



<http://www.fotocommunity.de/pc/cat/575/display/1246265>

Schwerpunkt homogener Rotationskörper: Beispiele

Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels: Beispiel 1

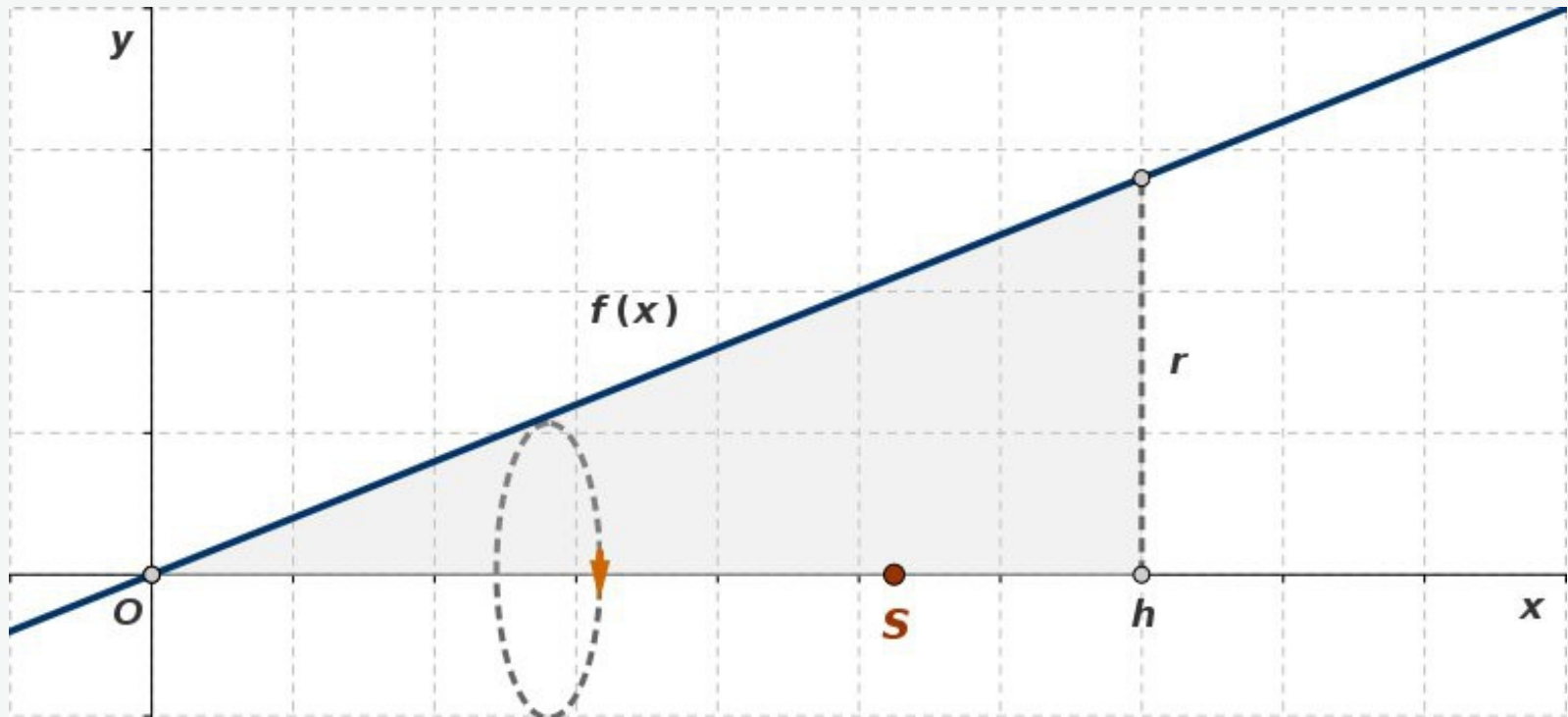


Abb. 7-1a: Geradenstück mit der Gleichung $f(x) = r/h x$, $0 \leq x \leq h$

Durch Rotation des Geradenstücks $y = r/h x$ um die x -Achse entsteht ein Kreiskegel mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h

$$V_x = \pi \cdot \int_0^h y^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^h x y^2 dx = \frac{3}{r^2 h} \left(\frac{r}{h} \right)^2 \int_0^h x^3 dx = \frac{3h}{4}, \quad y_S = z_S = 0 \quad (\text{LE})$$

Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels: Beispiel 1

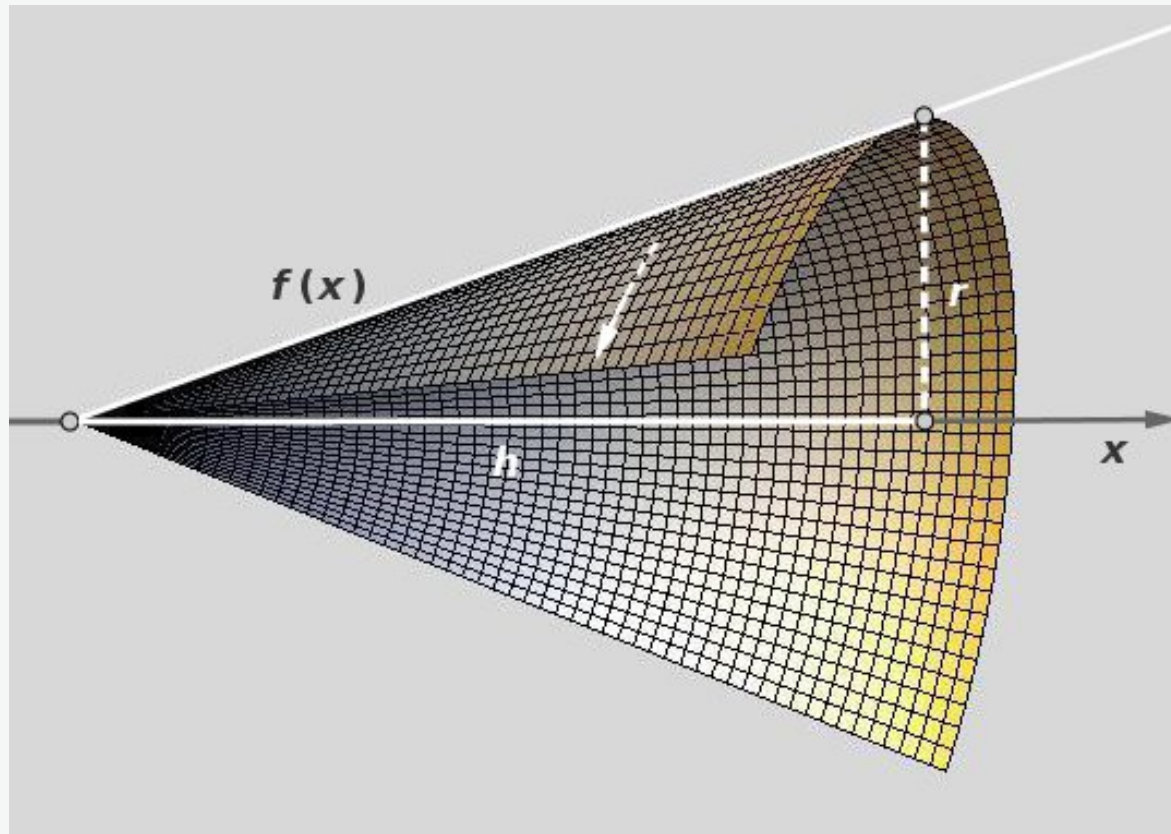


Abb. 7-1b: Durch Rotation des Geradenstücks $f(x) = r x/h$ ($0 \leq x \leq h$) um die x -Achse erzeugter Kreiskegel (Rotationswinkel π)

Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels: Beispiel 1

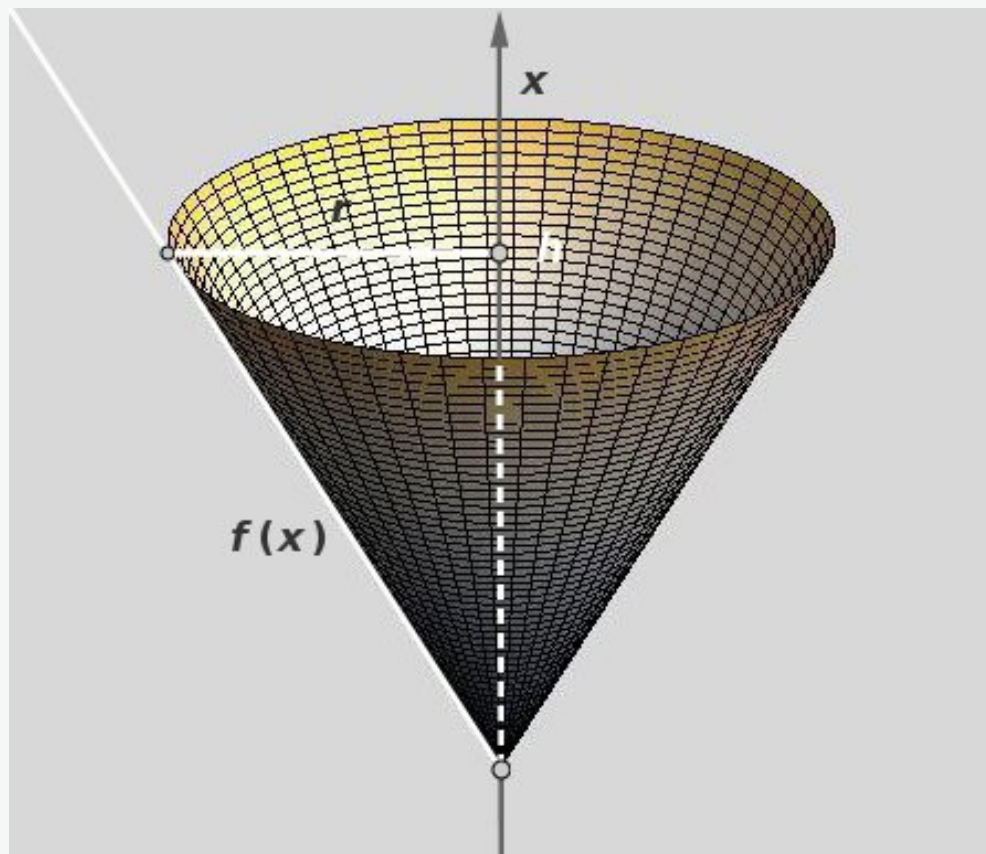


Abb. 7-1c: Durch Rotation des Geradenstücks $f(x) = r x/h$ ($0 \leq x \leq h$) um die x -Achse erzeugter Kreiskegel (Rotationswinkel 2π)

Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels: Beispiel 2

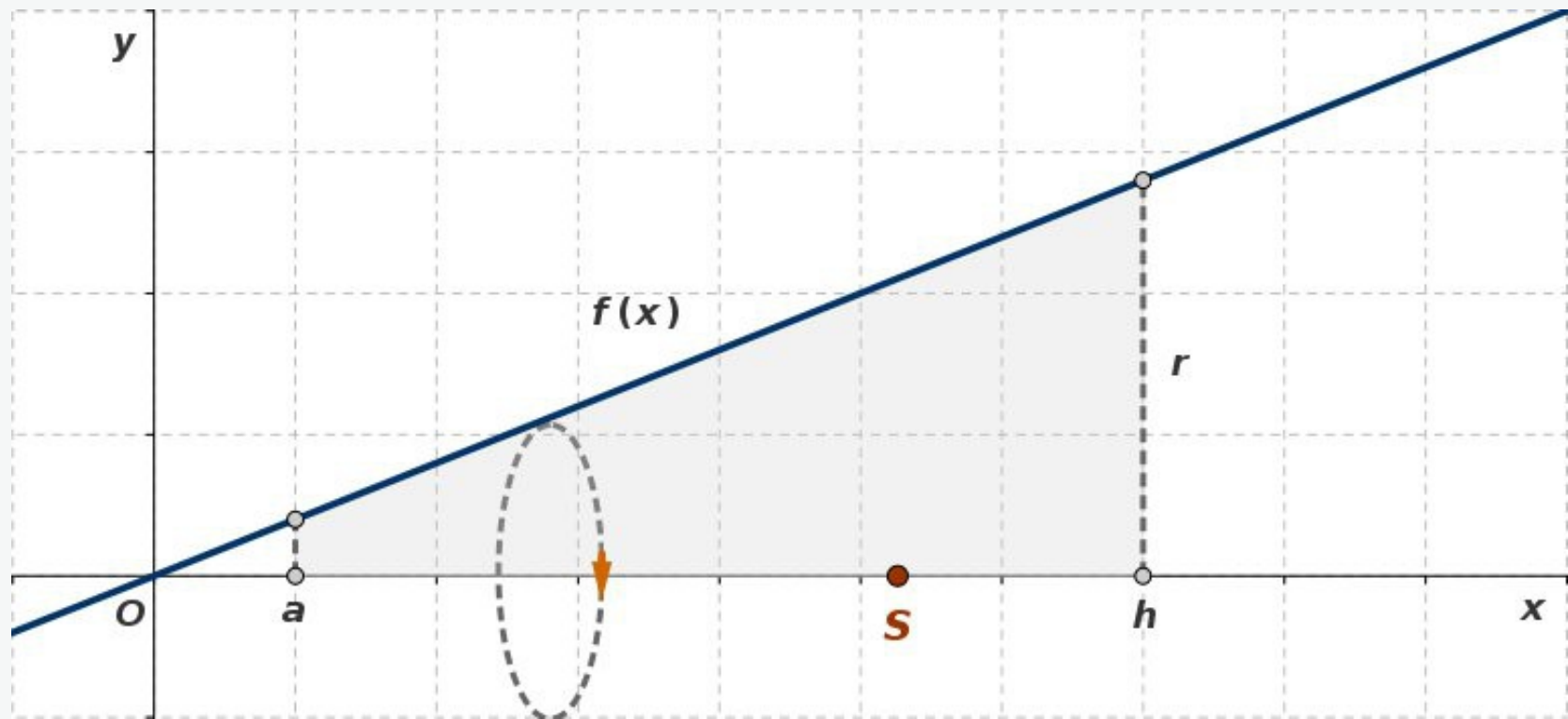


Abb. 7-2a: Geradenstück mit der Gleichung $f(x) = r/h x$, $a \leq x \leq h$

Durch Rotation des Geradenstücks $y = r/h x$ ($a \leq x \leq h$) um die x -Achse entsteht ein abgeschnittener Kreiskegel mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h

$$V_x = \pi \cdot \int_a^h y^2 dx = \pi \cdot \int_a^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 \int_a^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{3 h^2} (h^3 - a^3) \quad (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_a^h x y^2 dx = \frac{3}{r^2 h} \left(\frac{r}{h} \right)^2 \int_a^h x^3 dx = \frac{3}{4} \frac{(h^4 - a^4)}{(h^3 - a^3)} \quad (\text{LE}), \quad y_S = z_S = 0$$

Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels: Beispiel 2

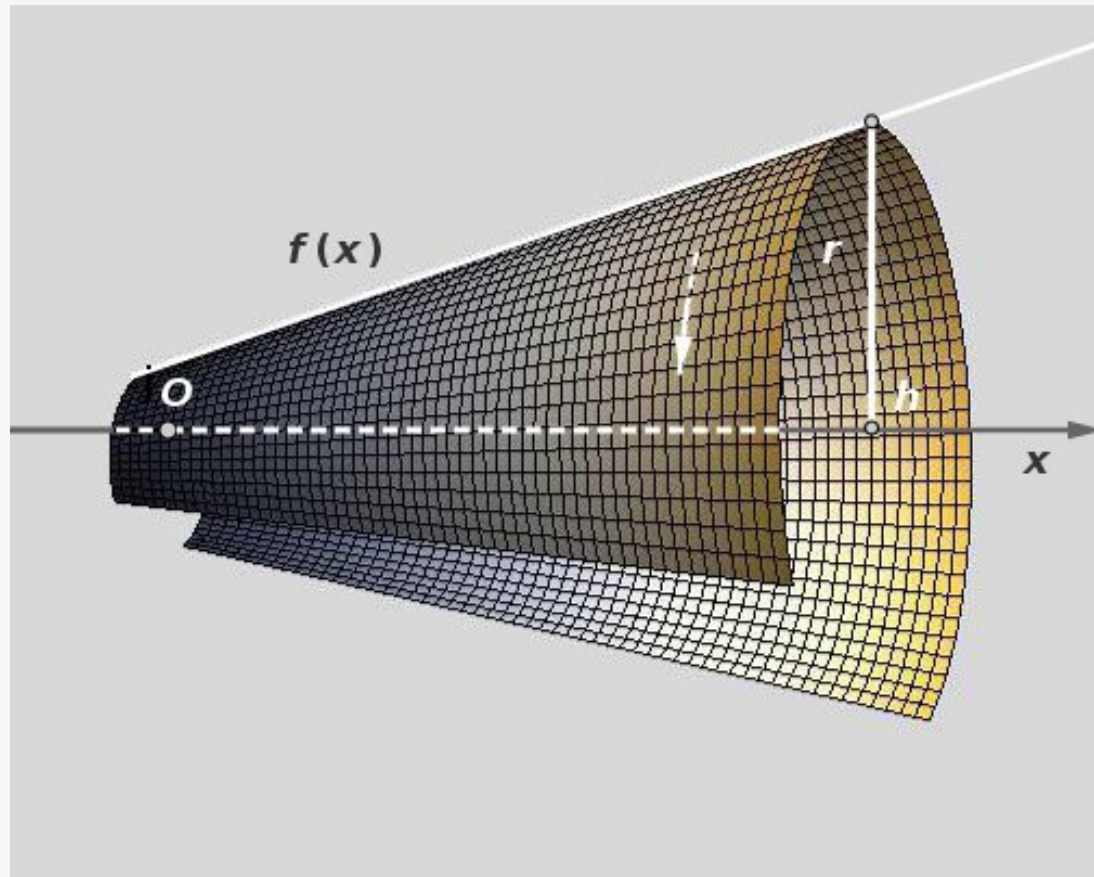


Abb. 7-2b: Durch Rotation des Geradenstücks $f(x) = r x/h$ ($a \leq x \leq h$) um die x -Achse erzeugter Kreiskegel (Rotationswinkel $3\pi/2$)

Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels: Beispiel 2

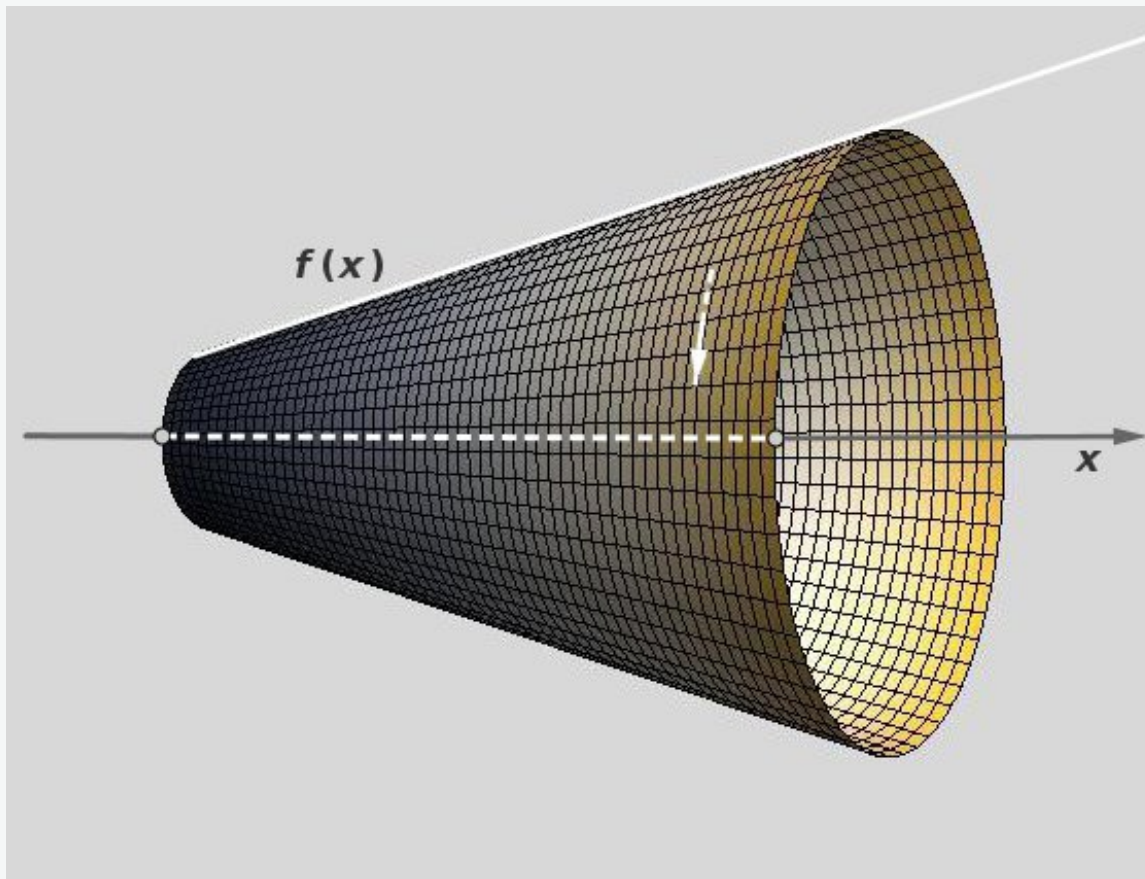
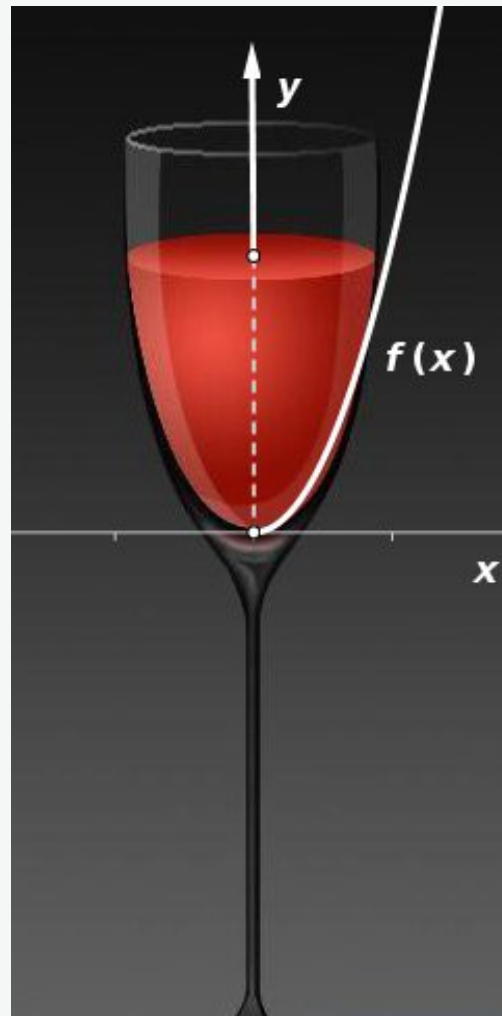


Abb. 7-2c: Durch Rotation des Geradenstücks $f(x) = r x/h$ ($a \leq x \leq h$) um die x -Achse erzeugter Kreiskegel (Rotationswinkel 2π)



Abb. 7-2d: Ein gefülltes Saftglas als Rotationskörper

Rotationskörper der Aufgabe: Beispiel 3



http://www.gzweb.ru/uploads/posts/2008-04/1207505939_1185788835_072746aa7b65546c3.jpg

Abb. 7-3a: Die Darstellung eines Glases als Rotationskörper

Als nächstes Anwendungsbeispiel untersuchen wir ein Weinglas. Die Funktion, deren Rotation das Weinglas beschreibt, unterscheidet sich etwas von einer Parabel

$$f(x) = a x^2, \quad a > 0$$

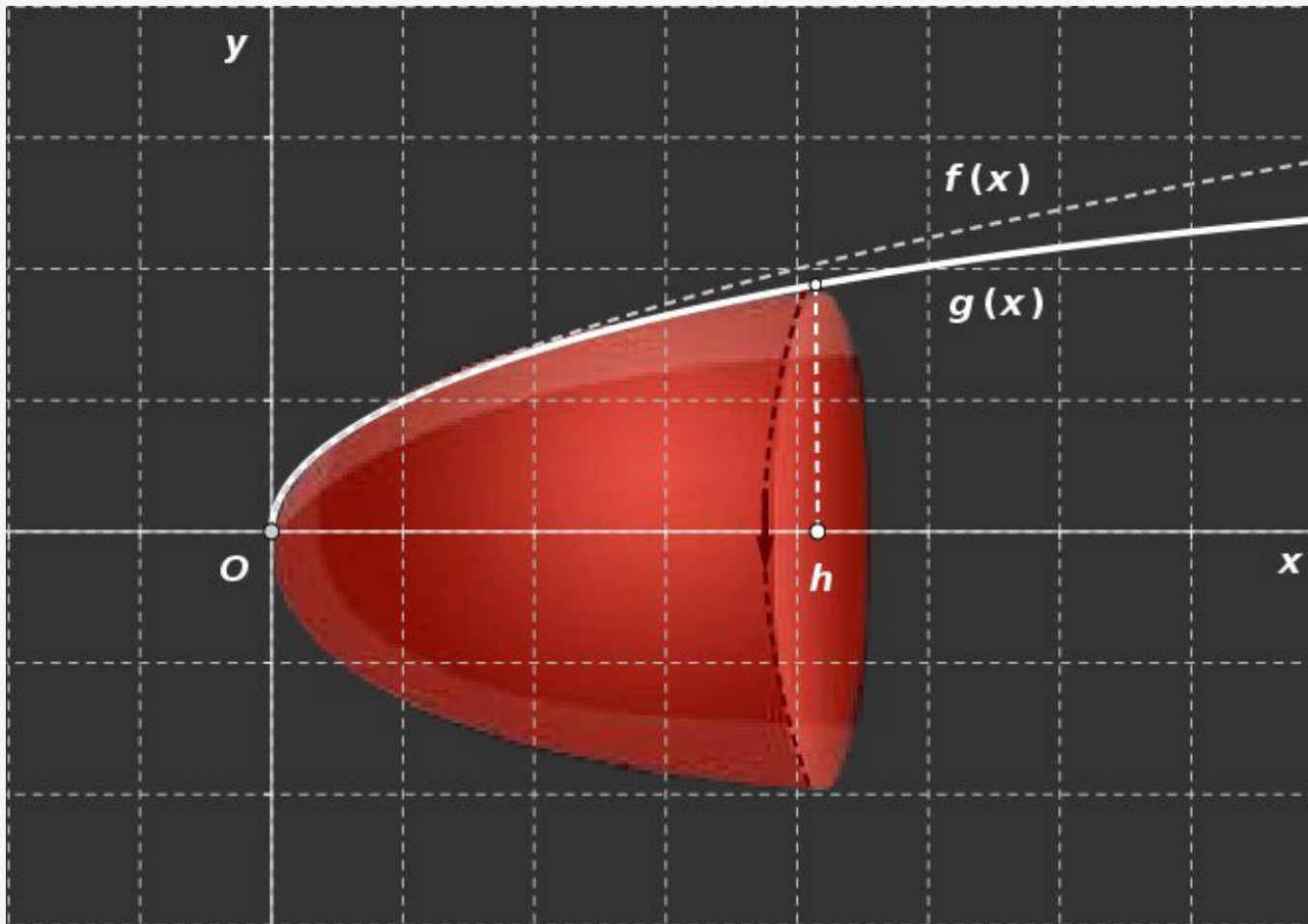


Abb. 7-3b: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = g(x)$ um die x -Achse erzeugte paraboloidähnliche Fläche

oder von einer Wurzelfunktion: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1.02 \sqrt{x} e^{-0.02 x}$

Aber man kann trotzdem das Glas näherungsweise durch Rotation der quadratischen Funktion oder der Wurzelfunktion beschreiben.

Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids: Beispiel 3

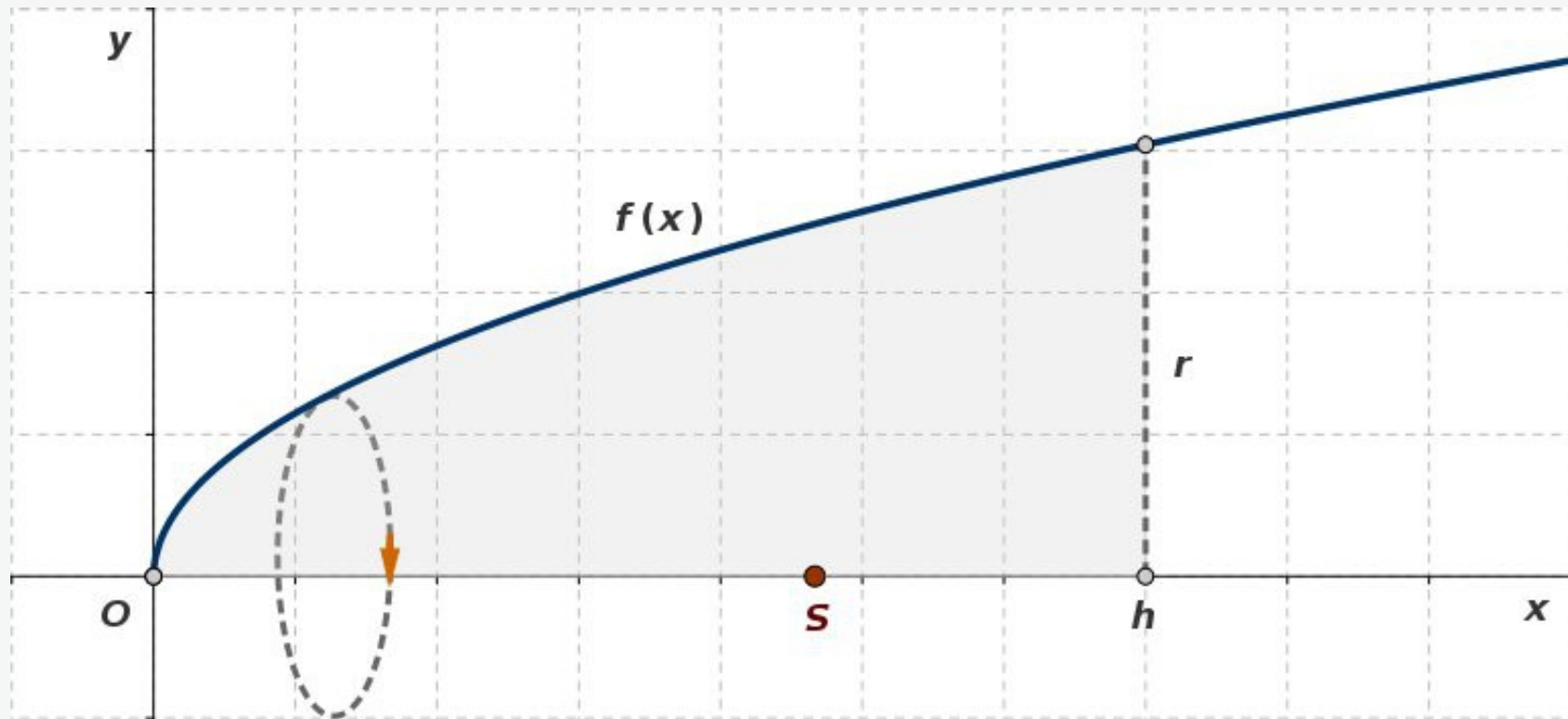


Abb. 7-3c: Kurvenstück mit der Gleichung $f(x) = a \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq h$, $a > 0$

$$y = a \sqrt{x}, \quad V_x = \pi \cdot \int_0^h y^2 dx = \pi a^2 \cdot \int_0^h x dx = \frac{\pi}{2} a^2 h^2 \text{ (VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^h x y^2 dx = \frac{\pi a^2}{V_x} \int_0^h x^2 dx = \frac{2h}{3} \text{ (LE)}, \quad y_S = z_S = 0$$

Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids: Beispiel 3

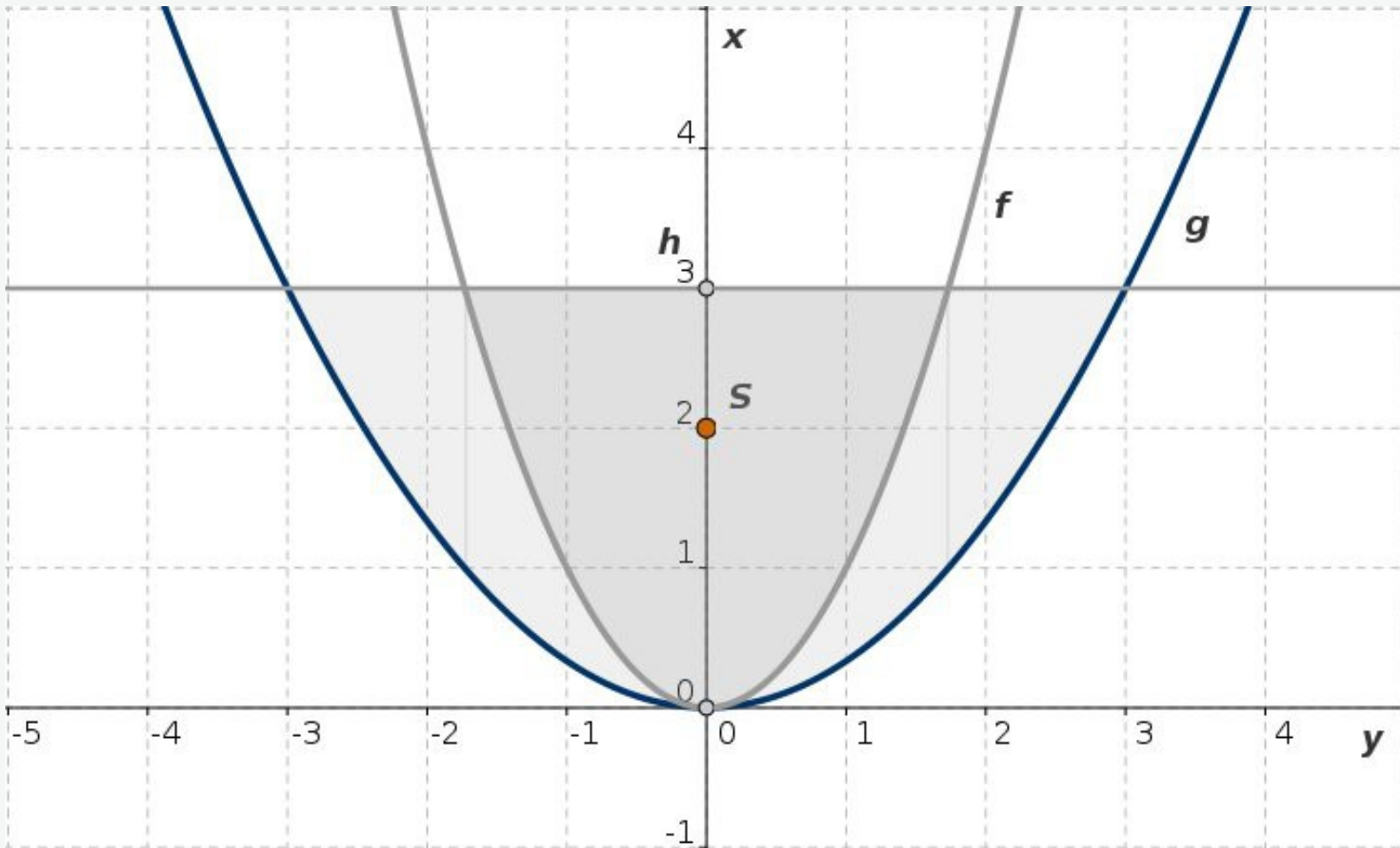


Abb. 7-3d: Durch Rotation der Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ um die x -Achse werden zwei Paraboloiden erzeugt, die den selben Schwerpunkt $S = (2/3h, 0)$ haben

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{3x}$$

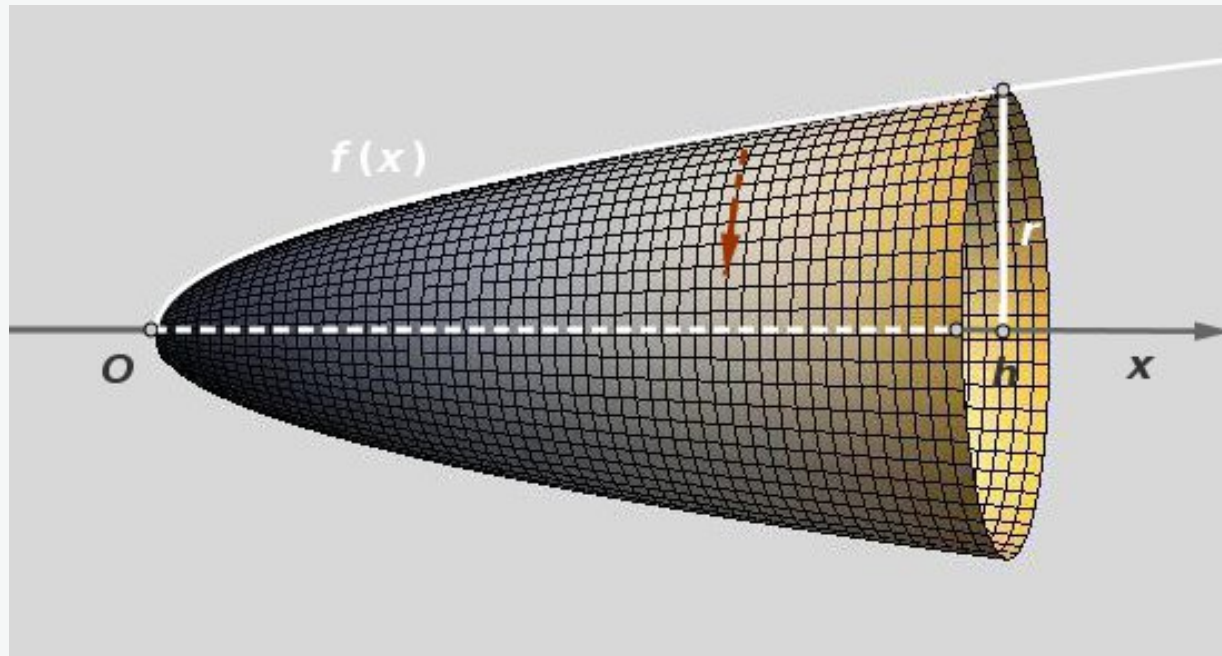


Abb. 7-3e: Durch Rotation der Funktion $f(x) = 3/4 \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq h$) um die x -Achse erzeugtes Rotationsparaboloid (Rotationswinkel 2π)



Abb. 7-3f: Ein Sektglas als Rotationskörper

Schwerpunkt einer Halbkugel: Beispiel 4

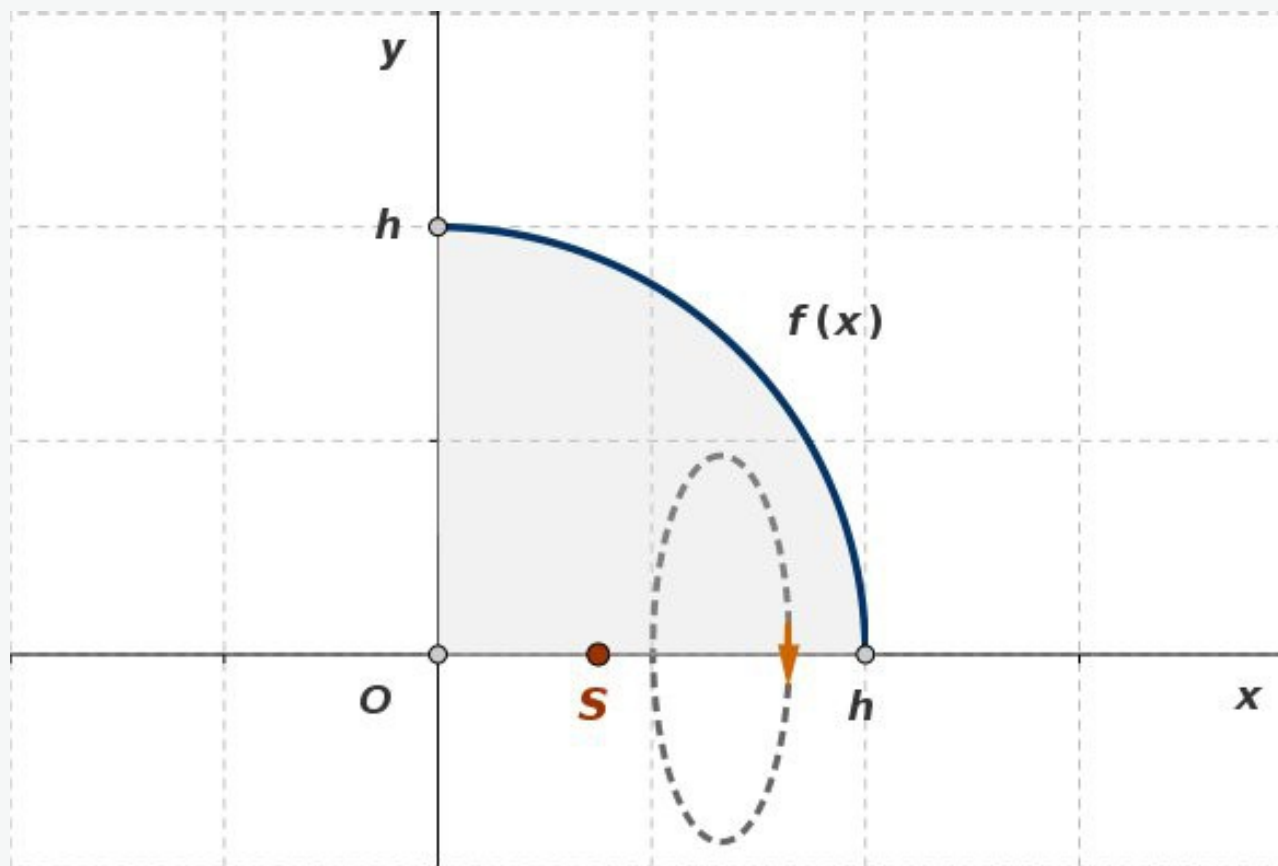


Abb. 7-4a: Kurvenstück mit der Gleichung $f(x) = (h^2 - x^2)^{1/2}$, $0 \leq x \leq h$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} V_{\text{Kugel}} = \frac{2\pi h^3}{3}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^h x \left(\sqrt{h^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{3h}{8}, \quad y_S = z_S = 0$$

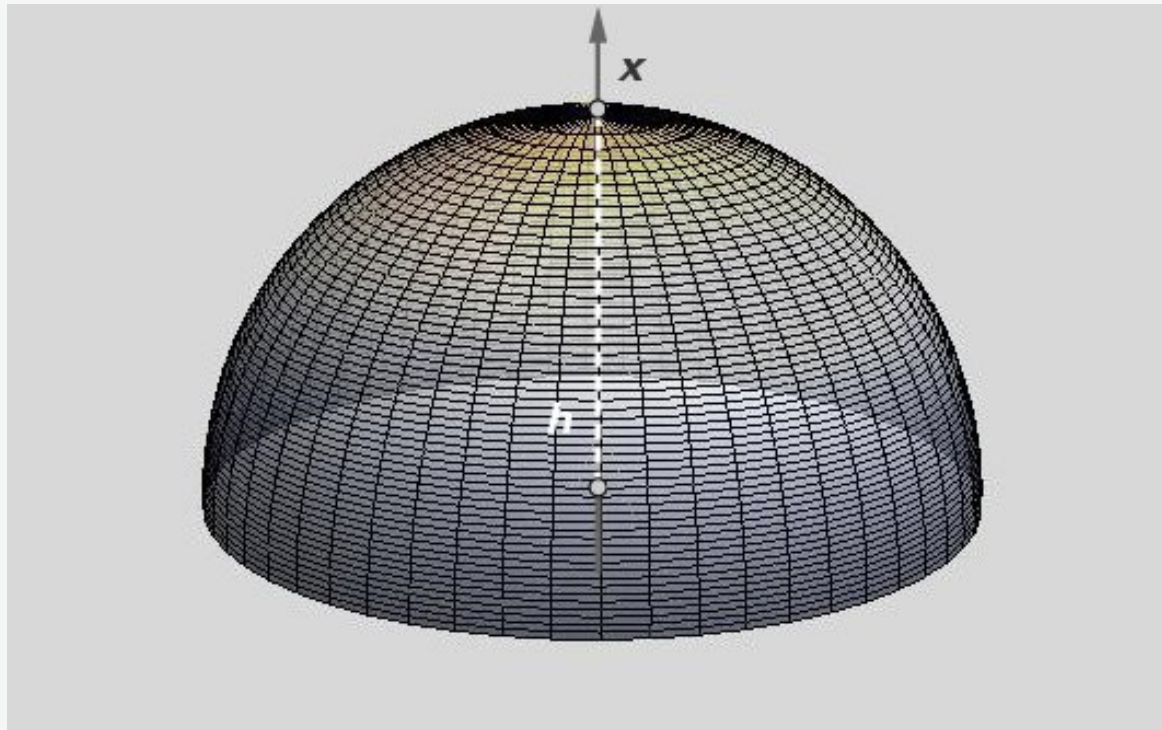


Abb. 7-4b: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = (h^2 - x^2)^{1/2}$ ($0 \leq x \leq h$) um die x -Achse erzeugte Halbkugel

Eine Halbkugel



http://katrika.com/onefloorup.com/uploaded_images/November07/1101-petpeek.jpg

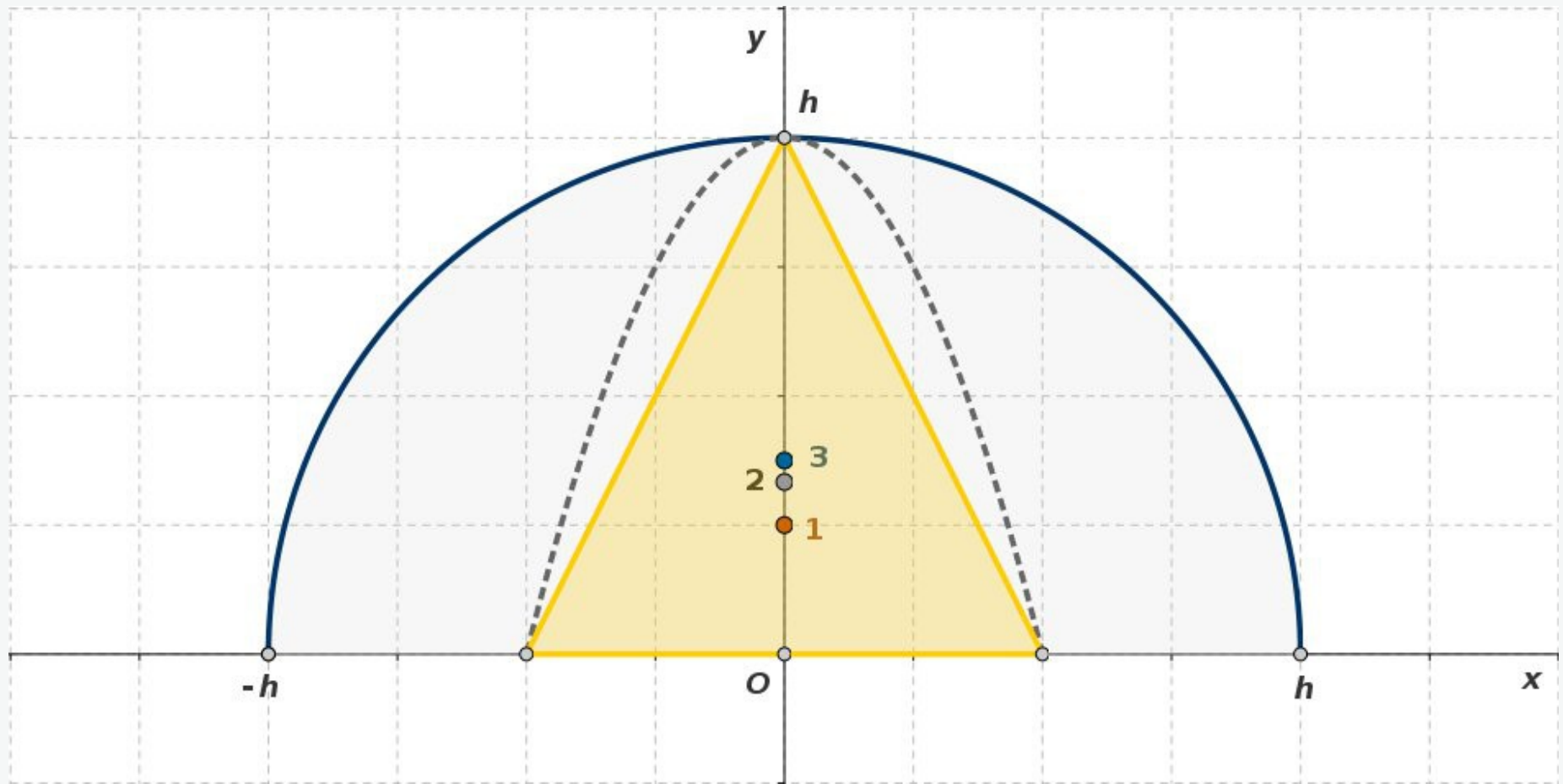


Abb. 7-4c: Schnittflächen der x,y -Ebene mit den Rotationskörpern: Kegel (1), Paraboloid (2) und Halbkugel (3) und entsprechende Schwerpunkte

$$1: x_{S, \text{Kegel}} = \frac{h}{4}, \quad 2: x_{S, \text{Paraboloid}} = \frac{h}{3}, \quad 3: x_{S, \text{Halbkugel}} = \frac{3h}{8}$$