Flächeninhalt: Aufgaben 1-9

Ma 2 – Lubov Vassilevskaya

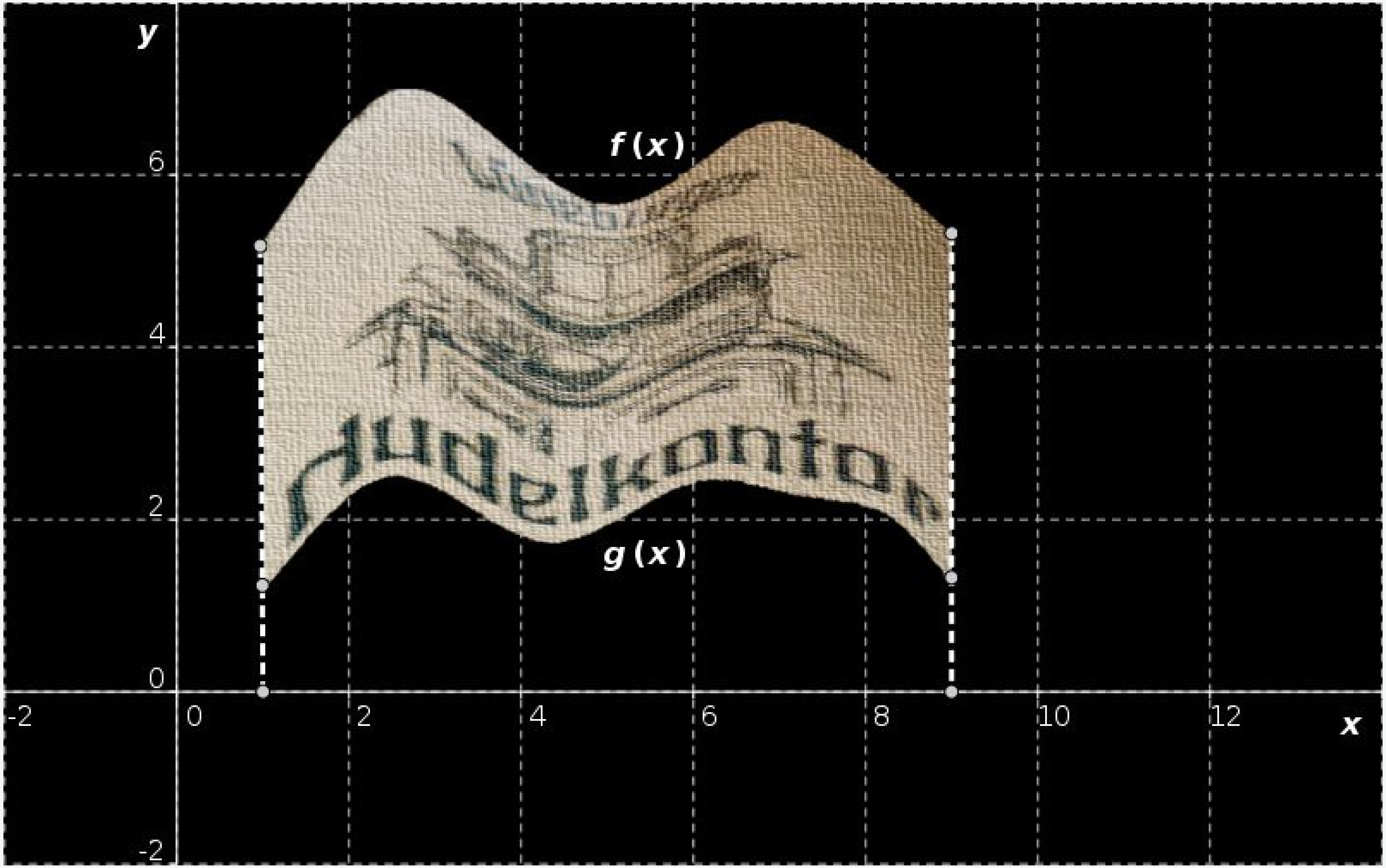


Abb. 1: Fläche A zwischen zwei Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\,dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

$$x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi$$

$$r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$dx\, dy = r\, dr\, d\varphi$$

Fläche zwischen zwei Kurven in Polarkoordinaten:

$$A = \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r=f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left[r^2 \right]_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi) \right] d\varphi$$

Gesucht ist die Fläche, die durch die folgenden Geraden und Kurven begrenzt wird:

Aufgabe 1: $f(x) = x + 2, \qquad g(x) = 4 - x^2$

Aufgabe 2: $f(x) = 2 + 2x - \dfrac{x^2}{4}, \qquad g(x) = 2, \qquad x = 4$

Aufgabe 3:

$$f(x) = 2 + 2x - \frac{x^2}{4}, \quad g(x) = 2 - 4x - x^2, \quad h(x) = 6$$

Aufgabe 4:

$$f(x) = 5 - \frac{2}{5}x^2, \qquad g(x) = 2 - \frac{x^2}{4}, \qquad x, y \geqslant 0$$

Aufgabe 5: $x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y = 2$

Aufgabe 6: $y = 0, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \ln 2$

Flächeninhalt: Aufgaben 7-9

Aufgabe 7: $x = y^2, \qquad x = 2y - y^2$

Aufgabe 8: $xy = 4, \qquad x + y - 5 = 0$

Aufgabe 9:

$$f(x) = x^3 + 1, \qquad g(x) = x^2 - 1, \qquad y = 2$$

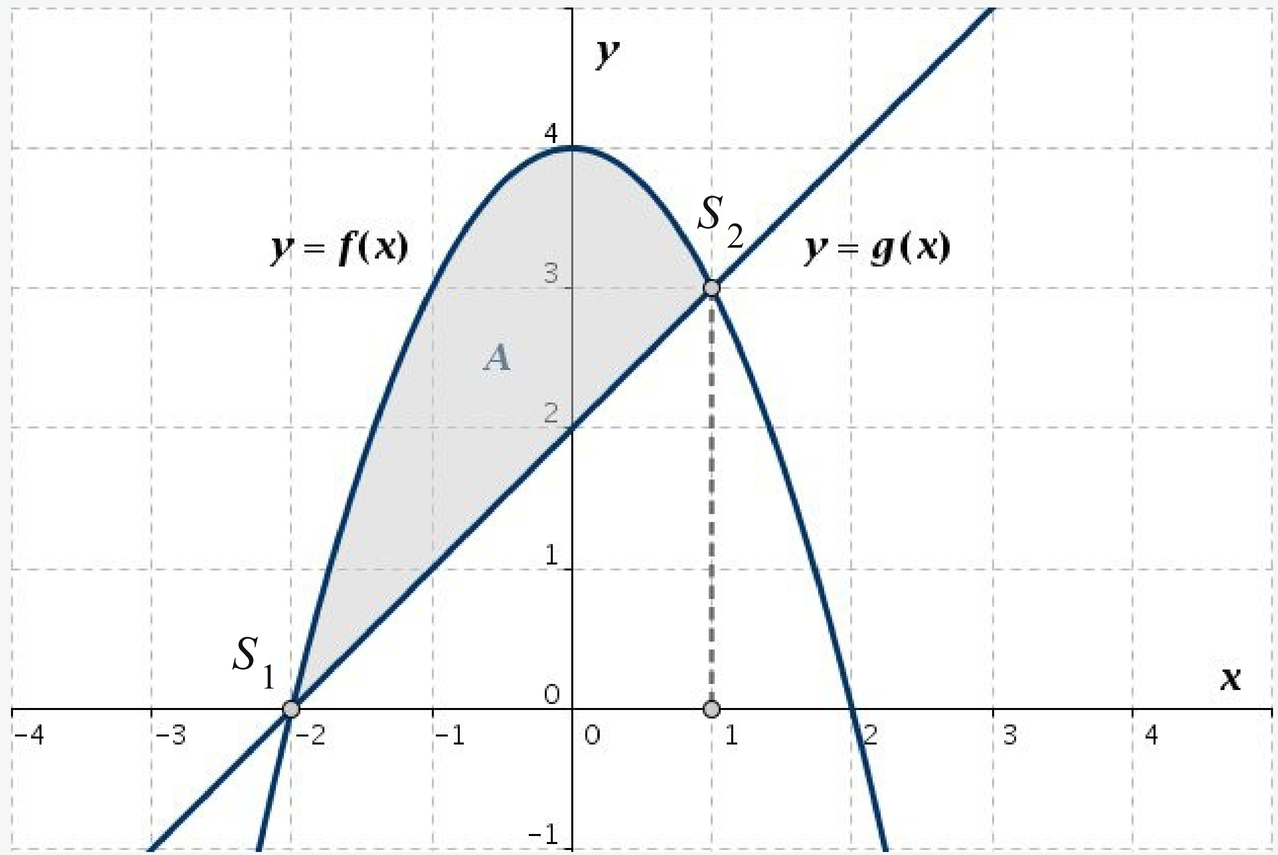


Abb. L1: Fläche A, die zwischen zwei Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ eingeschlossen ist

$$x + 2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad S_1 = (-2,\ 0), \quad S_2 = (1,\ 3)$$

$$A = \int_{x=-2}^{1} \int_{y=x+2}^{4-x^2} dy\ dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\ dx = \frac{9}{2}\ (\text{FE})$$

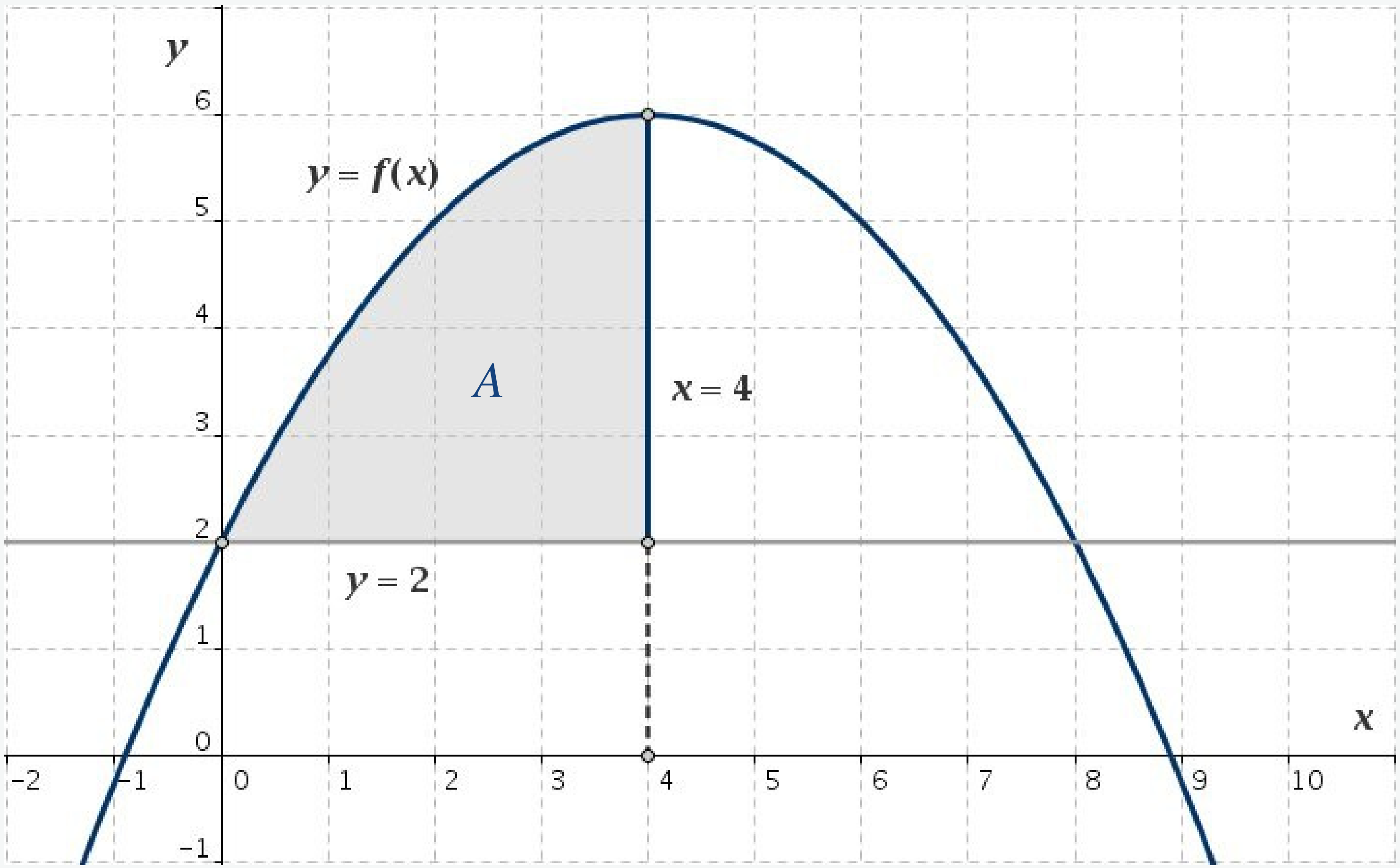


Abb. L2-2: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ und der Geraden $x = 4$

$$A = \int_{x=0}^{4} \int_{y=2}^{2+2x-\frac{x^2}{4}} dy \; dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{32}{3} \quad (\text{FE})$$

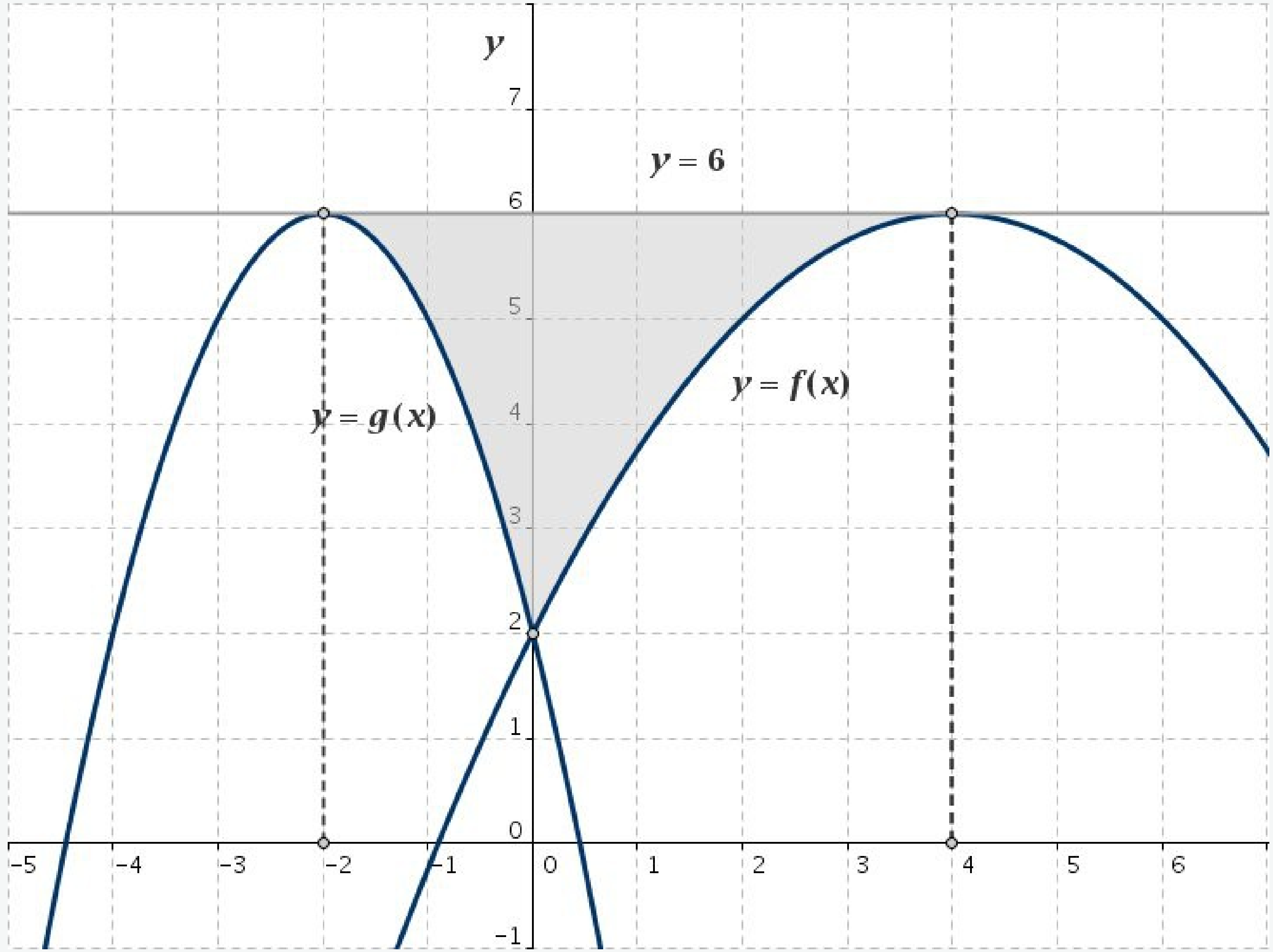


Abb. L3: Die Fläche zwischen den Funktionen y = f (x), y = g (x) und y = h (x)

$$f(x) = 2 + 2x - \frac{x^2}{4}, \quad g(x) = 2 - 4x - x^2, \quad h(x) = 6$$

$$A = \int_{x=-2}^{0} \int_{y=g(x)}^{h(x)} dy \ dx + \int_{x=0}^{4} \int_{y=f(x)}^{h(x)} dy \ dx =$$

$$= \int_{x=-2}^{0} \int_{y=2-4x-x^2}^{6} dy \ dx + \int_{x=0}^{4} \int_{y=2+2x-x^2/4}^{6} dy \ dx =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8 \ \ (\mathrm{FE})$$

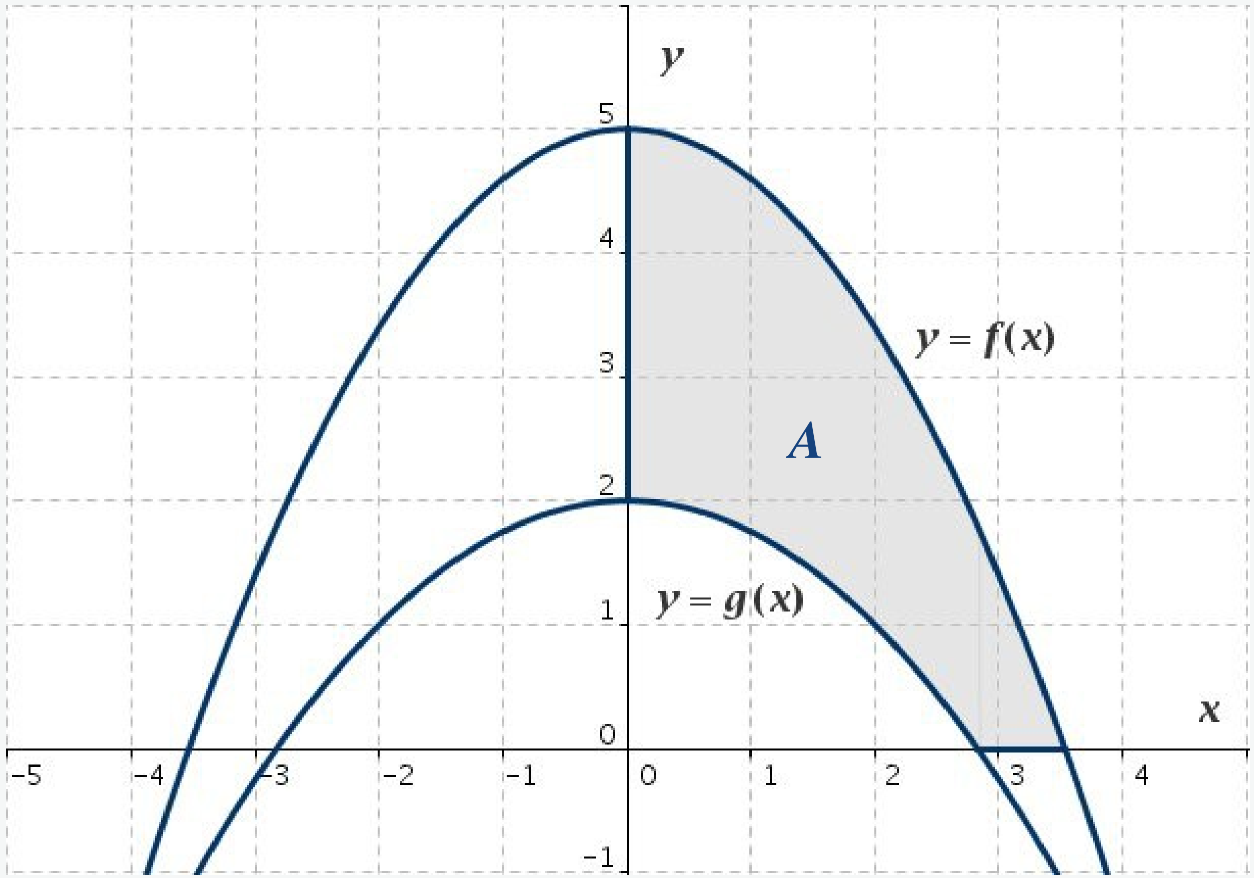


Abb. L4-1: Die Fläche A zwischen den Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f\,(x) = 5 - \frac{2}{5}\,x^2, \qquad g\,(x) = 2 - \frac{x^2}{4}, \qquad x\,,\,y \geqslant 0$$

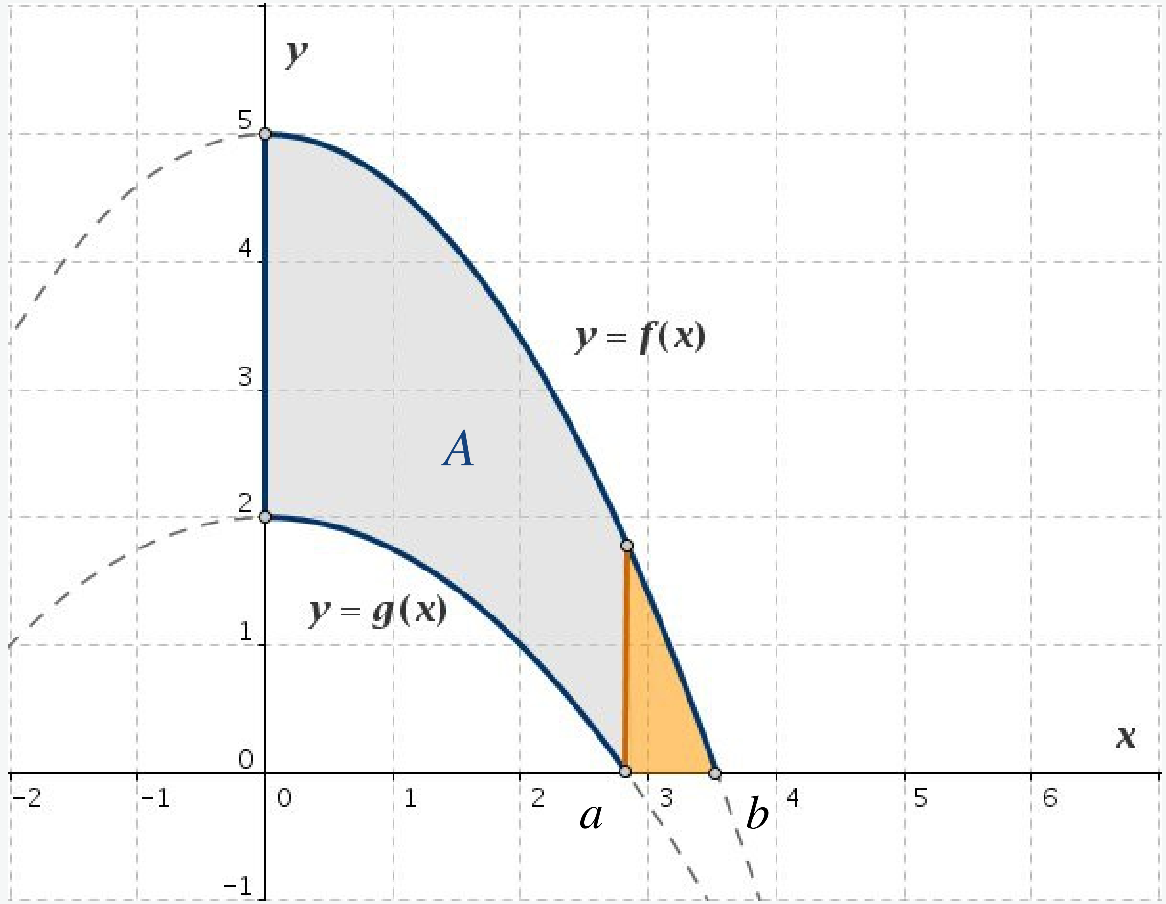


Abb. L4-2: Zur Berechnung der Fläche A zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im ersten Quadrand

Schnittpunkte der Funktionen $y = g(x)$ und $y = f(x)$ mit der x-Achse sind entsprechend $(a, 0)$ und $(b, 0)$.

$$A = \int_{x=0}^{a} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\ dx + \int_{x=a}^{b} \int_{y=0}^{f(x)} dy\ dx =$$

$$= \int_{x=0}^{a} \int_{y=2-\frac{x^2}{4}}^{5-\frac{2}{5}x^2} dy\ dx + \int_{x=a}^{b} \int_{y=0}^{5-\frac{2}{5}x^2} dy\ dx$$

Die Werte a und b bestimmt man aus den folgenden Gleichungen:

$$a: \quad g(x) = 0, \quad 2 - \frac{x^2}{4} = 0, \quad a = 2\sqrt{2}$$

$$b: \quad f(x) = 0, \quad 5 - \frac{2}{5}x^2 = 0, \quad b = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$A = \int_{x=0}^{2\sqrt{2}} \left(3 - \frac{3}{20}x^2\right) dx + \int_{x=2\sqrt{2}}^{5/\sqrt{2}} \left(5 - \frac{2}{5}x^2\right) dx =$$

$$= \frac{26}{5}\sqrt{2} + \frac{7}{15}\sqrt{2} = \frac{17}{3}\sqrt{2} \simeq 8.014 \ \text{(FE)}$$

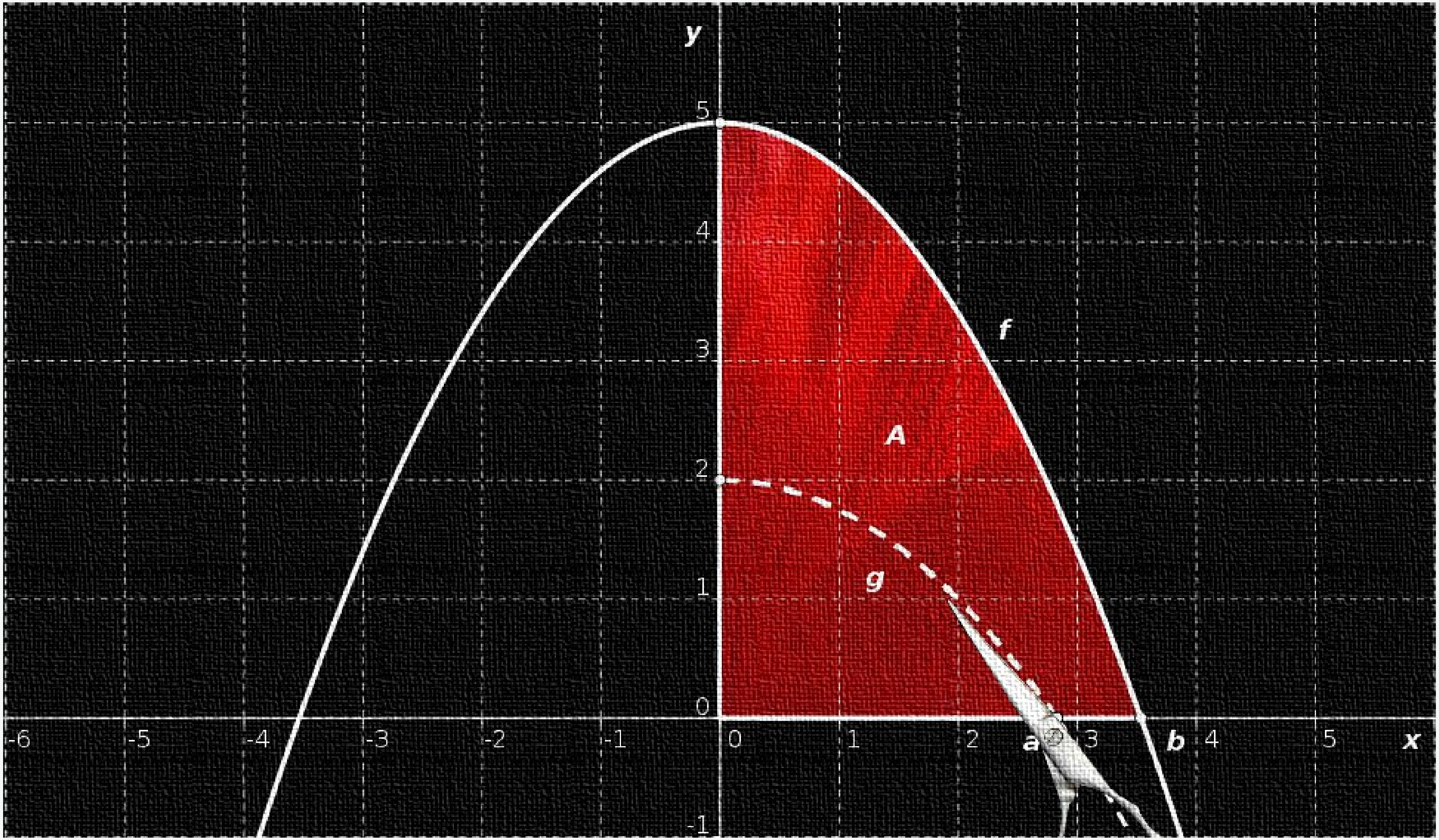


Abb. L4-3: Zur Berechnung der Fläche A zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

Wir bestimmen zwei Flächen: die Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und x-Achse im Intervall $[0, b]$

$$A_1 = \int_{x=0}^{b} \int_{y=0}^{f(x)} dy \ dx$$

und dann die Fläche zwischen der Funktion $y = g(x)$ und x-Achse im Intervall $[0, a]$

$$A_2 = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{g(x)} dy \ dx$$

Die gesuchte Fläche ergibt sich als Differenz von beiden Flächen:

$$A_1 - A_2 = \int_{x=0}^{b} \int_{y=0}^{f(x)} dy \ dx - \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{g(x)} dy \ dx =$$

$$= \int_{x=0}^{5/\sqrt{2}} \int_{y=0}^{5-\frac{2}{5}x^2} dy \ dx - \int_{x=0}^{2\sqrt{2}} \int_{y=0}^{2-\frac{x^2}{4}} dy \ dx = 8.014 \ \text{FE}$$

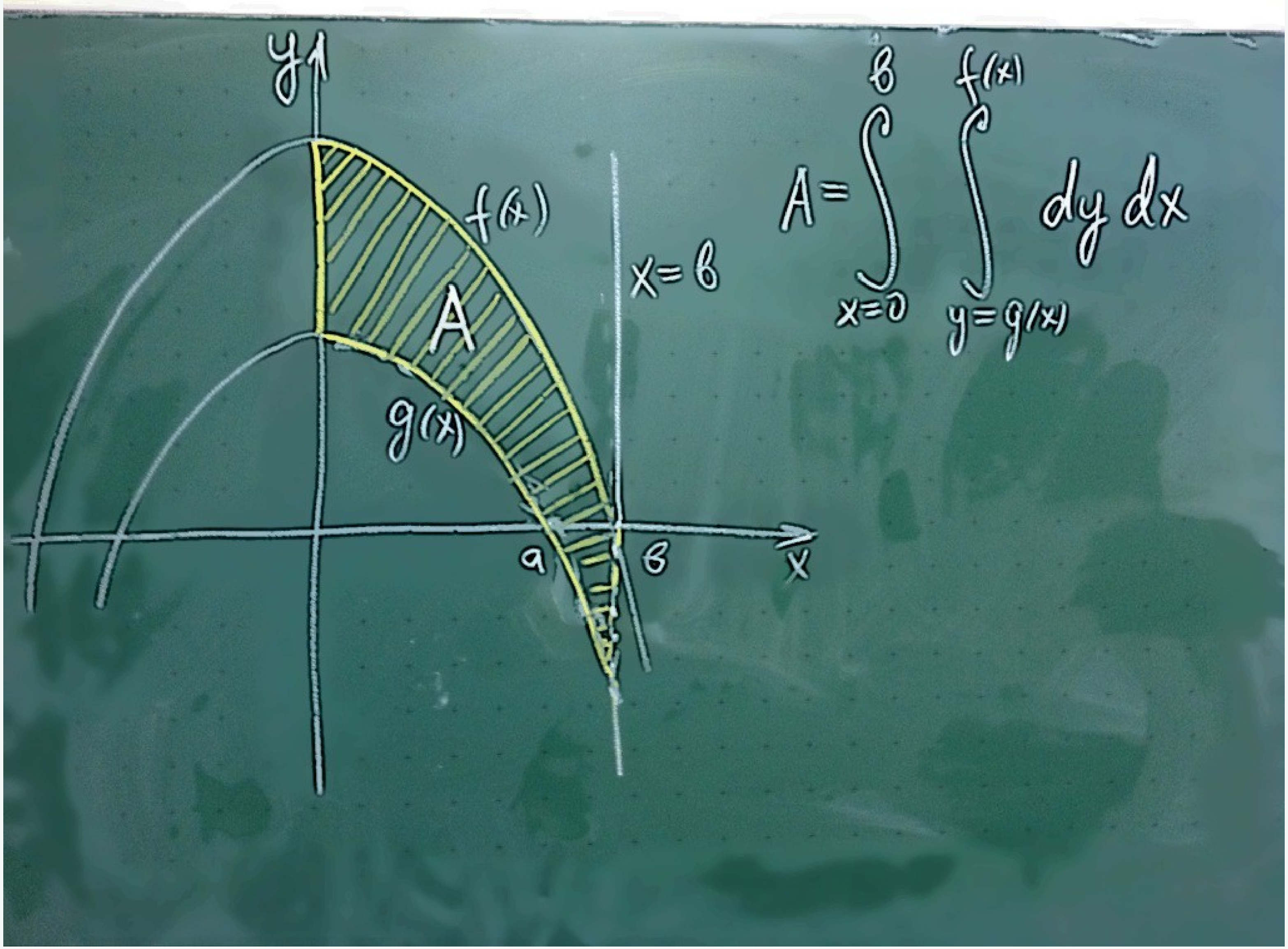
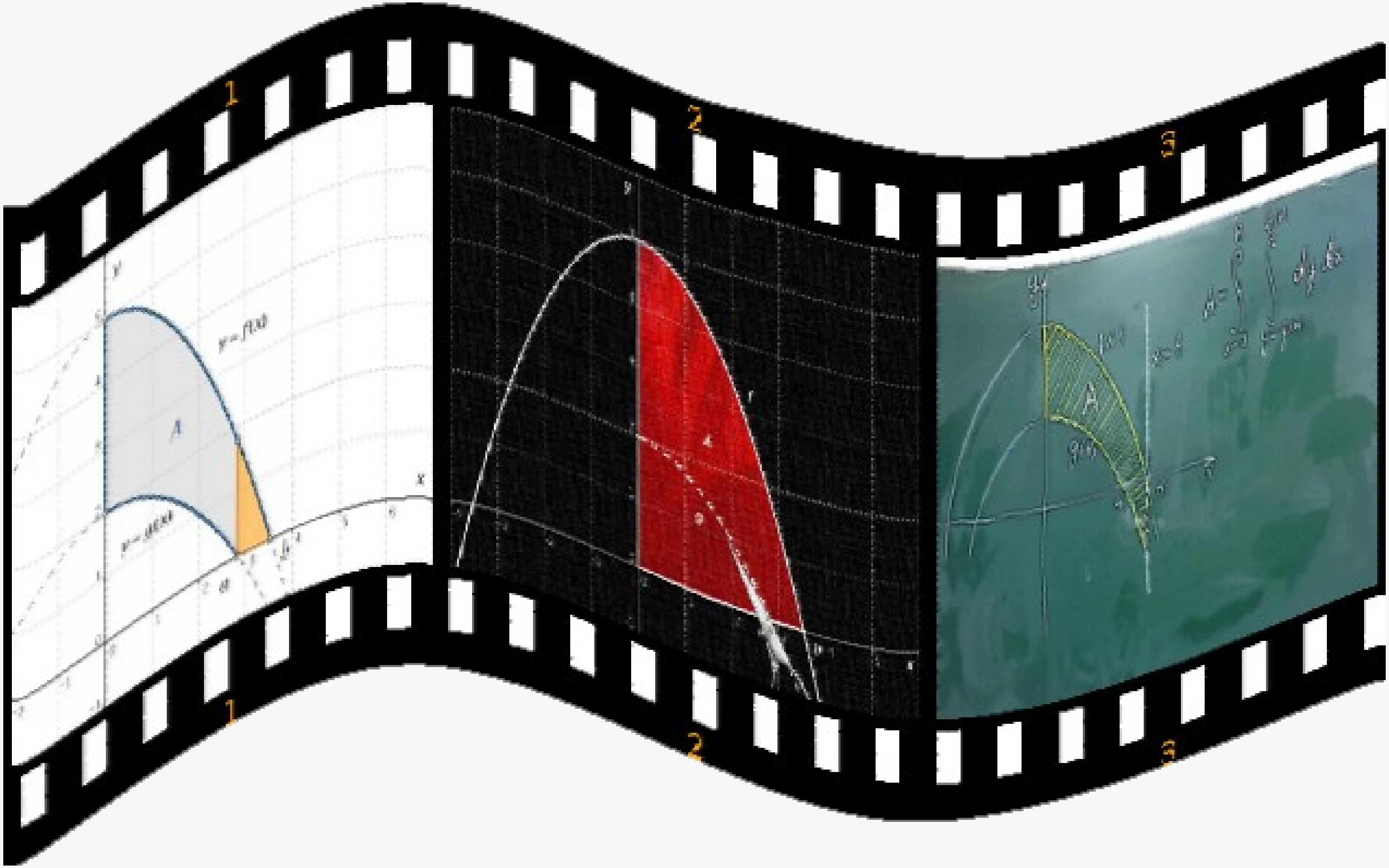


Abb. L4-4: Die Integrationsgrenzen $0 \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$ entsprechen der anderen Fläche



y = f(x)
y = g(x)
A

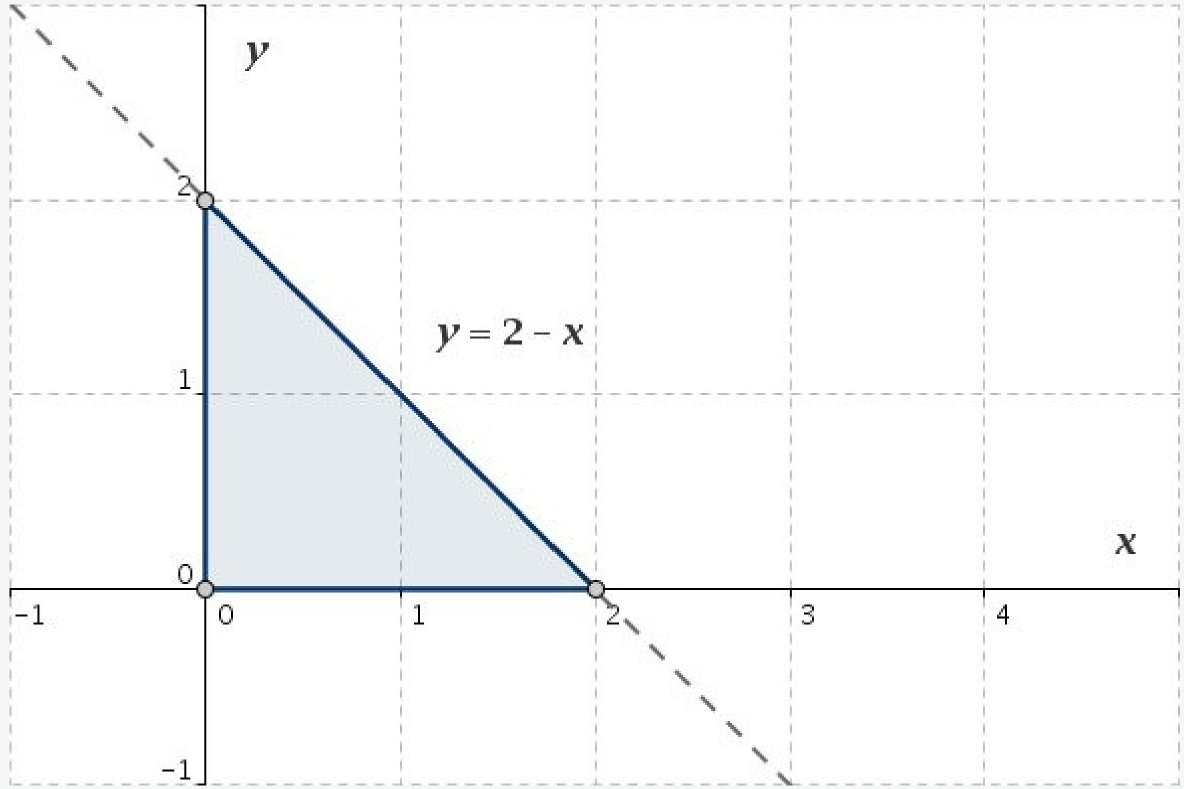


Abb. L5: Die zwischen den Geraden y = 2 – x, x = 0 und y = 0 eingeschlossene Fläche

1 Variante: $$A = \int_{x=0}^{2} dx \int_{y=0}^{2-x} dy = \int_0^2 (2 - x)\, dx = 2 \quad (\mathrm{FE})$$

2 Variante: $$A = \int_{y=0}^{2} dy \int_{x=0}^{2-y} dx = \int_0^2 (2 - y)\, dy = 2 \quad (\mathrm{FE})$$

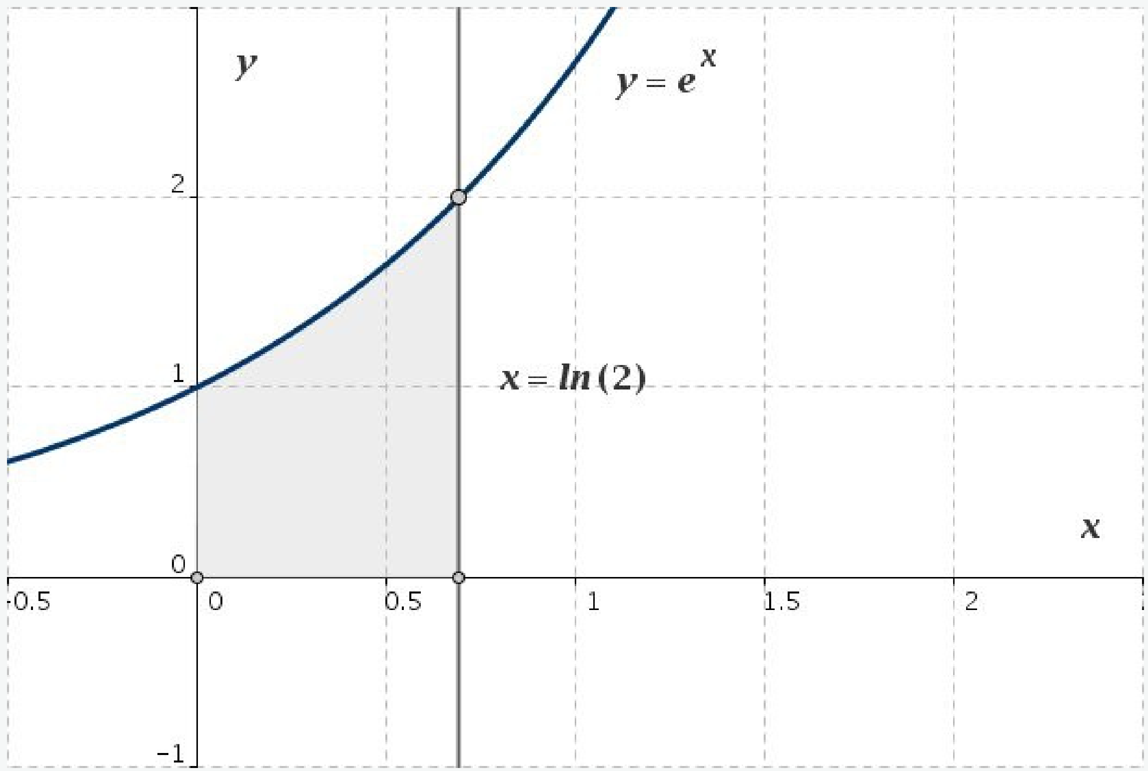


Abb. L6: Die Fläche der Aufgabe

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$$A = \int\limits_{x=0}^{\ln 2} dx \int\limits_{y=0}^{e^x} dy = \int\limits_{0}^{\ln 2} e^x \, dx = e^{\ln 2} - 1 = 1 \quad (\mathrm{FE})$$

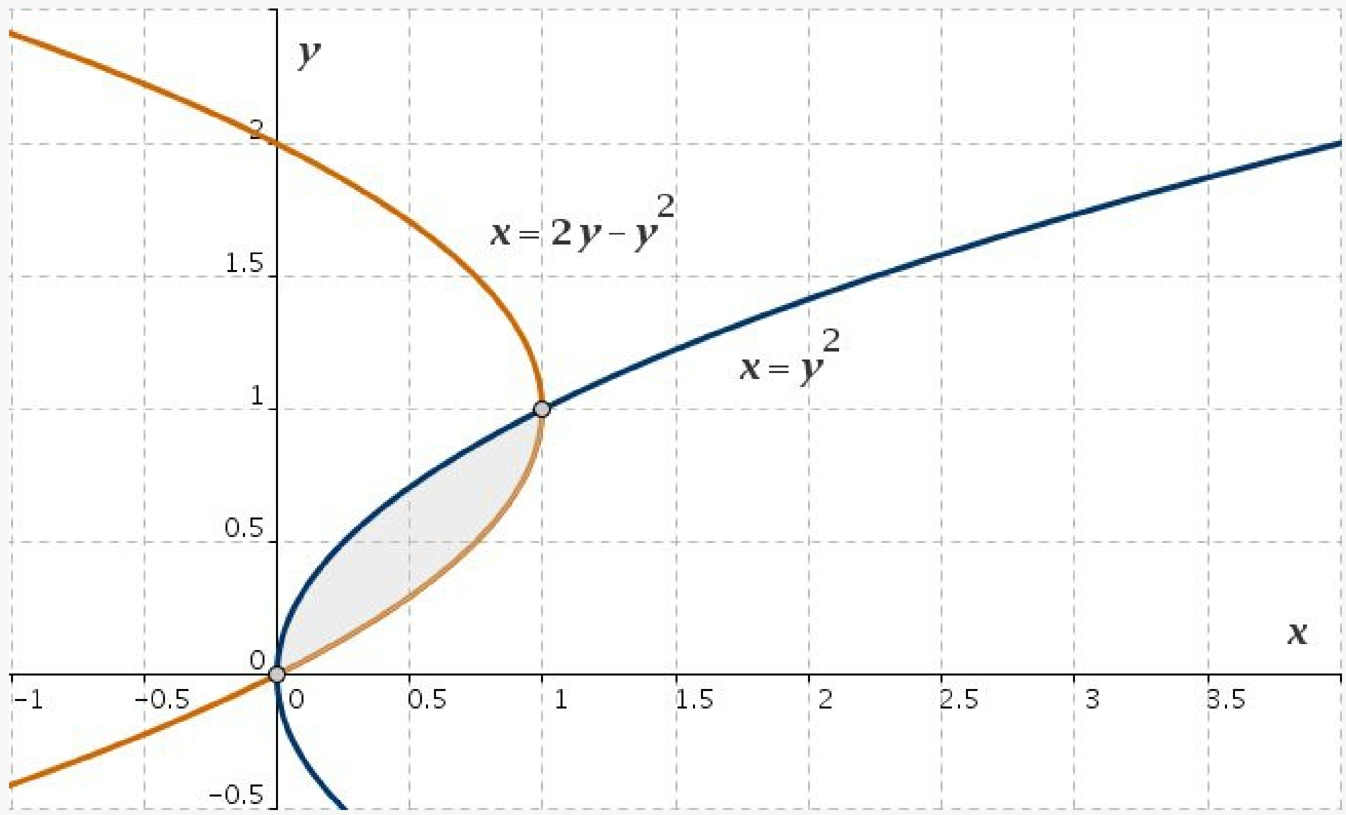


Abb. L7: Die Fläche der Aufgabe

$$x = y^2, \qquad x = 2\,y - y^2, \qquad S_1 = (0,\ 0)\,, \qquad S_2 = (1,\ 1)$$

$$A = \int_{y=0}^{1} dy \int_{x=y^2}^{2\,y\,-\,y^2} dx = 2 \int_0^1 (y - y^2)\ dy = \frac{1}{3}\ \ (\mathrm{FE})$$

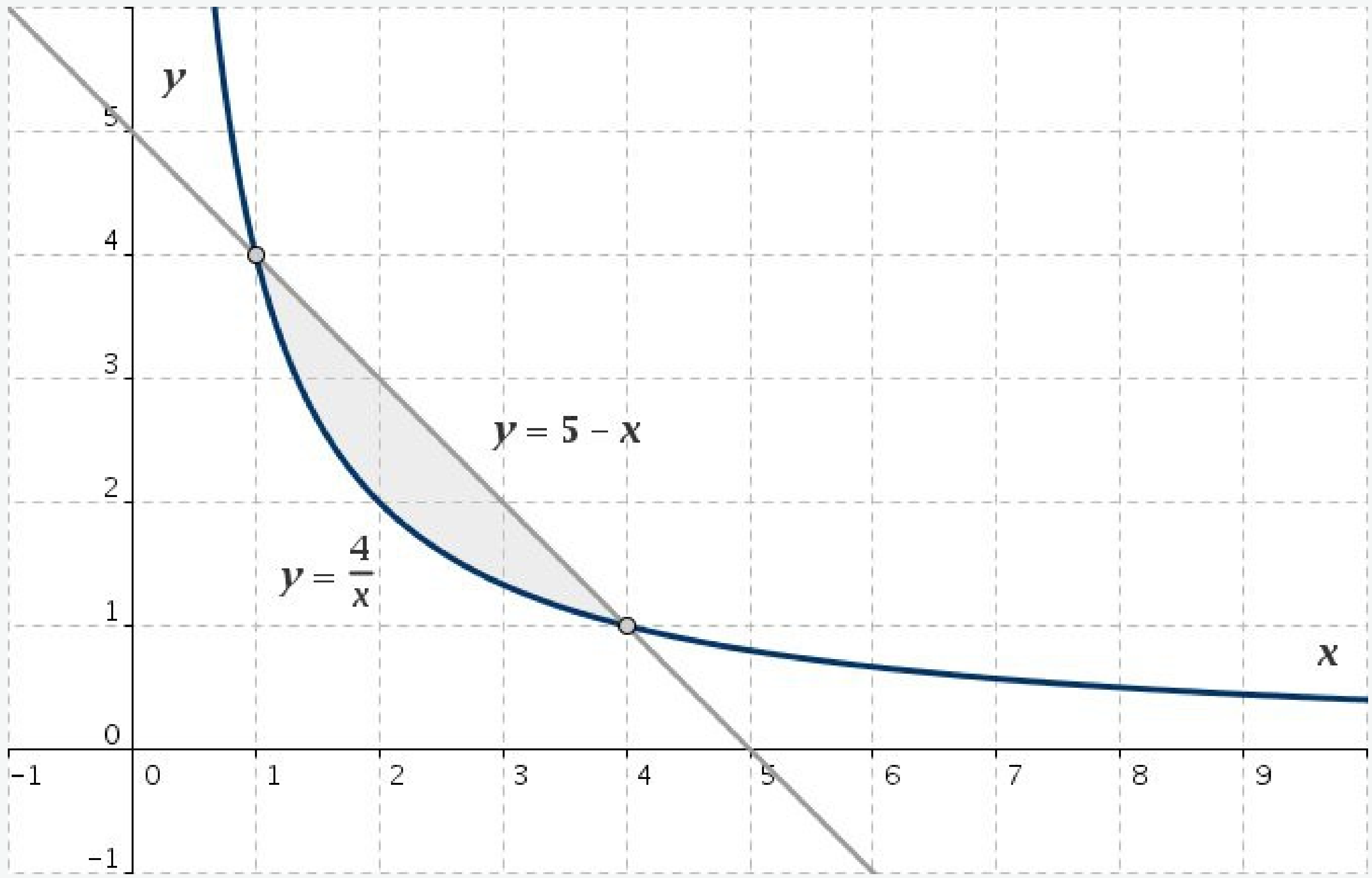


Abb. L13: Die gesuchte Fläche der Aufgabe 13

$$x\,y = 4\,, \qquad x + y - 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{4}{x} = 5 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5\,x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 4\,, \qquad S_1 = (1,\ 4)\,, \qquad S_2 = (4,\ 1)$$

$$A = \int_{x=1}^{4} dx \int_{y=\frac{4}{x}}^{5-x} dy = \int_{x=1}^{4} \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \simeq 1.954 \ \ (\text{FE})$$

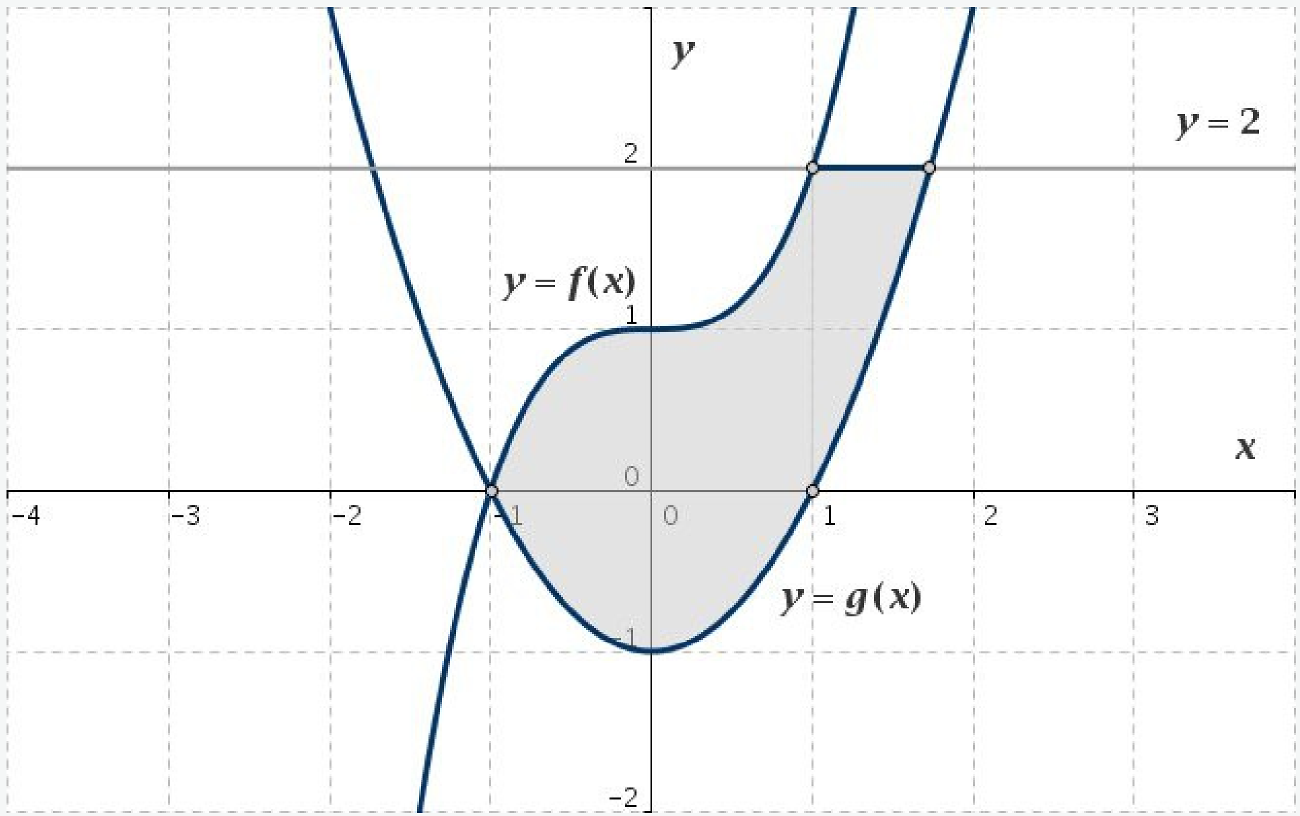


Abb. L9-1: Fläche der Aufgabe

Bestimmen Sie die Fläche, die von den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ und der Geraden $y = 2$ eingeschlossen sind

$$f(x) = x^3 + 1, \qquad g(x) = x^2 - 1, \qquad y = 2$$

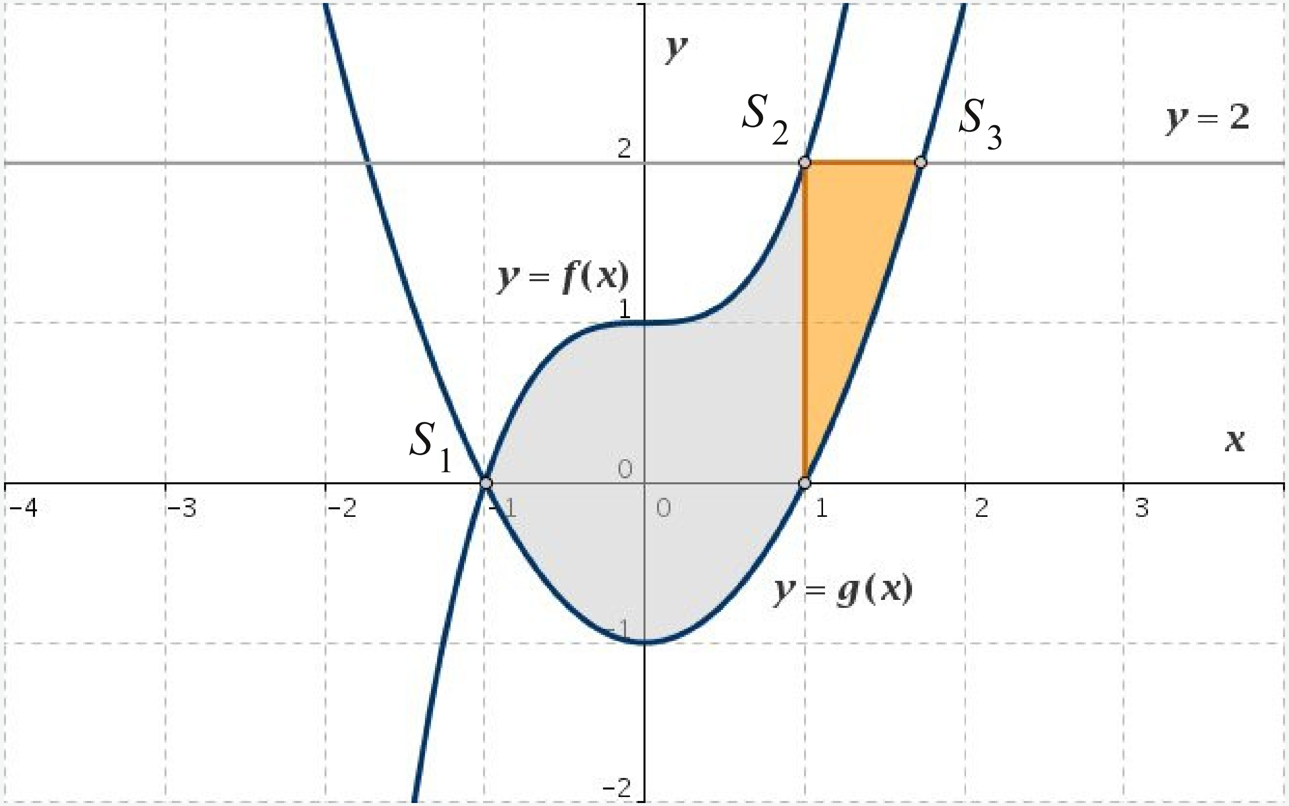


Abb. L19-2: Die Fläche der Aufgabe mit zwei Integrationsbereichen

$$S_1 = (-1,\ 0)\,, \qquad S_2 = (1,\ 2)\,, \qquad S_3 = (\sqrt{3}\,,\ 2)$$

$$A = \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=g(x)}^{f(x)} dx\, dy + \int\limits_{x=1}^{\sqrt{3}} \int\limits_{y=g(x)}^{2} dx\, dy$$

$$A = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\, dx + \int_{x=1}^{\sqrt{3}} \int_{y=g(x)}^{2} dy\, dx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=x^2-1}^{x^3+1} dy\, dx + \int_{x=1}^{\sqrt{3}} \int_{y=x^2-1}^{2} dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 + 2)\, dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} + 2\sqrt{3} \simeq 4.13 \quad (\mathrm{FE})$$