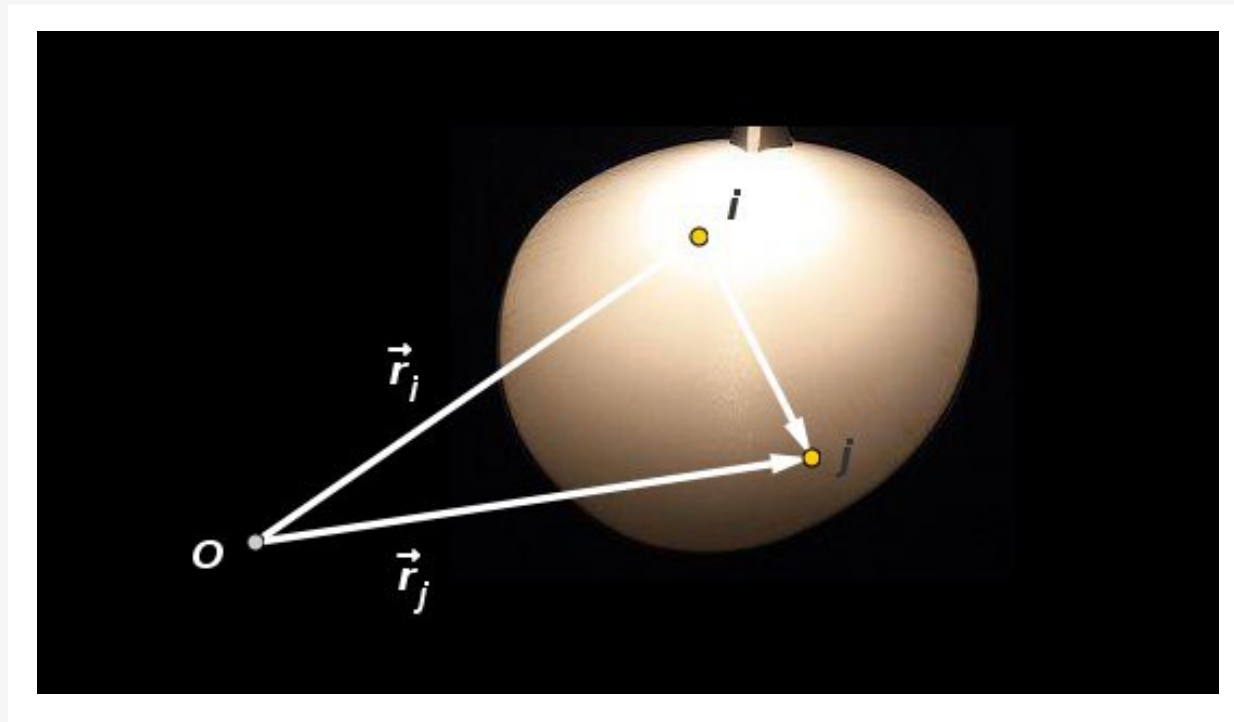


<http://www.ewangilmour.com/wp-content/uploads/2010/05/forkknifespoonegg.jpg>

Schwerpunkt

Der starre Körper



<http://www.flickr.com/photos/inesca/3139536876/in/pool-streetlamps>

Abb. 1-1: Zur Definition eines starren Körpers

Unter einem starren Körper verstehen wir ein System von Massenpunkten, bei dem der Abstand zwischen zwei beliebigen Massenpunkten i und j des Körpers konstant bleibt

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = \text{const}$$

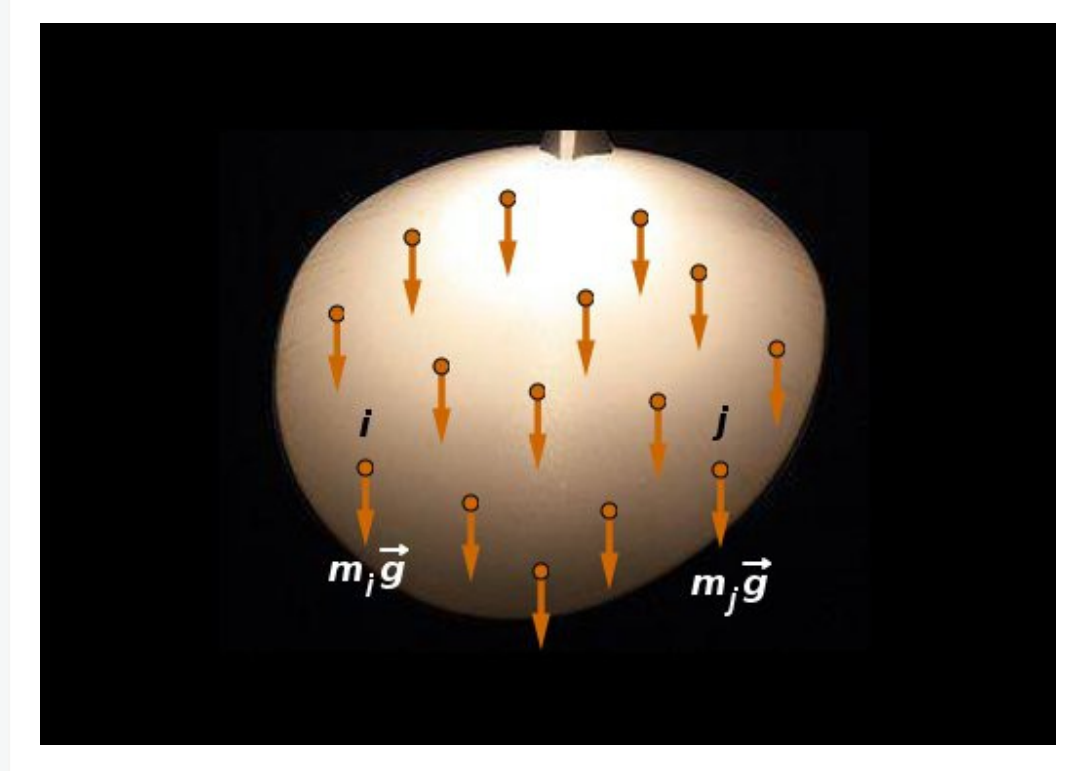


Abb. 1-2: Das Schwerfeld erzeugt in einem starren Körper ein System paralleler Kräfte

Ein starrer Körper der Masse m befindet sich in einem Schwerfeld. Wir nehmen an, dass die Schwerkraft nicht nur proportional zur Masse ist, sondern überall die gleiche Richtung hat. Die Schwerkraft, die auf jedes Massenelement wirkt, ist gleich der Masse eines Massenelements multipliziert mit der Fallbeschleunigung \mathbf{g} . Das bedeutet, dass das Kraftfeld in dem Körper ein System paralleler Kräfte erzeugt.

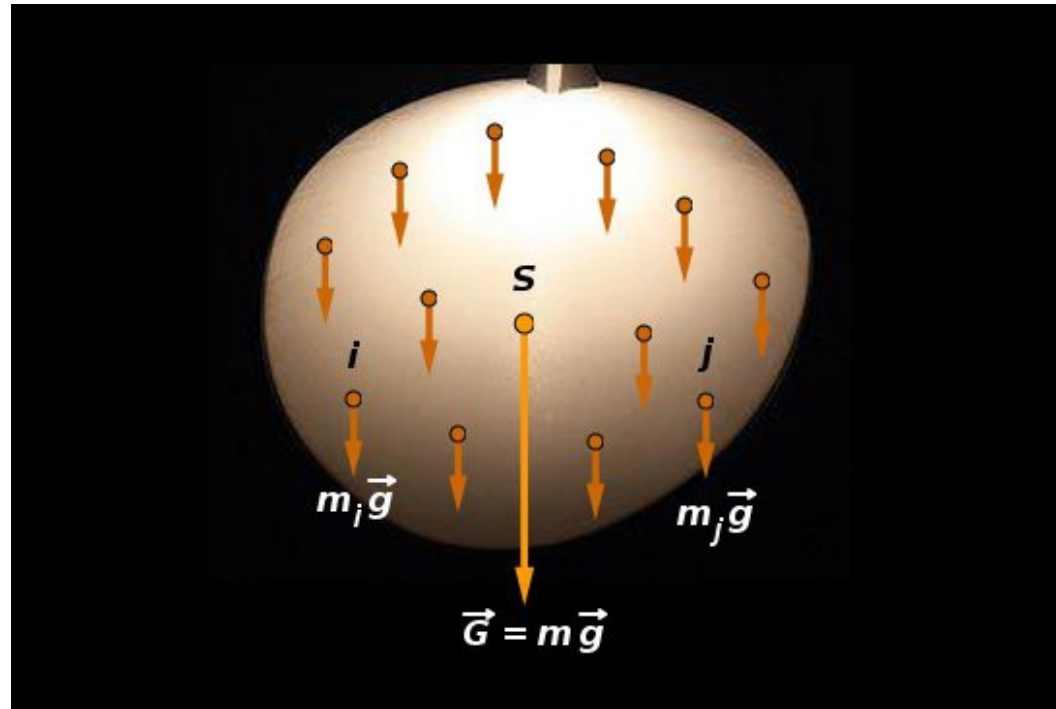


Abb. 1-3: Das Schwerkraftfeld erzeugt in einem starren Körper ein System paralleler Kräfte

Der Schwerpunkt ist der Punkt, in dem wir uns die gesamte Gewichtskraft des Körpers vereinigt denken können. An diesem Punkt muss eine entgegengesetzt zur Fallbeschleunigung wirkende Kraft angreifen, um die gesamte Gewichtskraft des Körpers zu kompensieren. Diese Kraft bewirkt keine Rotation.

$\vec{G} = m\vec{g}$ – die Gewichtskraft des Körpers, m – die Masse des Körpers,
 \vec{g} – die Fallbeschleunigung

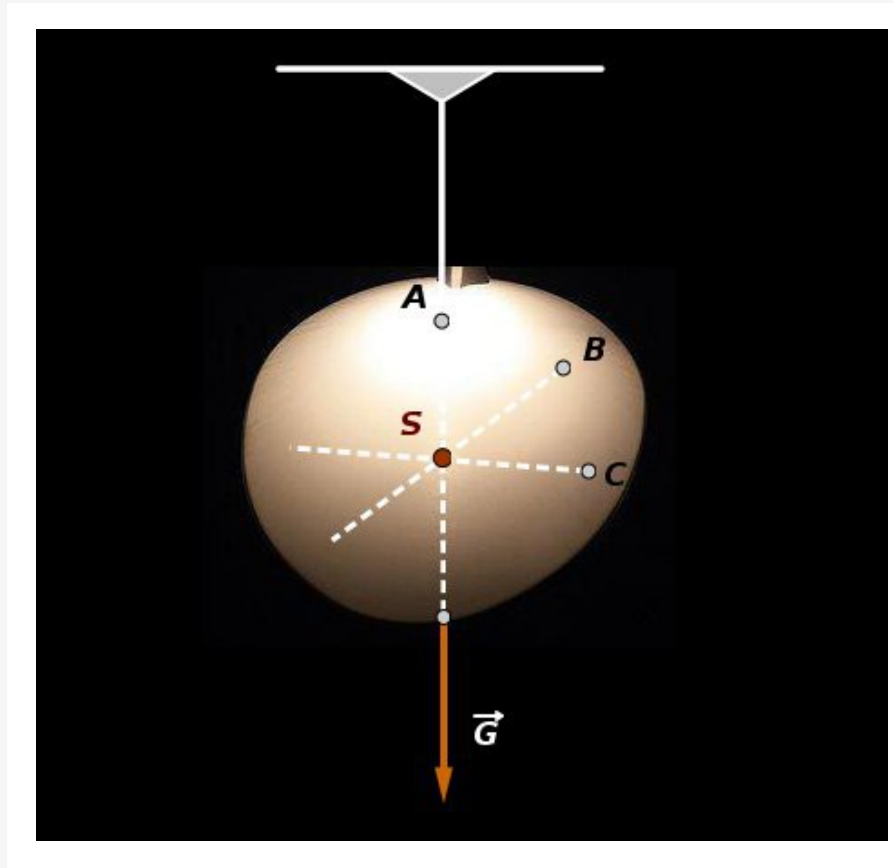


Abb. 1-4: Zur Ermittlung des Schwerpunktes eines starren Körpers. Der Schnittpunkt zweier beliebiger Schwerpunktlinien ist der Schwerpunkt

Die experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes:

Der Körper wird nacheinander an zwei verschiedenen Punkten z.B. A und B seiner Oberfläche an einem Faden aufgehängt. Die resultierende Gewichtskraft G und die Fadenspannung stehen im Gleichgewicht miteinander. Die lotrechte Verlängerung des Fadens heißt Schwerlinie. Der Schnittpunkt zweier beliebiger Schwerlinien ist der Schwerpunkt.

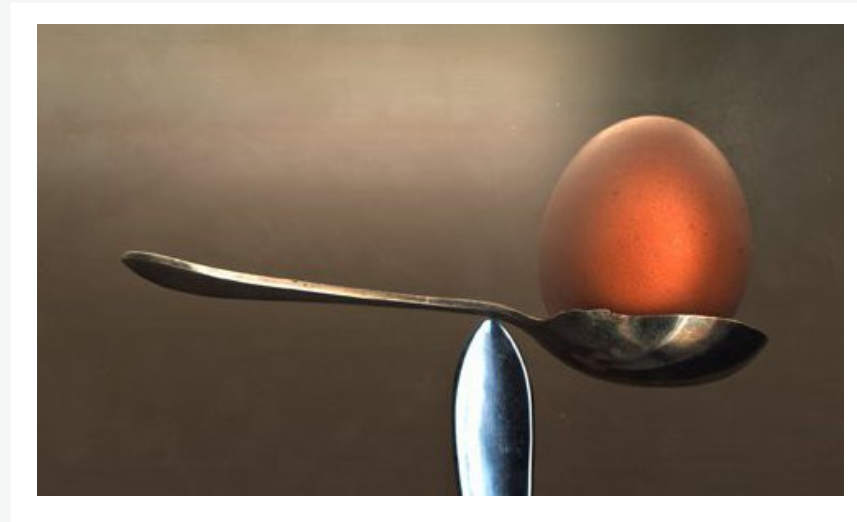


Abb. 1-4: Zum Begriff des Gleichgewichts eines starren Körpers

Gleichgewichtsbedingungen:

Ein starrer Körper ist im statischen Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm angreifenden äußeren Kräfte und Drehmomente Null ist

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$$

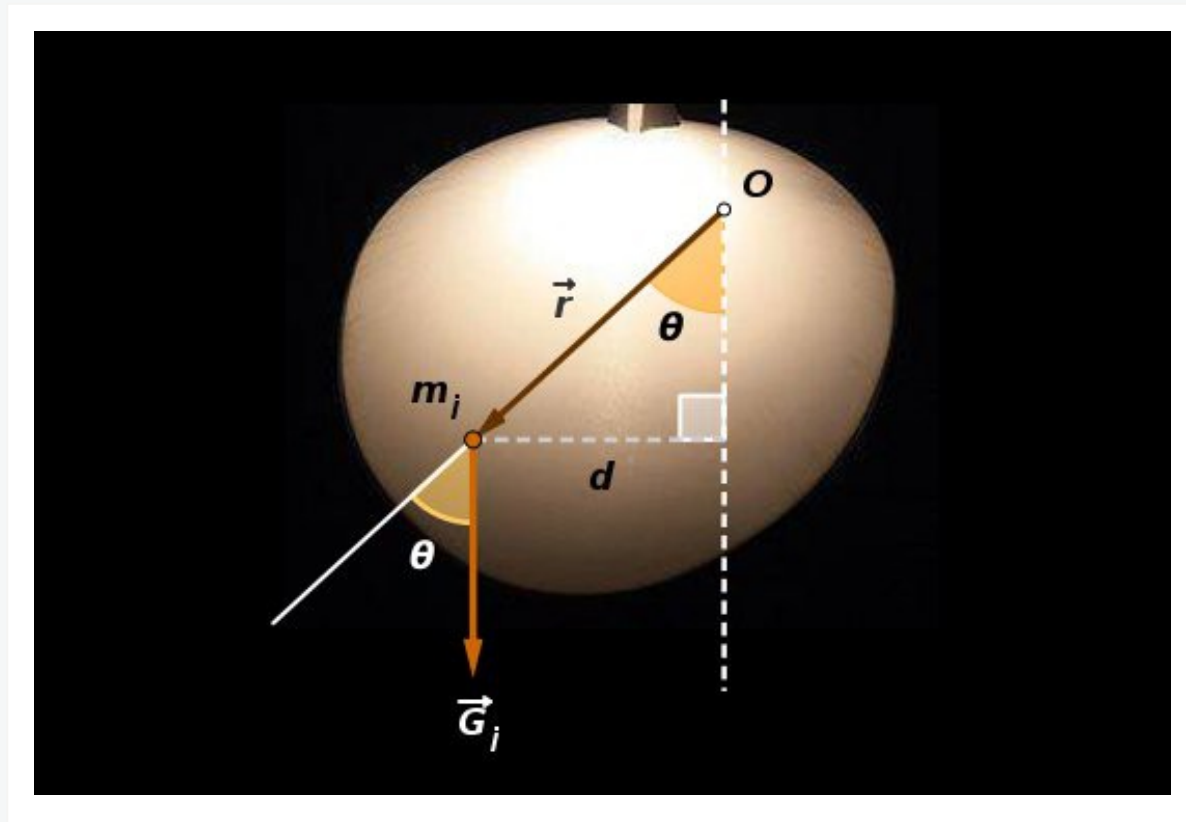


Abb. 1-5: Die Kraft \vec{G}_i erzeugt bezüglich des Drehpunktes O ein Drehmoment \vec{M}

Ein starrer Körper ist um einen Punkt O drehbar gelagert. Bei nicht verschwindendem Abstand d erzeugt die Kraft \vec{G} ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}_i, \quad |\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{G}_i| \cdot \sin \theta = G_i \cdot d$$

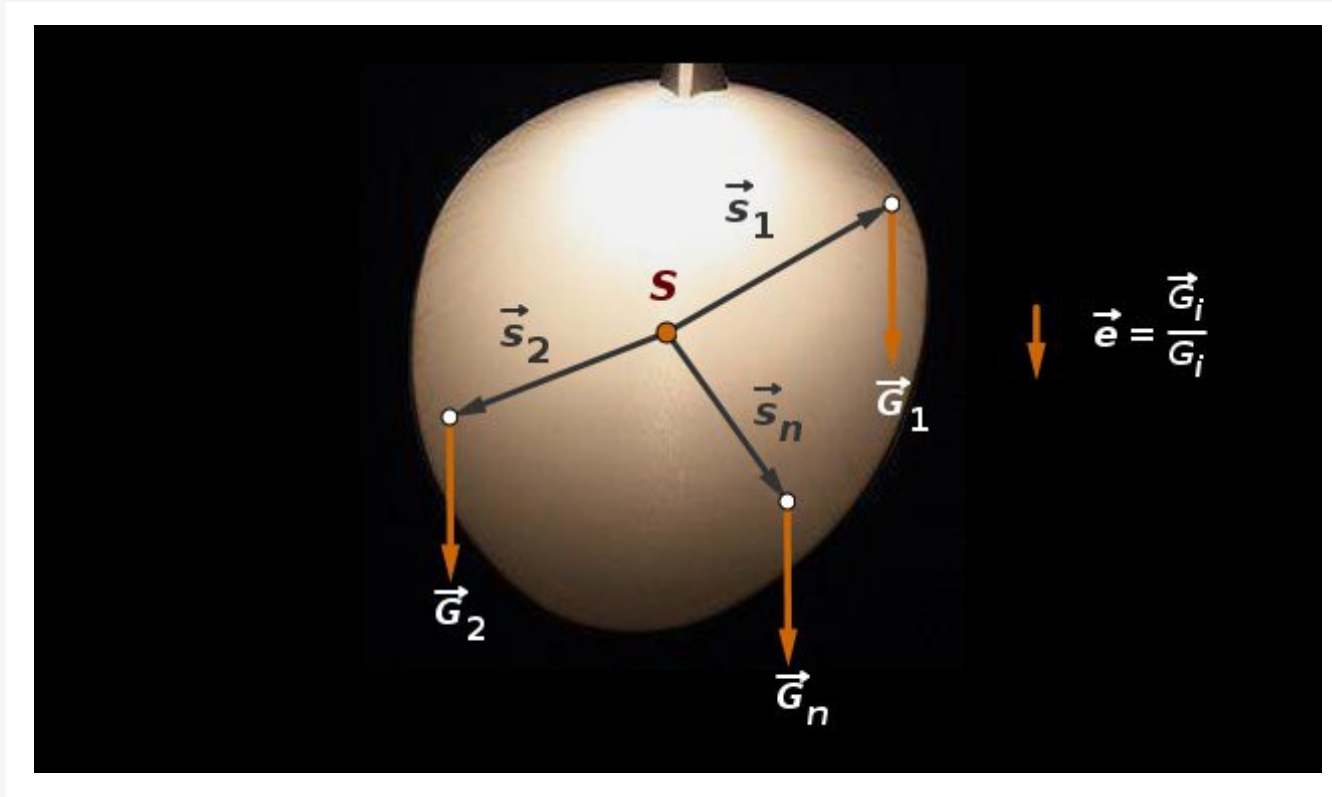


Abb. 2-1: Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines starren Körpers

Wir betrachten die Gruppe paralleler Kräfte: $\vec{G}_i = G_i \vec{e}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Befindet sich der Körper im Gleichgewicht, ist das resultierende Drehmoment gleich Null

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{(S)} = \sum_{i=1}^n \vec{s}_i \times \vec{G}_i = \vec{s}_1 \times \vec{G}_1 + \vec{s}_2 \times \vec{G}_2 + \dots + \vec{s}_n \times \vec{G}_n = \vec{0}$$

Schwerpunkt eines Körpers

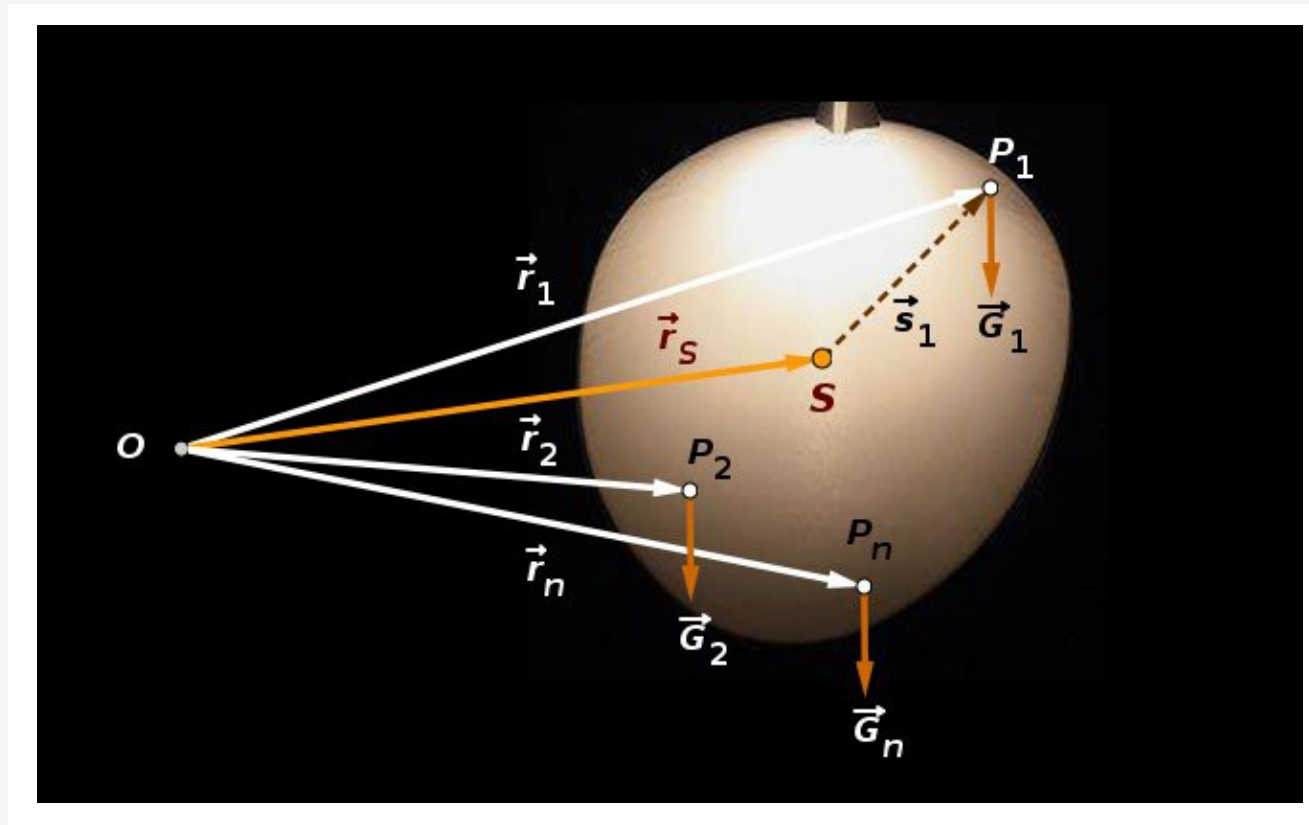


Abb. 2-2: Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines starren Körpers bezüglich beliebigen Punktes O

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{(S)} = \sum_{i=1}^n \vec{s}_i \times G_i \vec{e}, \quad \vec{r}_i = \vec{r}_S + \vec{s}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_S$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{(S)} = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_S)}_{\vec{s}_i} \times G_i \vec{e} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i - \vec{r}_S \sum_{i=1}^n G_i \right)}_{\vec{a}} \times \vec{e} = \vec{0}$$

Kräftemittelpunkt:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$$

$$\vec{G}_i = m_i \vec{g}, \quad G_i = m_i g$$

Massenmittelpunkt:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Der Massenmittelpunkt eines Körpers hängt nur von der Massengeometrie ab.

Wir bestimmen im Folgenden die Lage des Schwerpunktes oder des Massenmittelpunktes eines ebenen Systems, das aus drei Massenpunkten besteht.

Schwerpunkt eines Systems: Beispiel 1

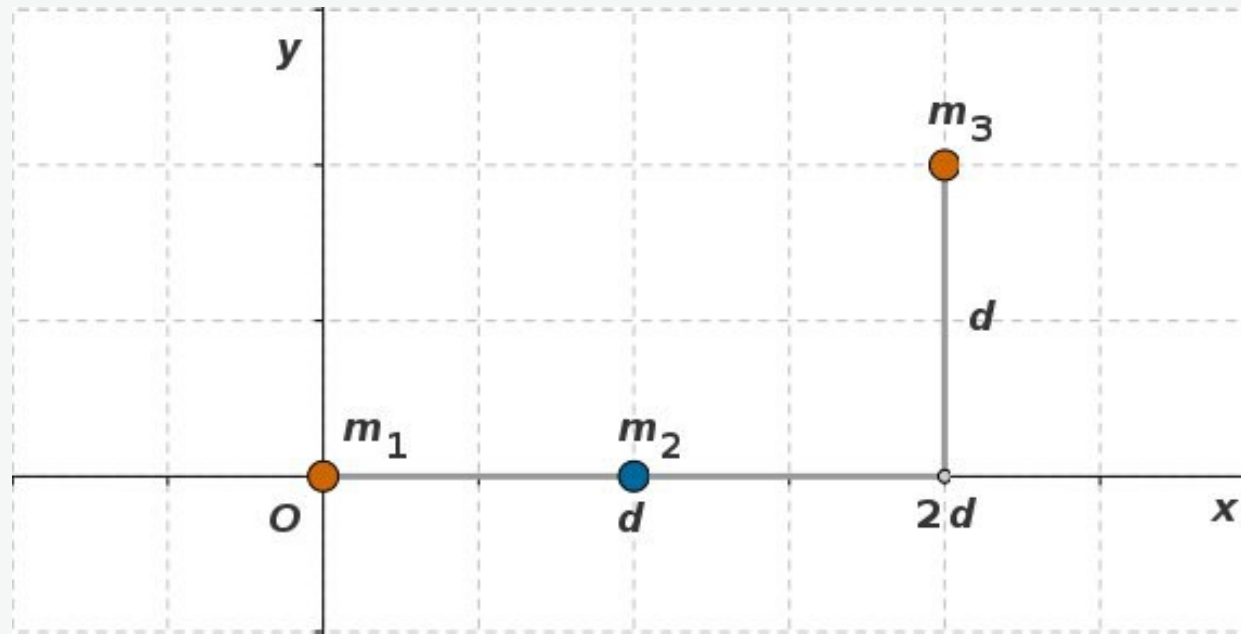


Abb. 3-1: Das System besteht aus drei Massenpunkten, die durch gewichtslose Stangen miteinander verbunden sind

Wir untersuchen die Lage des Massenmittelpunktes abhängig

a) von der Masse des zweiten Massenpunktes $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = a m$

b) von der Lage des zweiten Massenpunktes auf der x -Achse

$$m_1 = m_2 = m_3 = m, \quad m_2 : (b d, 0)$$

Sehr wichtig ist die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems, in dem die Rechnungen am einfachsten sind !

Schwerpunkt eines Systems: Beispiel 1

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_S = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$m_1 : (0, 0), \quad m_2 : (d, 0), \quad m_3 : (2d, d)$$

$$m_1 = m_3 = m, \quad m_2 = am$$

$$x_S = \frac{m \cdot 0 + am \cdot d + m \cdot 2d}{2m + am} = \frac{(2 + a)md}{(2 + a)m} = d$$

$$y_S = \frac{m \cdot 0 + am \cdot 0 + m \cdot d}{2m + am} = \frac{d}{2 + a}$$

Schwerpunkt eines Systems: Beispiel 1a

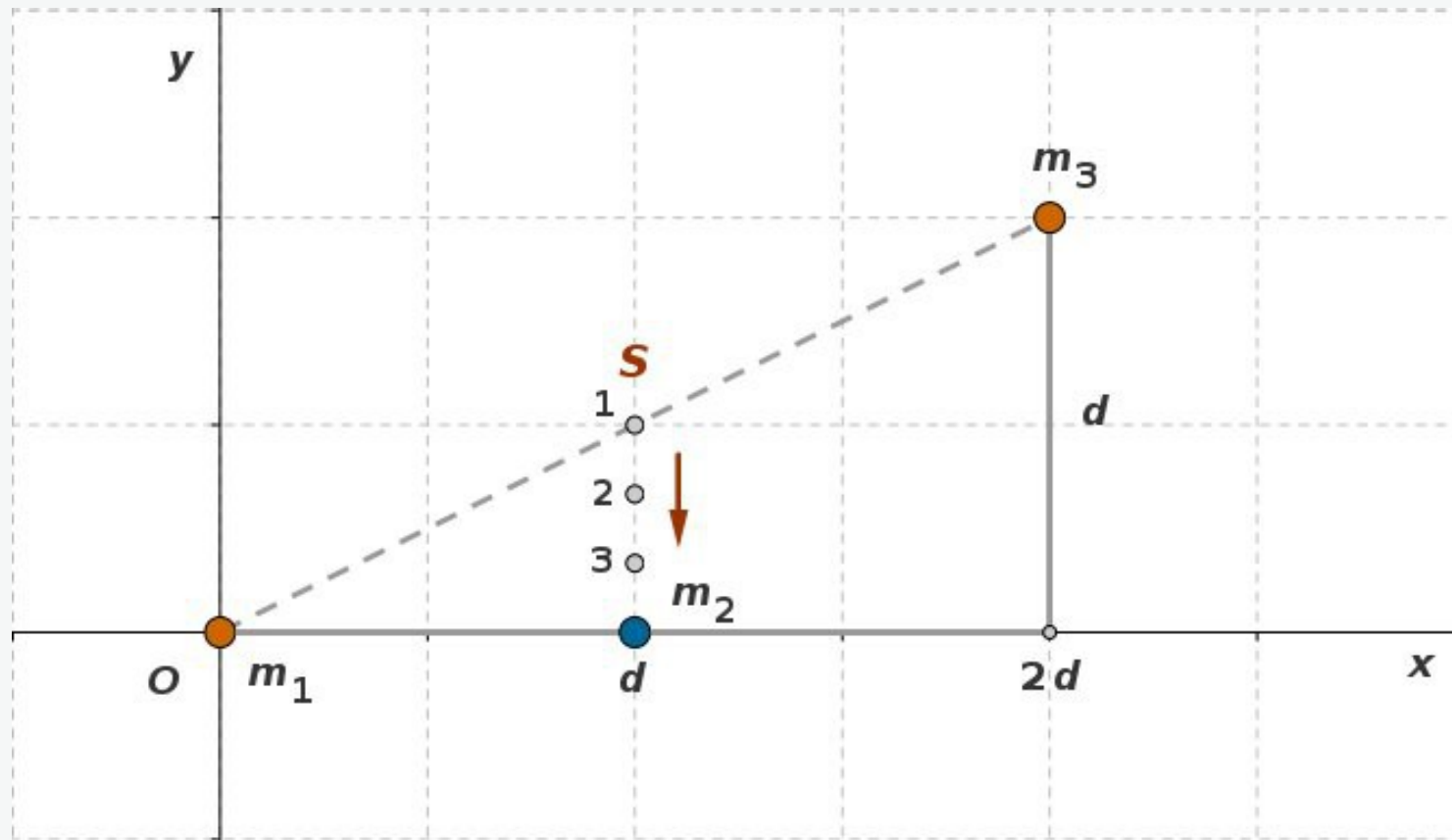


Abb. 3-2: Die Lage des Schwerpunktes in Abhängigkeit von der Masse des zweiten Massenelements

$$m_1 = m_3 = m, \quad m_2 = a m : \quad x_S = d, \quad y_S = \frac{d}{2 + a}$$

$$1) a = 0, \quad y_S = \frac{d}{2}, \quad 2) a = 1, \quad y_S = \frac{d}{3}, \quad 3) a = 4, \quad y_S = \frac{d}{6}$$

Schwerpunkt eines Systems: Beispiel 1b

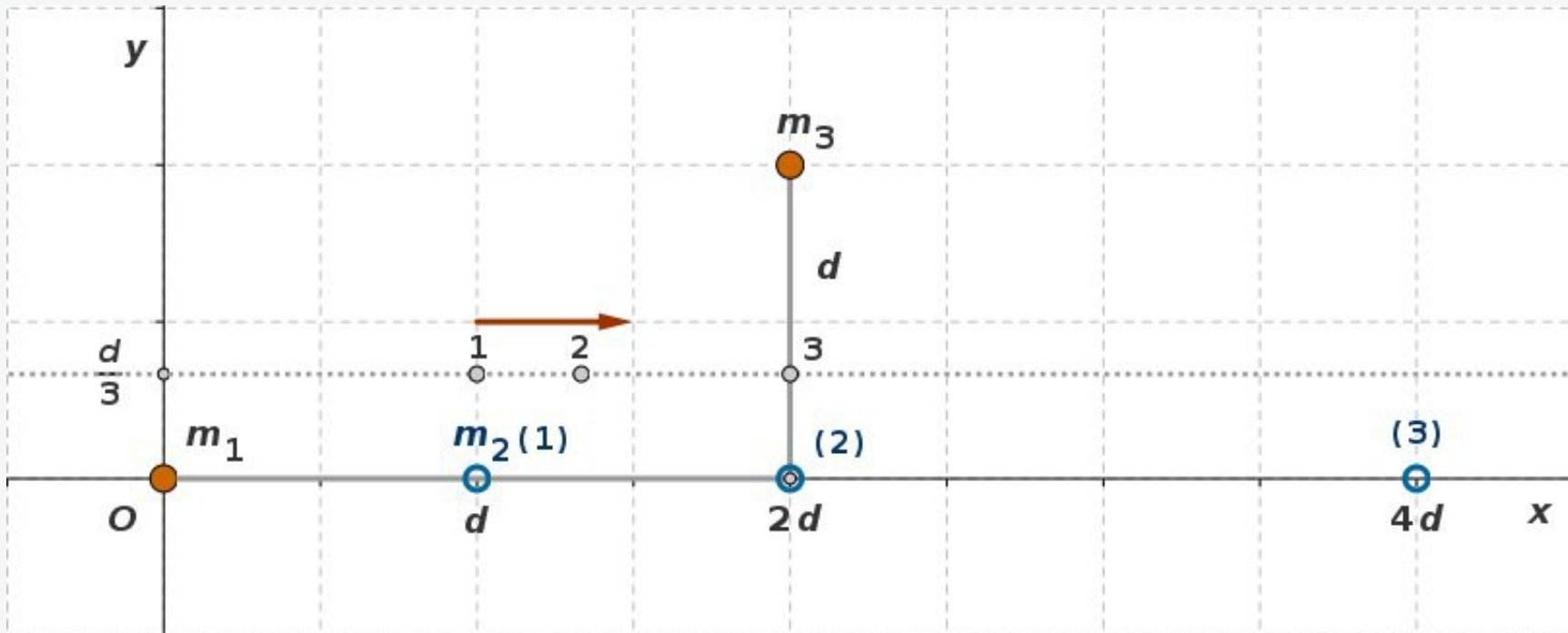


Abb. 3-3: Die Lage des Schwerpunktes in Abhängigkeit von der Lage des zweiten Massenelements

$$m_1 = m_2 = m_3 = m, \quad m_2 : (bd, 0) : \quad x_S = \frac{(2+b)d}{3}, \quad y_S = \frac{d}{3}$$

$$1) \ b = 1, \quad x_S = d, \quad 2) \ b = 2, \quad x_S = \frac{4d}{3}, \quad 3) \ b = 4, \quad x_S = 2d$$

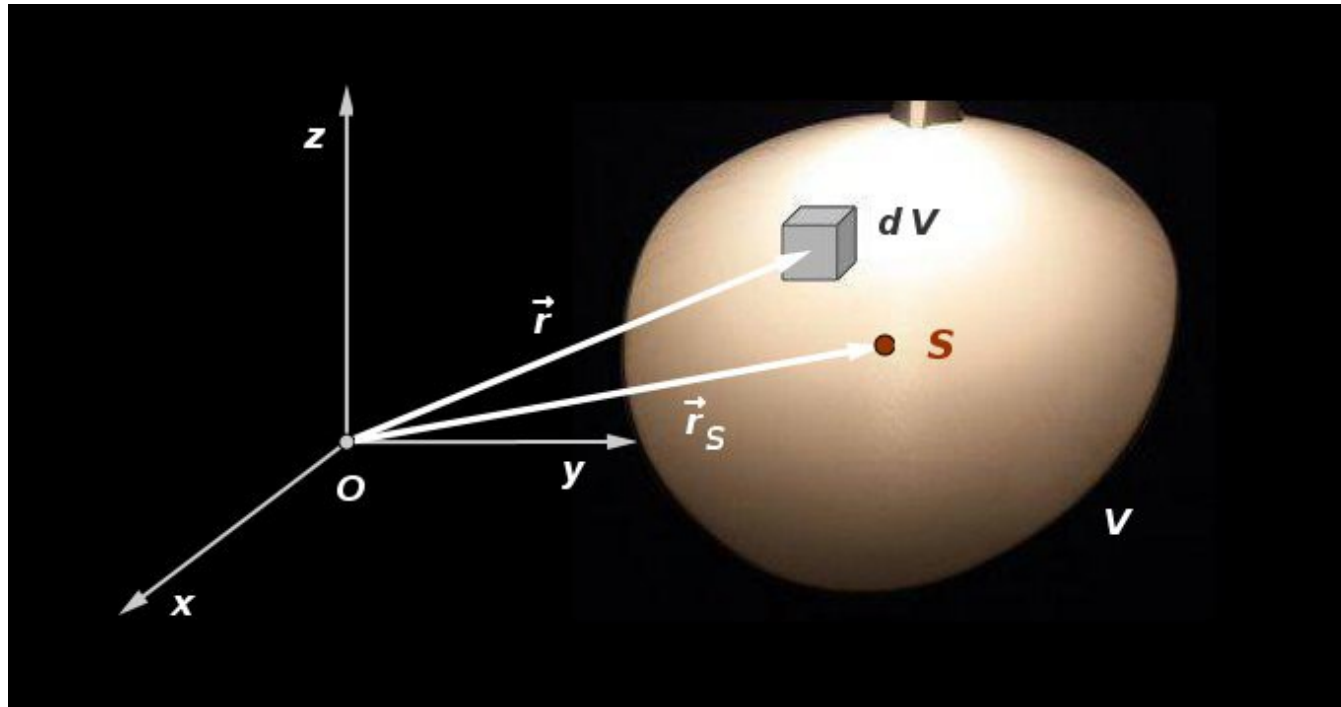


Abb. 4: Zur Schwerpunktberechnung eines räumlichen Körpers der Masse m

Schwerpunktkoordinaten eines Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \rightarrow (n \rightarrow \infty, \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}, m_i \rightarrow dm) \rightarrow \vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm$$

$$x_S = \frac{1}{m} \int_V x dm, \quad y_S = \frac{1}{m} \int_V y dm, \quad z_S = \frac{1}{m} \int_V z dm$$

Kontinuierliche Massenverteilung

Das Massenelement dm kann man auch durch das Produkt von der Dichte des Materials ρ und dem Volumenelement dV darstellen, d.h.

$$\rho = \rho(x, y, z), \quad dm = \rho dV, \quad m = \int \rho dV$$

$$\vec{r}_S = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}, \quad dV = dx dy dz$$

$$\rho = \text{const}, \quad m = \rho V, \quad \vec{r}_S = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$