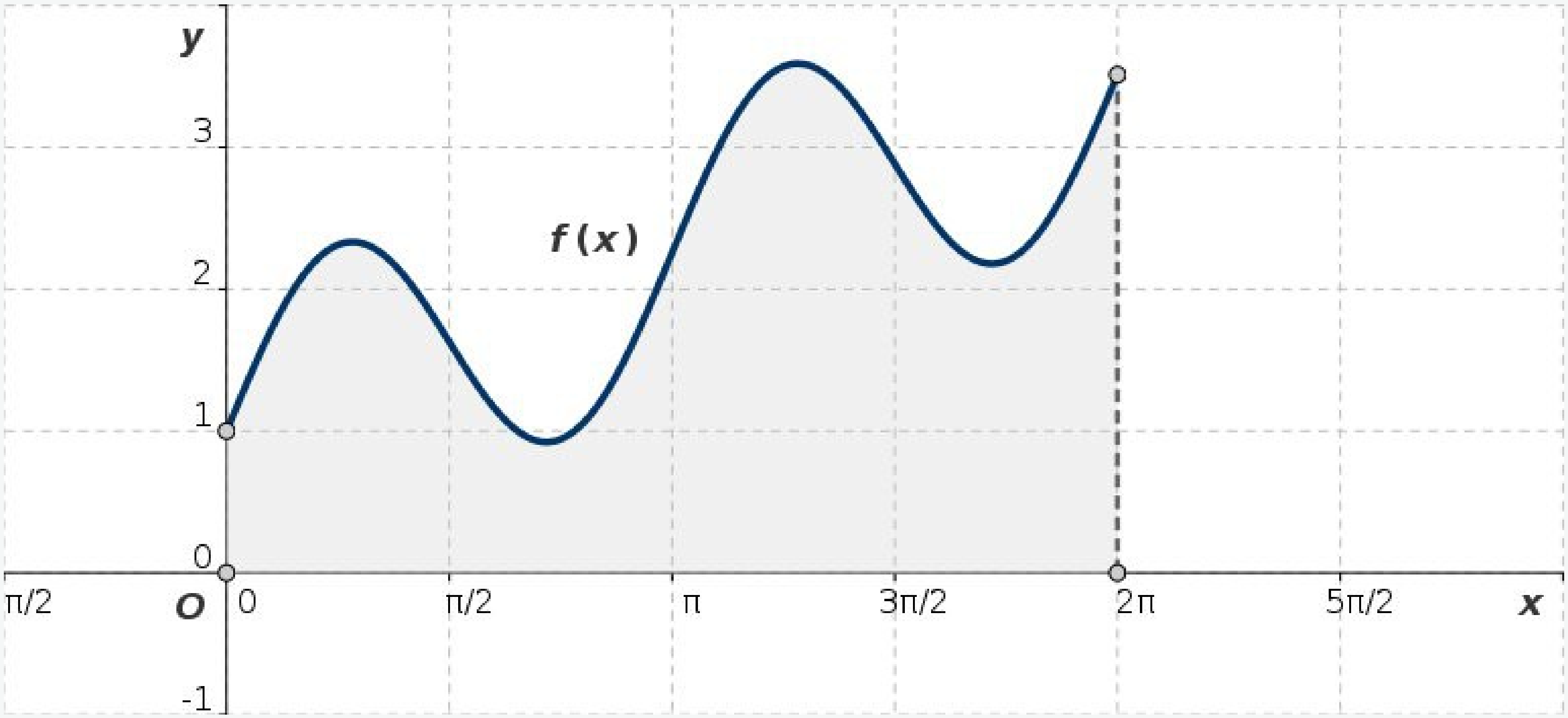

Abb. 20-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ *im Intervall* $[0, 2\pi]$

$$f(x) = 0.4\,x + \sin(2\,x) + 1$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} (0.4\,x + \sin(2\,x) + 1)^2 \, dx \simeq 35.93$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2 \, dx = \frac{\pi}{35.93} \int_0^{2\pi} x\,(0.4\,x + \sin(2\,x) + 1)^2 \, dx \simeq 3.14$$

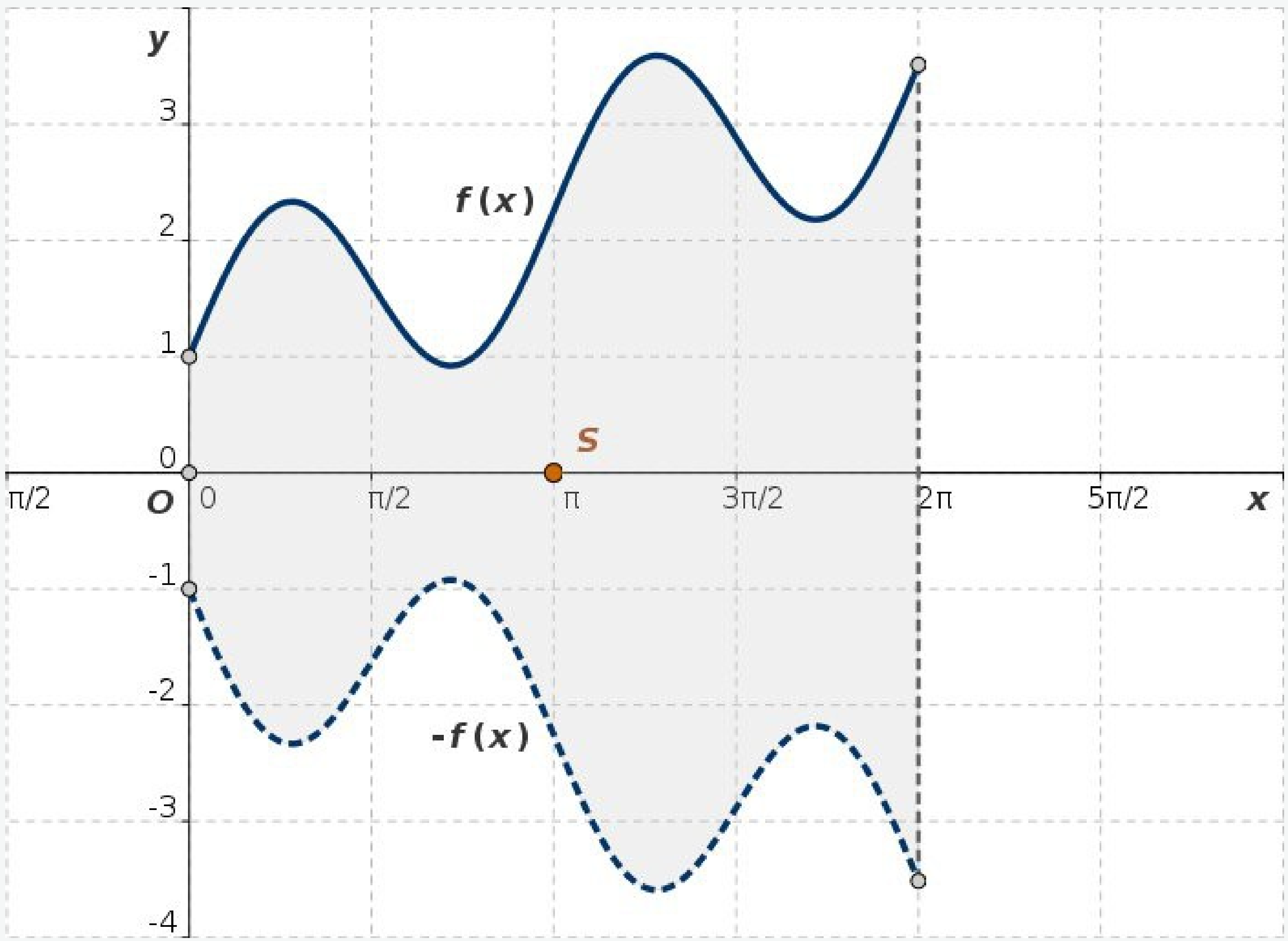

Abb. 20-2: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt S = (3.14, 0 ,0)

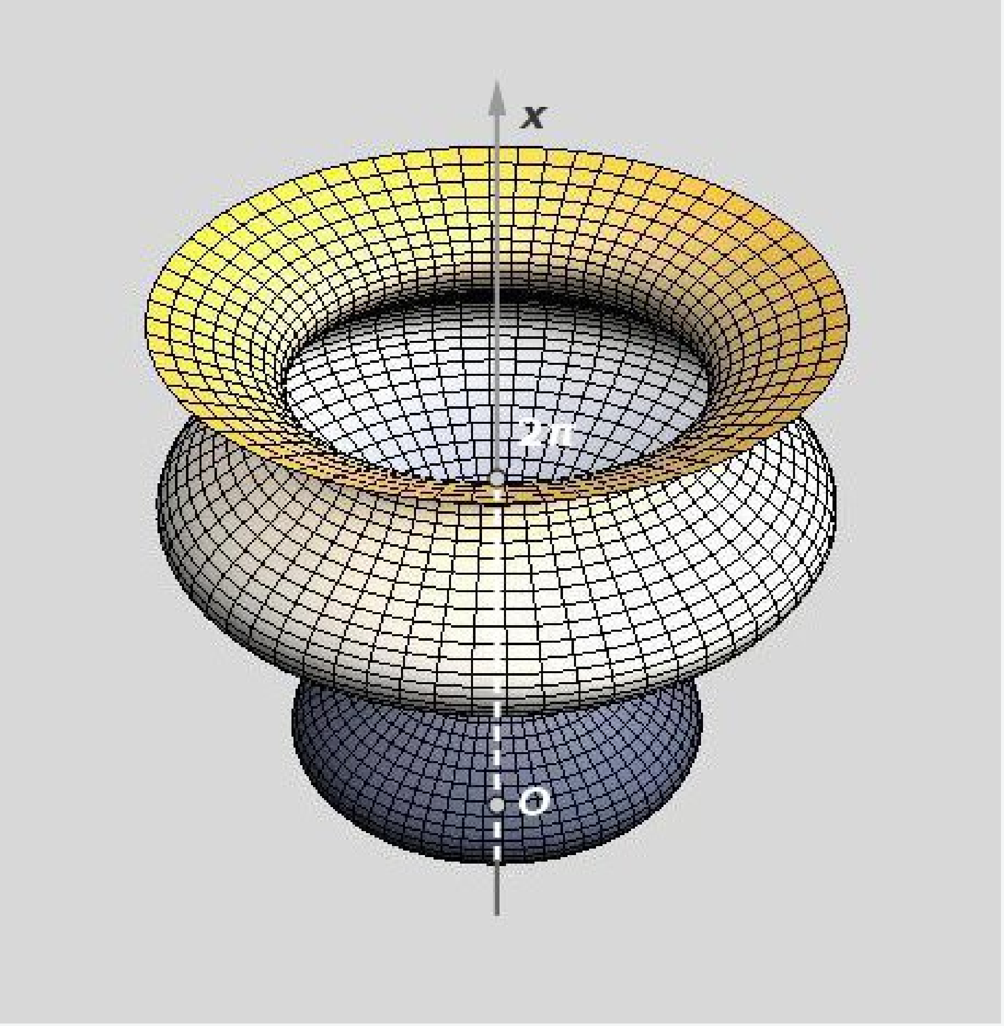

Abb. 20-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse erzeugter Körper

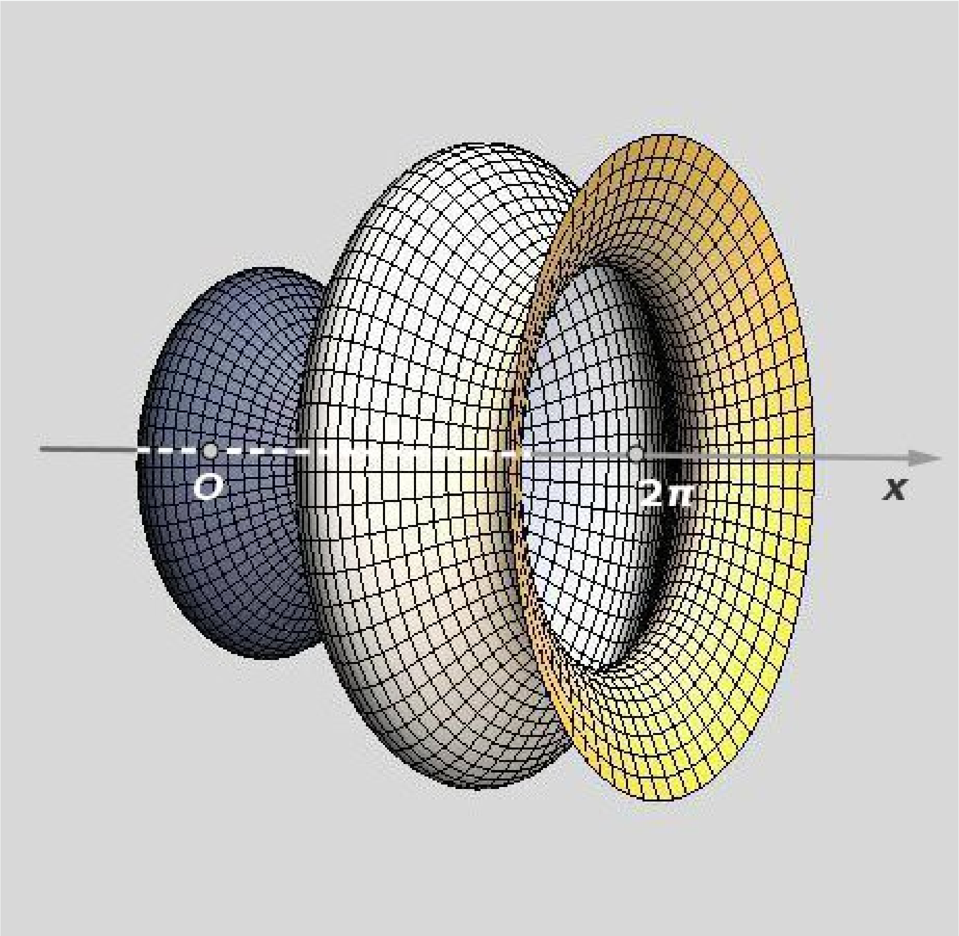

Abb. 20-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse erzeugter Körper