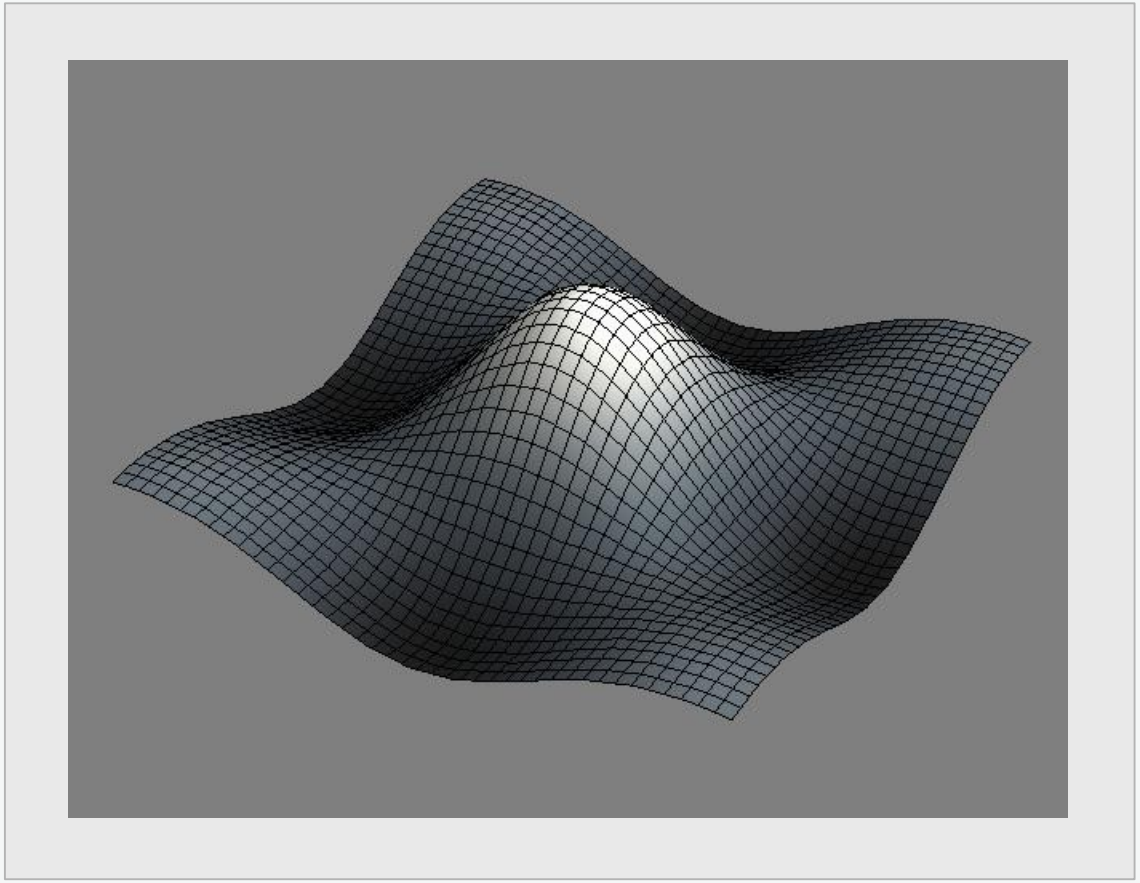


Geometrische Darstellung einer Funktion $z = f(x, y)$

als Fläche im 3D-Raum

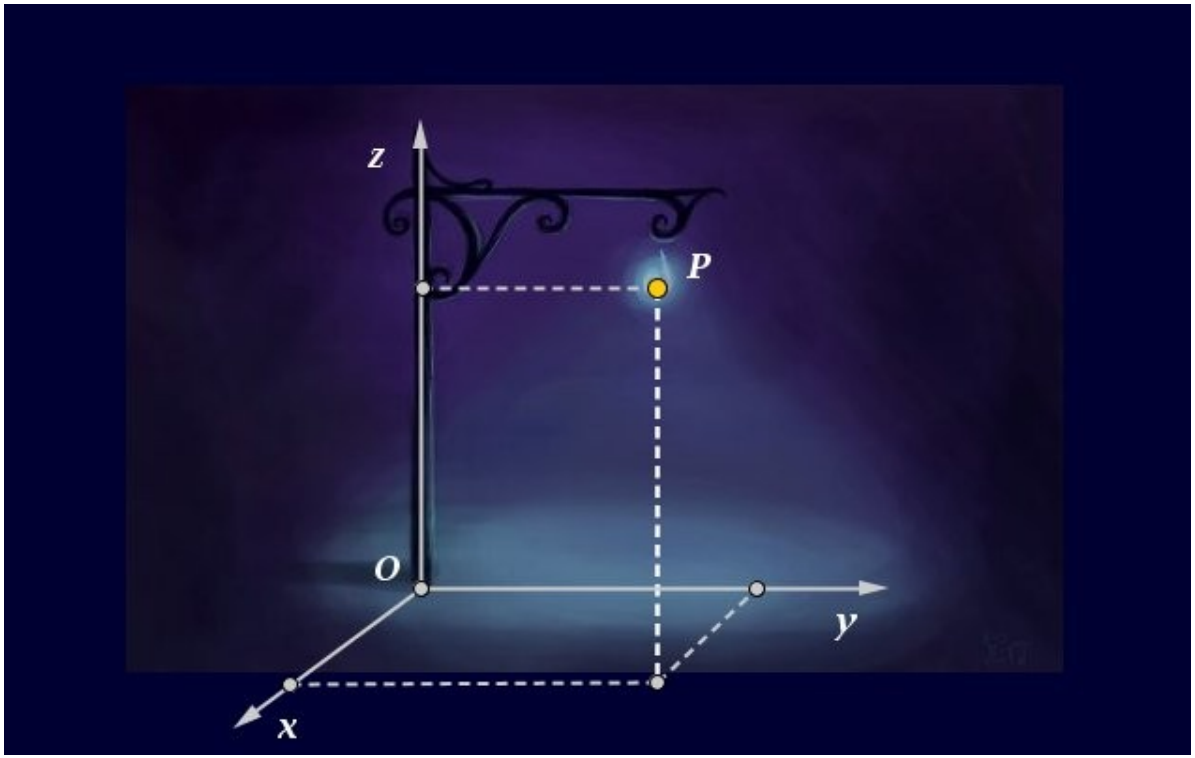


Abb. 6-1: Punkt P = (x, y, z) im kartesischen Koordinatensystem

Aufgabe: 1

Stellen Sie im kartesischen Koordinatensystem folgende Gleichungen: $z = 0$, $z = 3$, $z = -2$ dar.

Eine Gleichung wird graphisch durch die Punkte dargestellt, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Die Gleichung $z = 0$ wird also durch die Darstellung der Menge der Punkte anschaulich gemacht, deren z-Koordinaten gleich Null sind. Das ist die horizontale Ebene durch den Koordinatenursprung, die x,y-Ebene. Die graphische Darstellung der Gleichung $z = 3$ ist die Ebene, die parallel zu x,y-Ebene verläuft und drei Einheiten über der x,y-Ebene liegt. Entsprechend beschreibt die Gleichung $z = -2$ eine Ebene parallel zur x,y-Ebene im Abstand von zwei Einheiten in Richtung der negativen z-Achse.

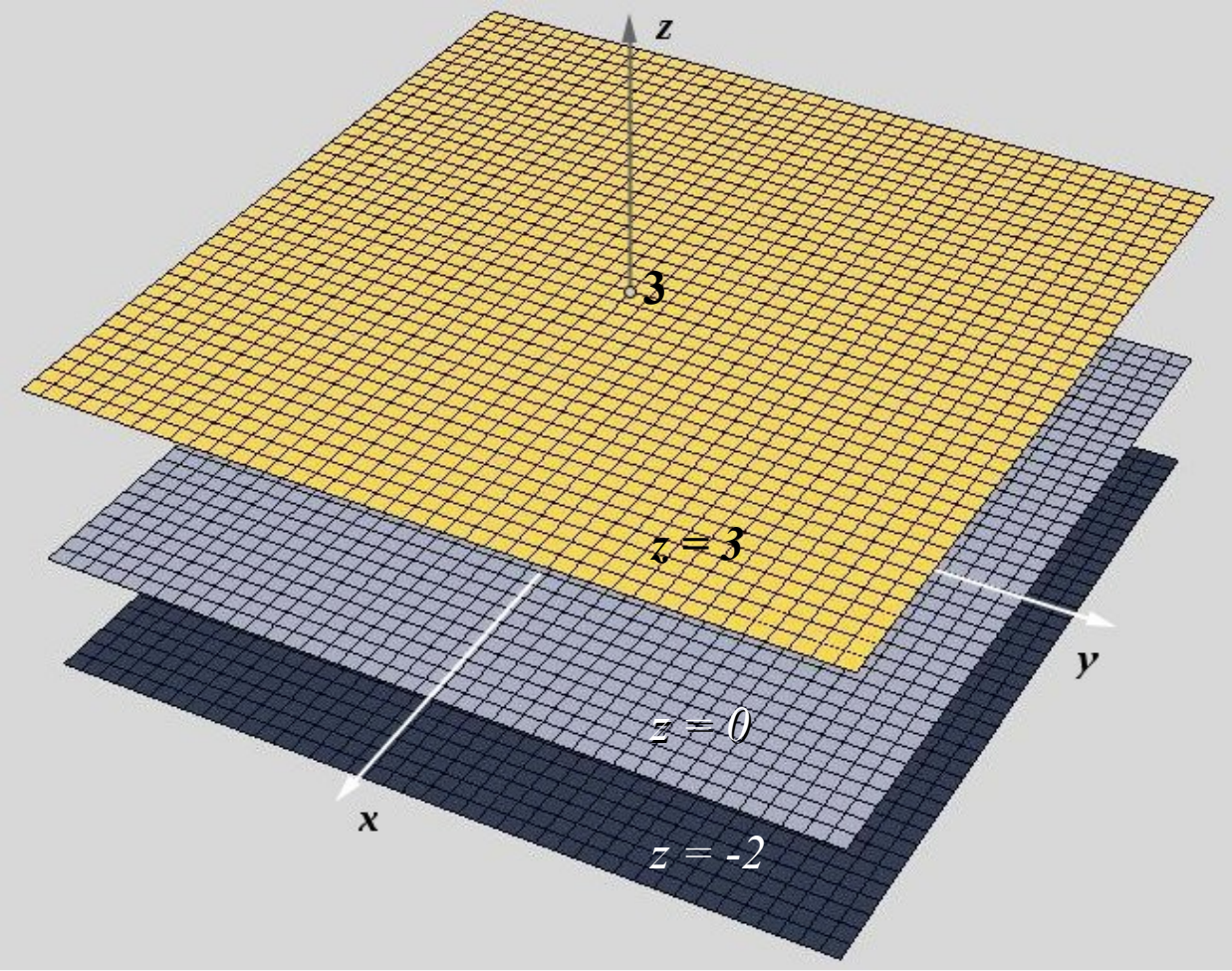
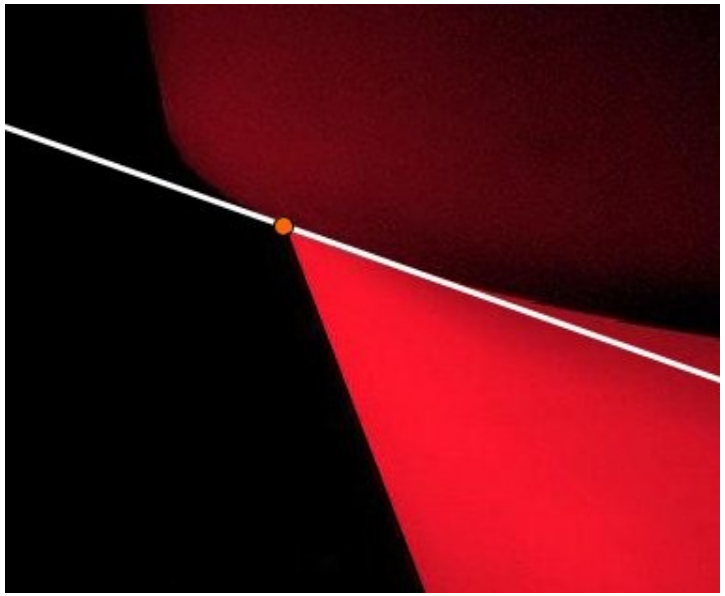


Abb. 6-2: Graphische Darstellung der Gleichungen $z = 0$, $z = 3$ und $z = -2$ im kartesischen Koordinatensystem



http://www.flickr.com/photos/losy/2321849643/

Lineare Funktionen spielen eine zentrale Rolle in der Analysis der Funktionen einer Variablen. Sie sind auch in der Analysis der Funktionen mehrerer Variablen sehr wichtig.

Aufgabe 2: Beschreiben Sie den Graph der linearen Funktion
$f(x, y) = 1 + x - y$

Die Ebene $x = a$ ist eine zur y,z-Ebene parallele Ebene. Die Schnittkurve der Fläche mit der Gleichung $z = 1 + x - y$ und der Ebene $x = a$ ist eine gerade Linie $z = 1 + a - y$. Entsprechend hat die Ebene $y = b$, die parallel zur x,z-Ebene verläuft, mit der Fläche $z = 1 + x - y$ eine gemeinsame Linie, die Schnittkurve mit der Gleichung $z = 1 – b + x$. Die Schnittkurve mit der x,y-Ebene ist die Gerade $y = 1 + x$, die Schnittkurve mit der Ebene $z = 1$ ist die Gerade $y = x$. Weil alle Schnittkurven gerade Linien sind, kann man erwarten, dass die Fläche der Funktion $z = 1 + x – y$ eine Ebene ist.

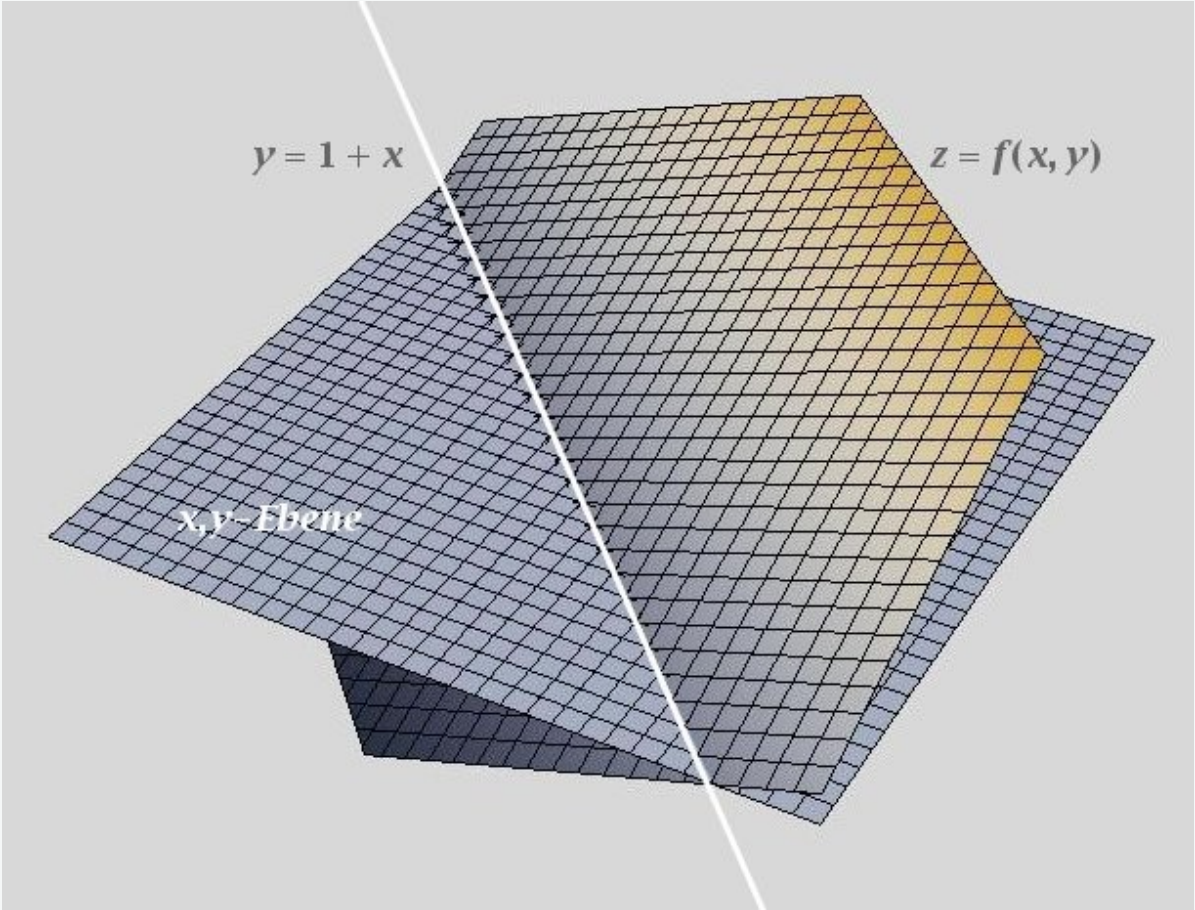


Abb. 6-3: x,y-Ebene, die Ebene $f(x, y) = 1 + x - y$ und die Schnittkurve der beiden Ebenen mit der Gleichung $y = 1 + x$

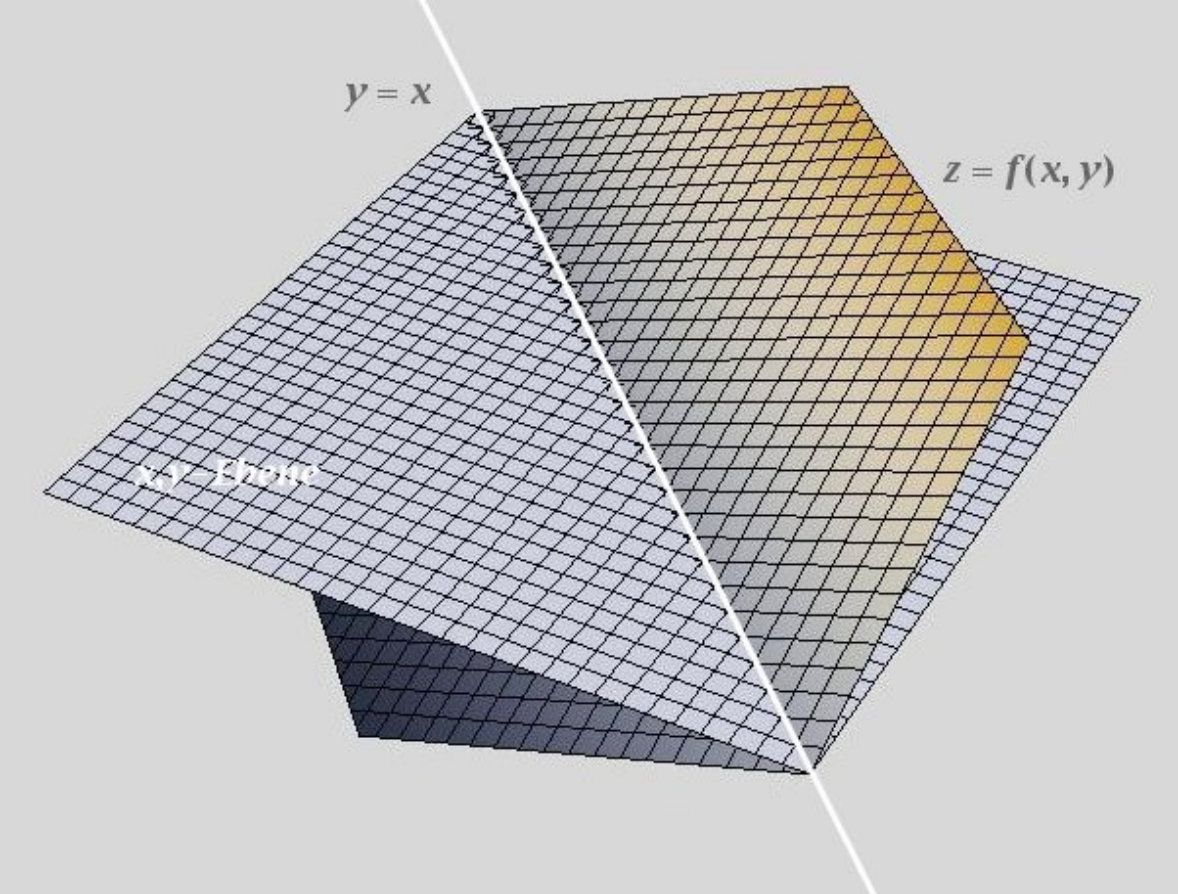


Abb. 6-4: Die Ebenen $f(x, y) = 1 + x - y$ und $z = 1$ und die Schnittkurve der beiden Ebenen mit der Gleichung $y = x$

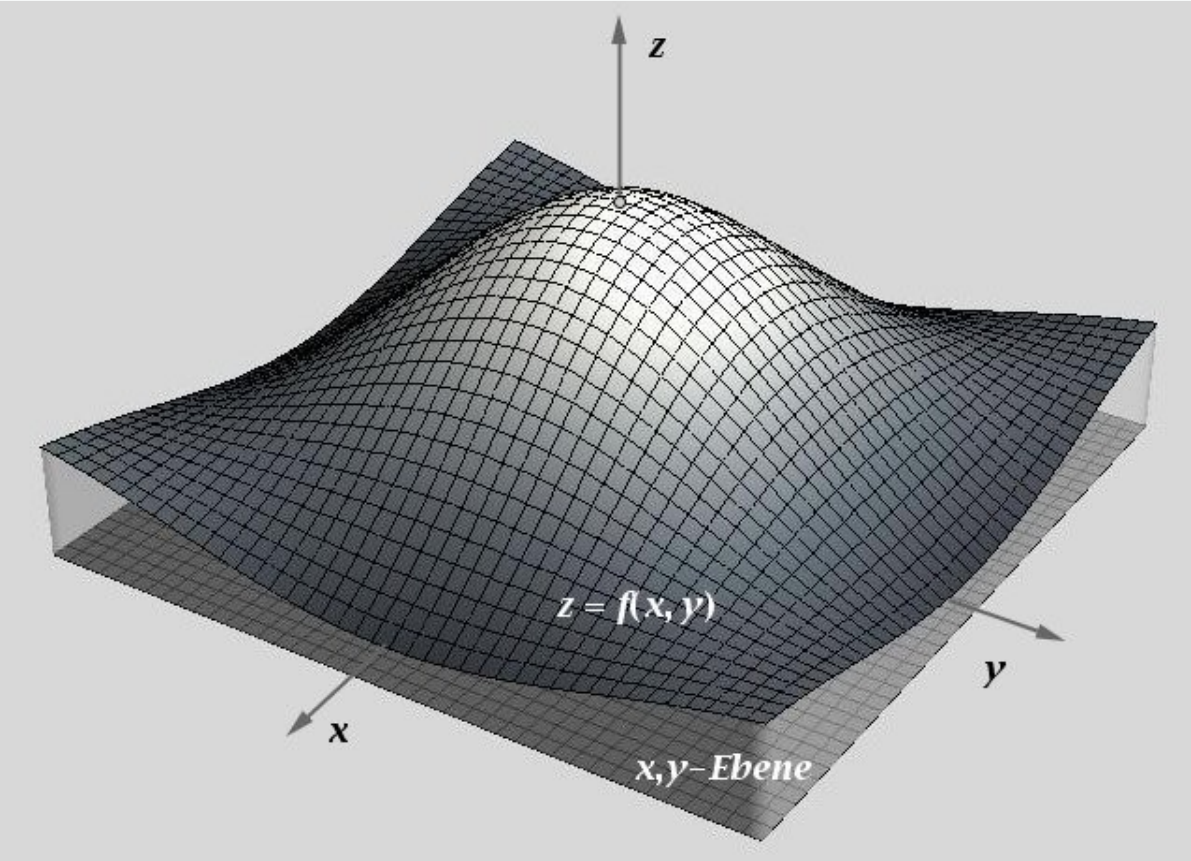


Abb. 7-1: Eine über der x,y-Ebene liegende Fläche der Funktion $z = f(x, y)$

Eine Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen kann in einem *3D* kartesischen Raum durch eine über dem Definitionsbereich D liegende Fläche dargestellt werden. Der Funktionswert z besitzt dabei die geometrische Bedeutung einer Höhenkoordinate.

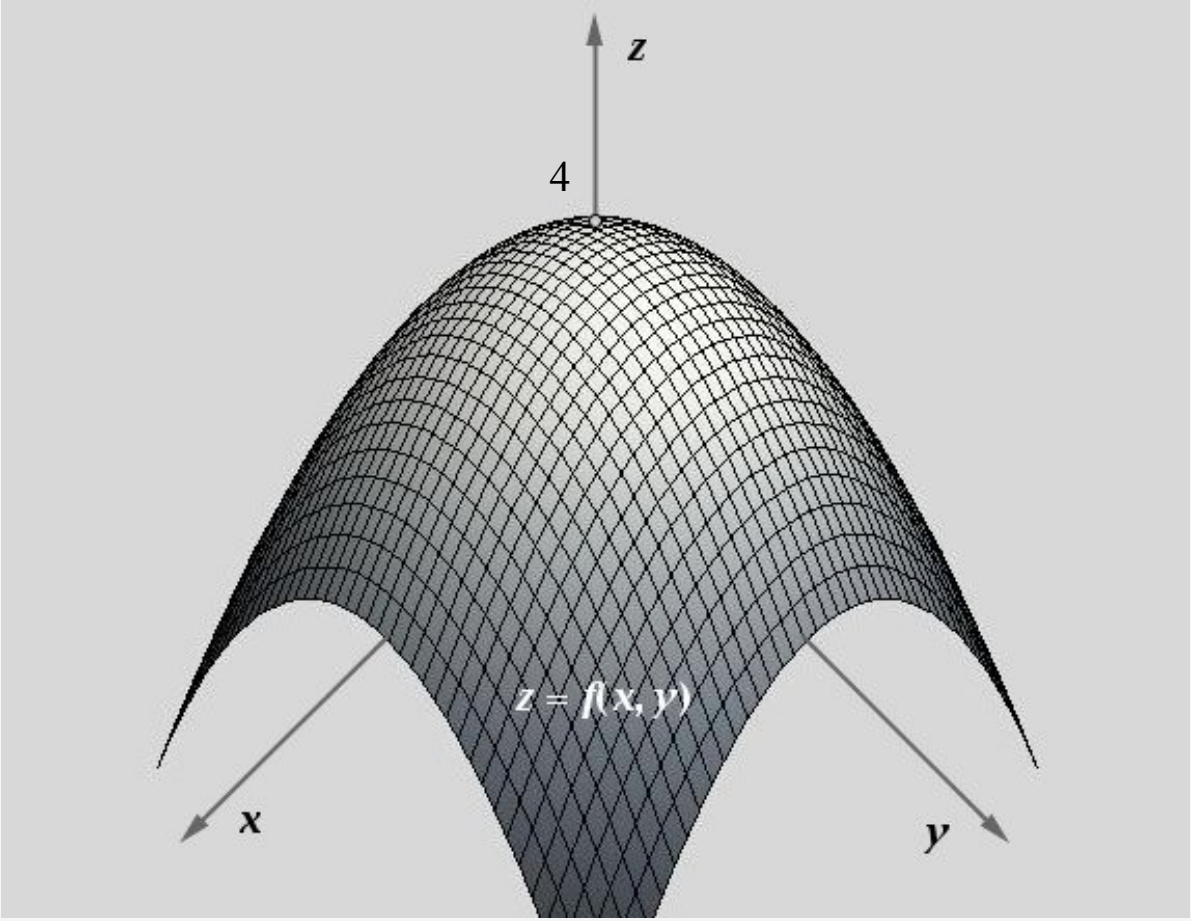


Abb. 7-2: Die Fläche der Funktion $z = f(x, y)$

$z = 4 - x^2 - y^2$ – Rotationsparaboloid

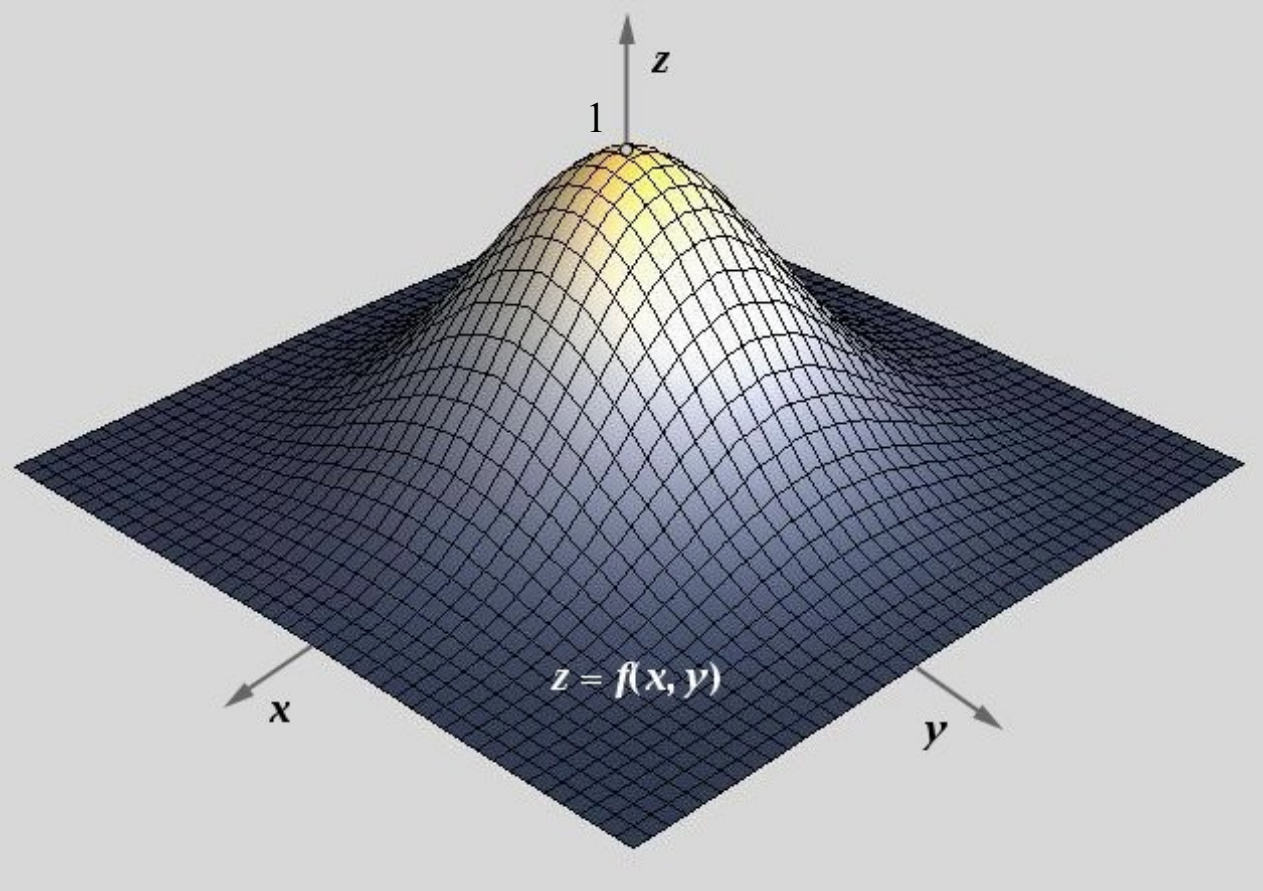


Abb. 7-3: Die Fläche der Funktion $z = f(x, y)$

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}$$

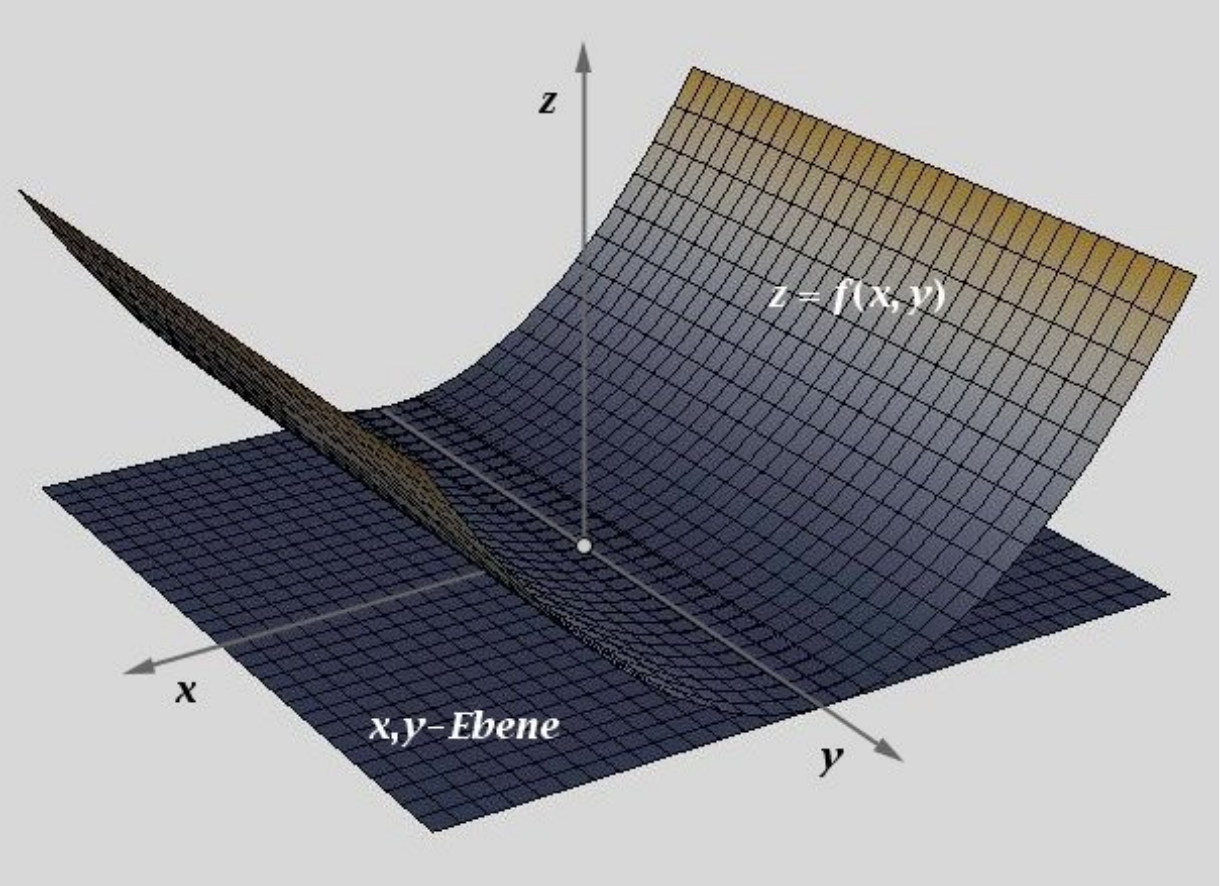


Abb. 7-4: Die Funktion $f(x, y) = x^2$ und die x,y-Ebene

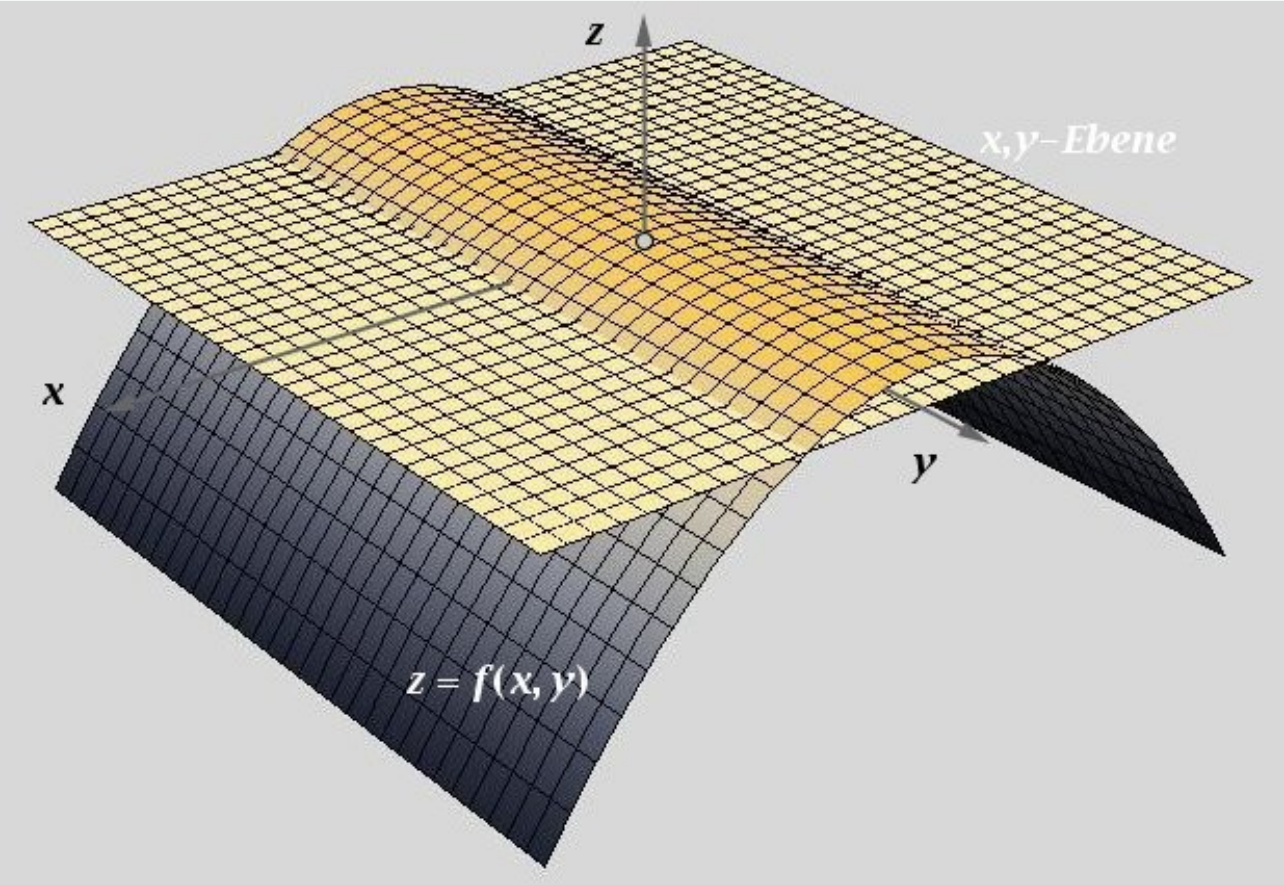


Abb. 7-5: Die Funktion $f(x, y) = 2 - x^2$ und die x,y-Ebene

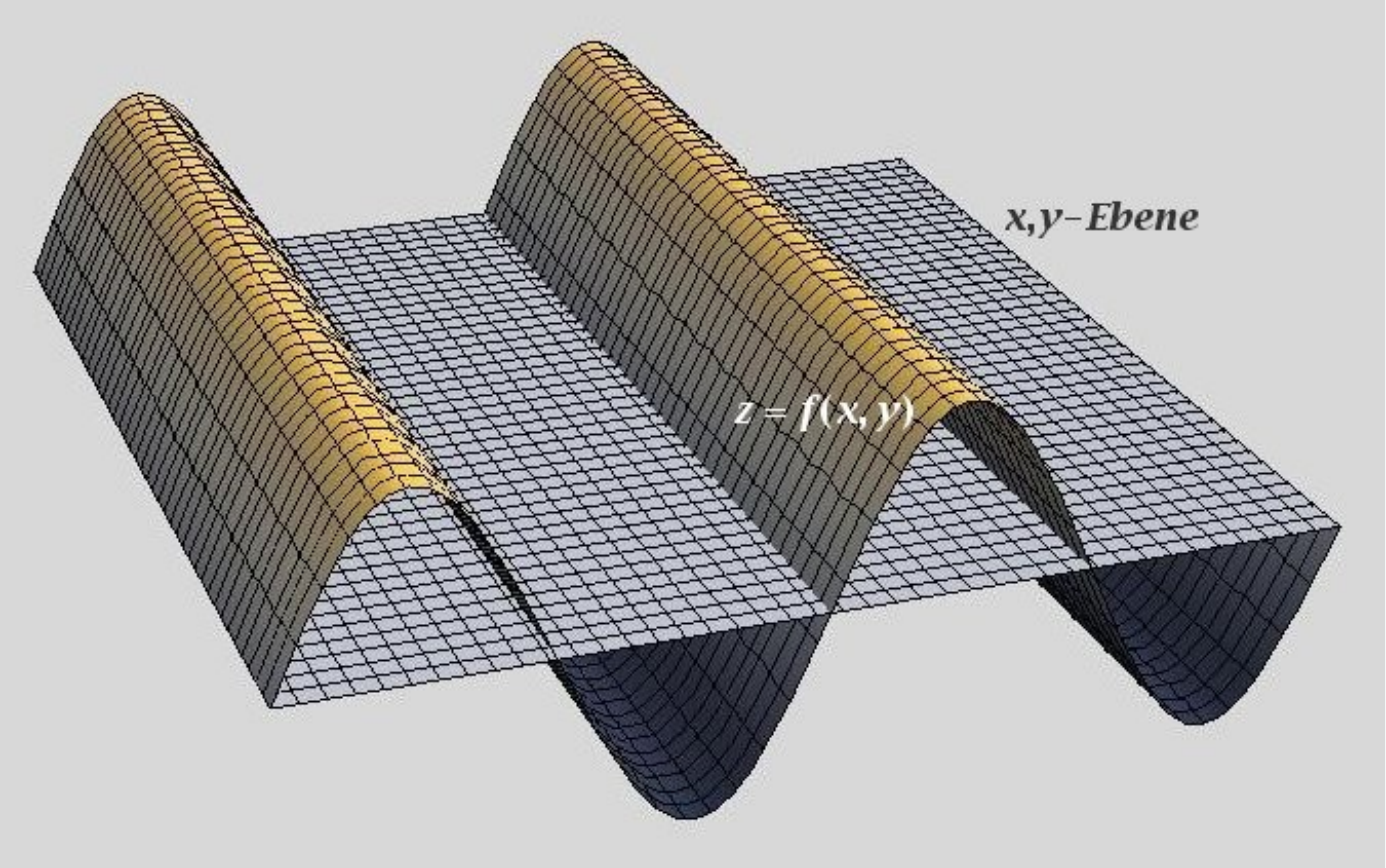


Abb. 7-6: Die Funktion $f(x, y) = \sin x$ und die x,y-Ebene ($x = [0, 4\pi]$)

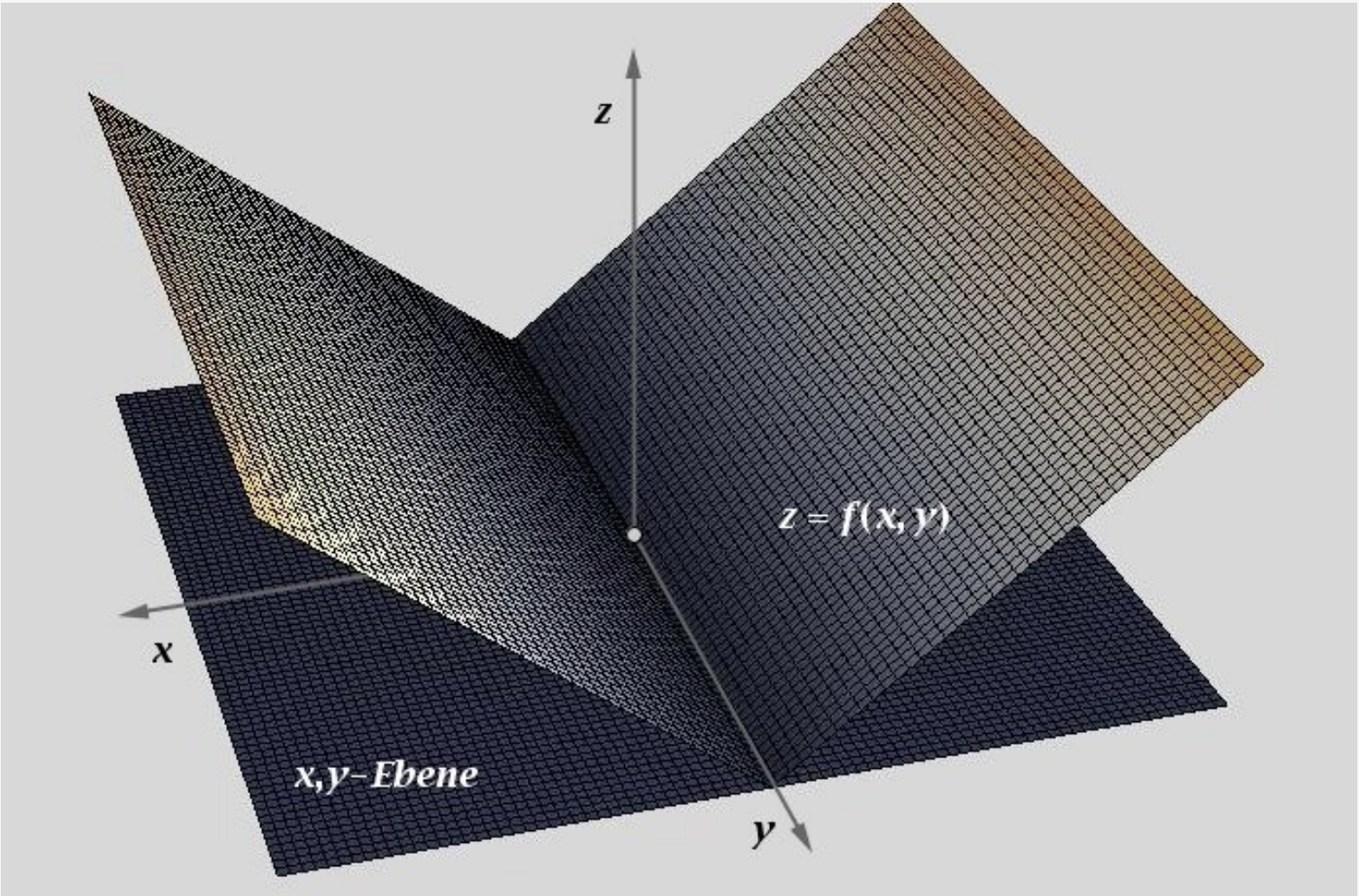


Abb. 7-7: Die Betragsfunktion $f(x, y) = |x|$ und die x,y-Ebene