Flächen, die wir beobachten

“Flächeninhalt”

“Flächeninhalt”

Abb. 1-1: Haus (Fragment), Mönckebergstraße, Hamburg

Abb. 1-2: Die gesuchte Fläche A

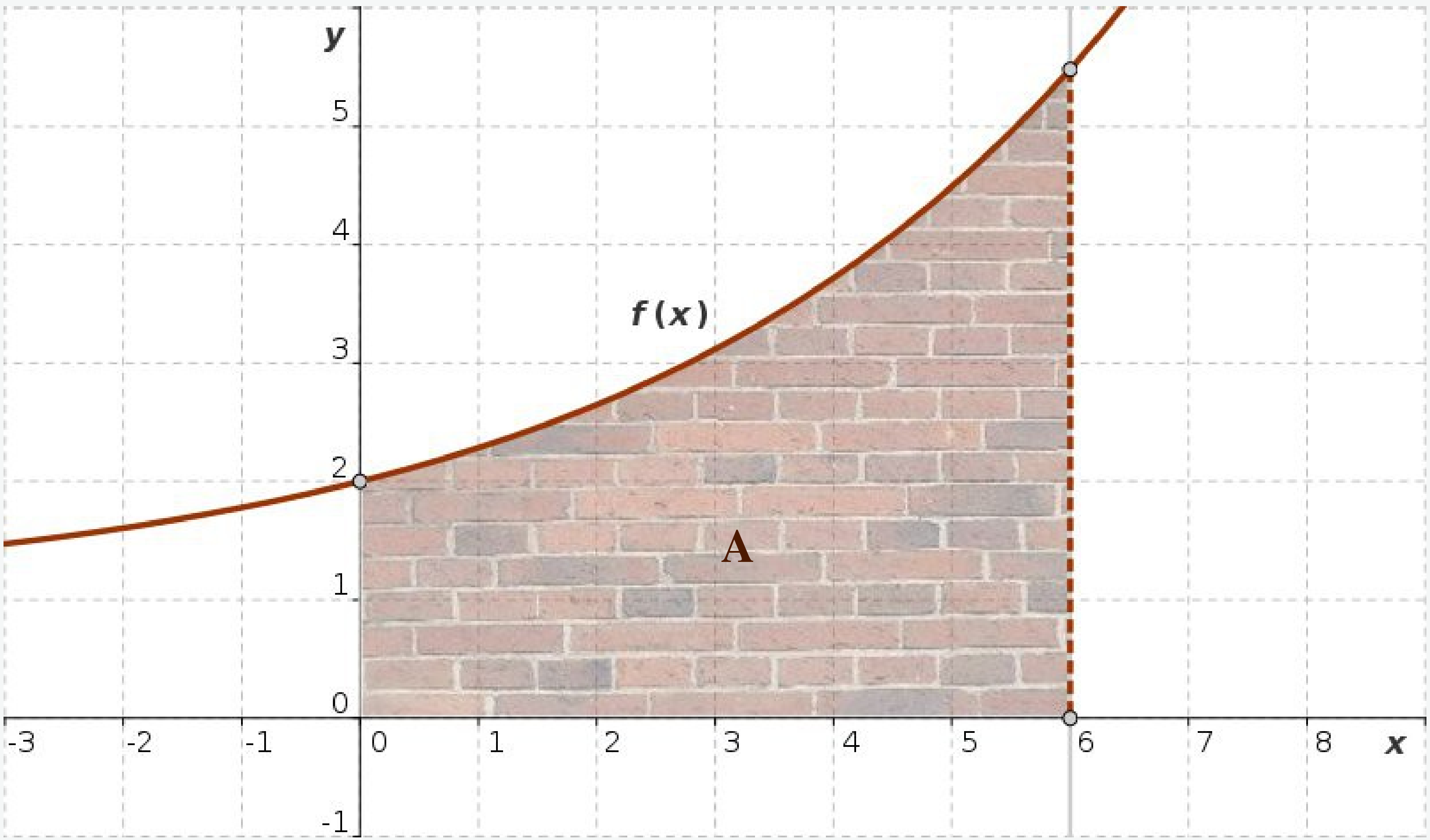

Abb. 1-3: Die Darstellung der Fläche durch Funktionen

$$f(x) = e^{\frac{x}{4}} + 1, \qquad y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 6$$

$$A = \int\limits_{x=0}^{6} \int\limits_{y=0}^{1+e^{\frac{x}{4}}} dy\ dx = \int\limits_{0}^{6} \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx = \left[4\, e^{\frac{x}{4}} + x\right]_0^6 = 2\left(1 + 2\, e^{\frac{3}{2}}\right) = 19.9 \text{ FE}$$

Abb. 2-1: Haus (Fragment), Lüneburg

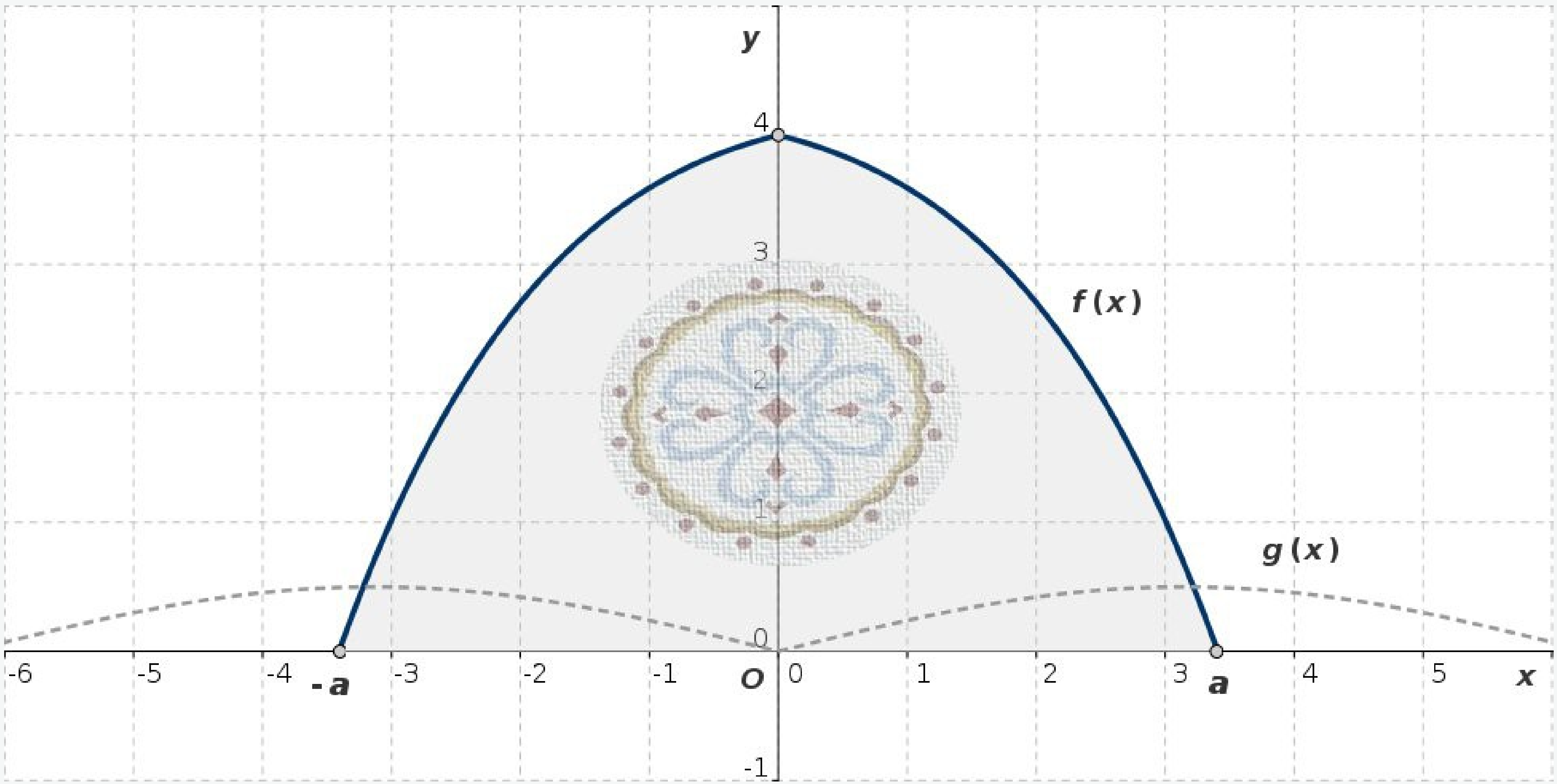

Abb. 2-2: Die Fläche zwischen der Funktion $y = f(x)$ und x-Achse

$$f(x) = 5 - e^{\left|\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|, \qquad y = 0, \qquad a = 3.4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

Die gesuchte Fläche ist symmetrisch zur y-Achse. Deshalb kann die Integration über x dadurch vereinfacht werden, dass nur über den positiven x-Bereich integriert wird

$$\int_{x=-a}^{a} f(x)\ dx = 2 \int_{x=0}^{a} f(x)\ dx$$

Die Funktion $f(x)$ hat zwei Betragsterme:

$$f(x) = 5 - e^{\left|\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Den ersten Betragsterm kann man in diesem Bereich ohne Betragszeichen schreiben

$$x \geqslant 0: \qquad e^{\left|\frac{x}{2}\right|} = e^{\frac{x}{2}}$$

Der zweite Betragsterm darf nur dann ohne Betragszeichen geschrieben werden, wenn die *sin*-Funktion im Bereich $[0, a]$ positive Funktionswerte hat, was in der Tat der Fall ist (siehe Abb. *2-2*):

$$x \in [0,\ a]: \qquad \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = 5 - e^{\left|\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

$$x \in [0,\ a]: \qquad f(x) = 5 - e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A = \int\limits_{x=-a}^{a}\int\limits_{y=0}^{f(x)} dy\ dx = 2\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{f(x)} dy\ dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\ dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{a}\left(5 - e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx =$$

$$= 2\left[5\,x - 2\,e^{\frac{x}{2}} - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a = 2\left[3 + 5\,a - 2\,e^{\frac{a}{2}} - \cos\left(\frac{a}{2}\right)\right]_{a=3.4}$$

Abb. 3-1: Haus (Fragment), Lüneburg

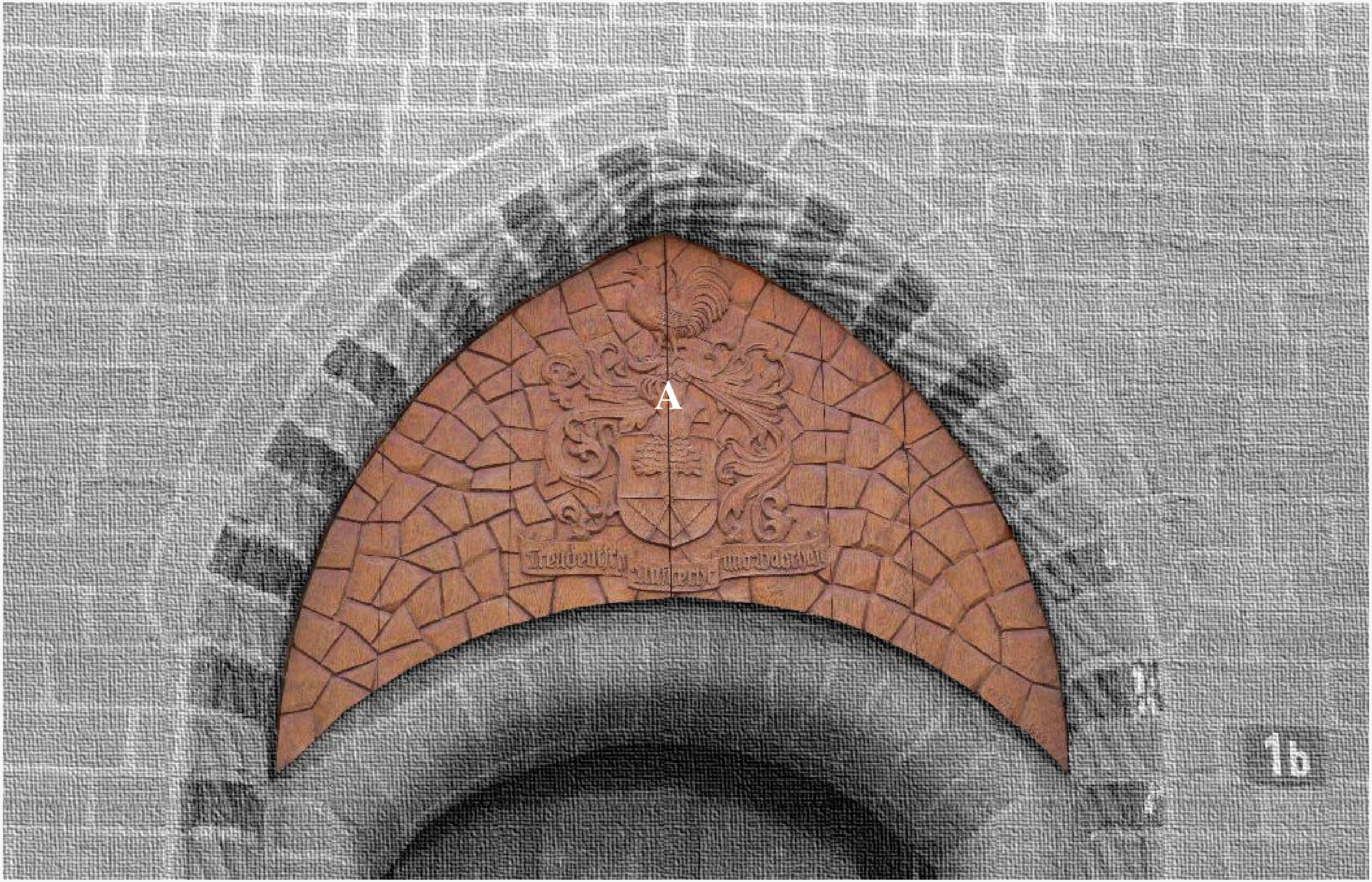

Abb. 3-2: Die gesuchte Fläche A

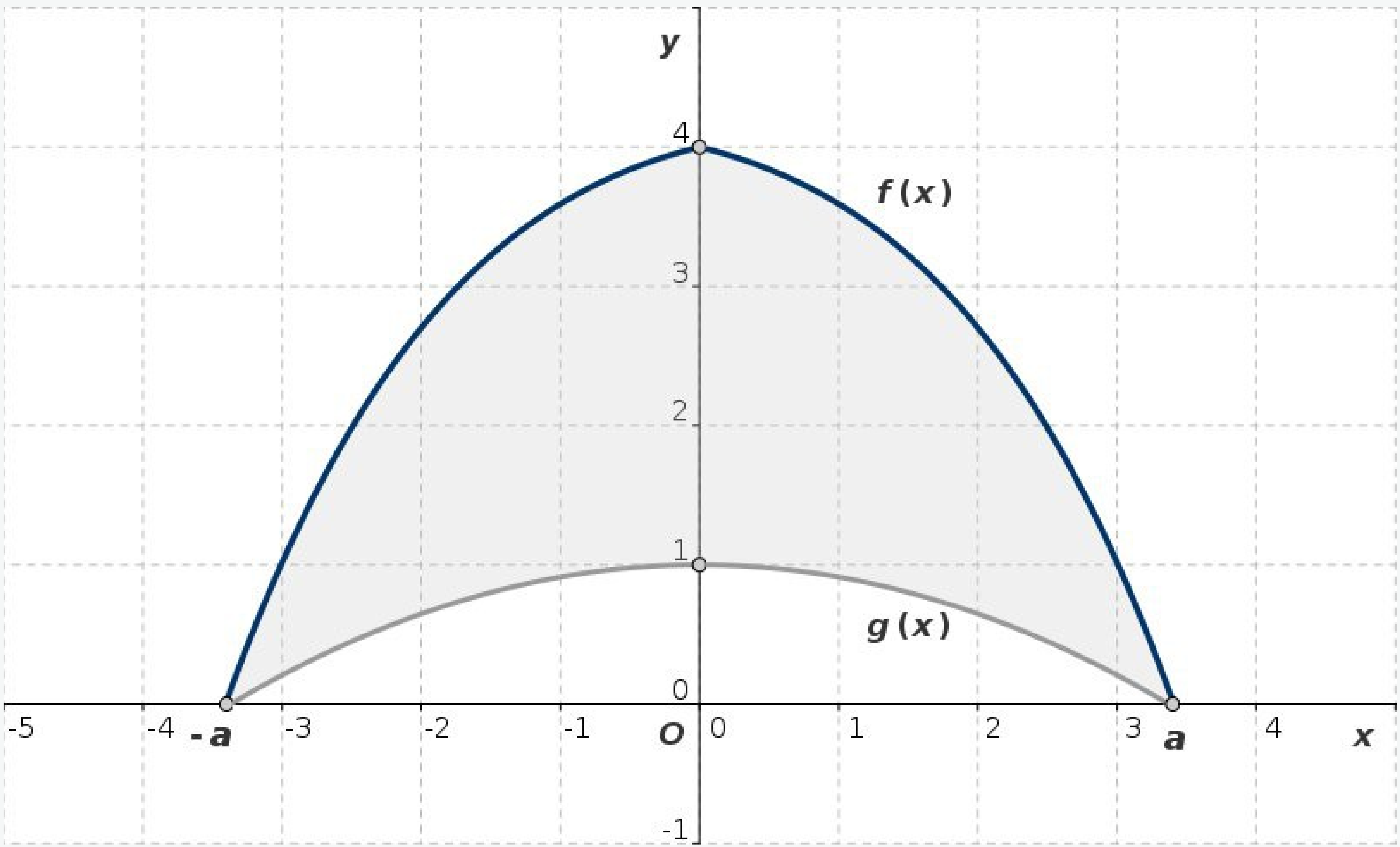

Abb. 3-3: Die Fläche zwischen den Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = 5 - e^{\left|\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|, \qquad g(x) = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad a = 3.4$$

$$f(x) = 5 - e^{\left|\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|, \qquad g(x) = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$x \in [0,\ a]: \qquad f(x) = 5 - e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A = \int_{x=-a}^{a}\int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\ dx = 2\int_{x=0}^{a}\int_{y=g(x)}^{f(x)} dy\ dx = 2\int_{0}^{a}(f(x) - g(x))\ dx =$$

$$= 2\int_{0}^{a}\left(4 - e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\left[4x - 2e^{\frac{x}{2}} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a =$$

$$= 2\left(3 + \frac{13}{3}a - 2e^{\frac{a}{2}} - \cos\left(\frac{a}{2}\right)\right) \text{FE}$$

Abb. 4-1: St-Petri Kirche, Hamburg

Abb. 4-2: Die gesuchte Fläche A

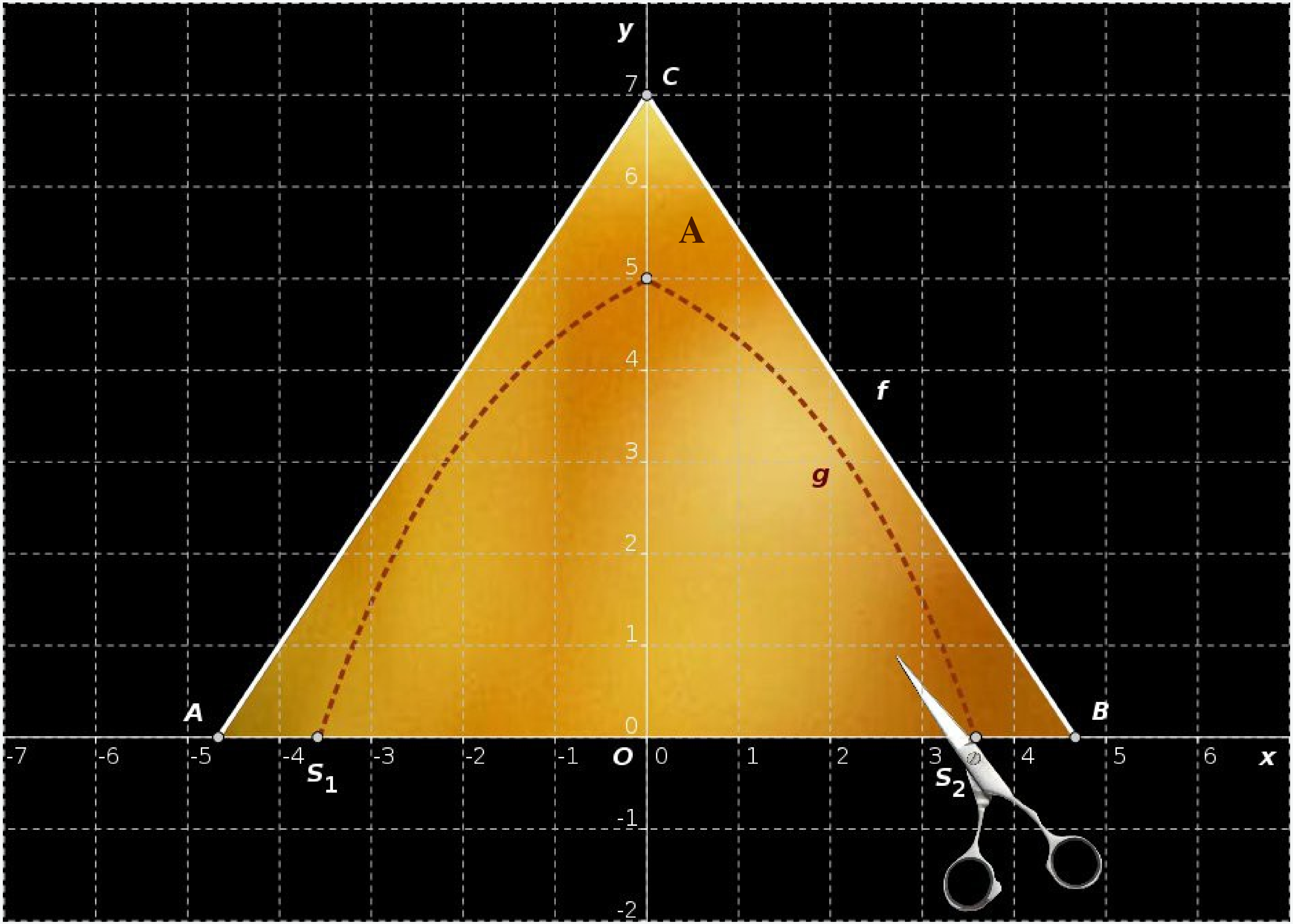

Abb. 4-3: Integration durch Subtraktion der Fläche unter der Funktion g(x) von der Dreiecksfläche

$$f(x) = 7 - \frac{3}{2}|x|, \quad g(x) = 6 - e^{|x/2|}$$

$$f(x) = 7 - \frac{3}{2}|x|, \qquad g(x) = 6 - e^{\left|\frac{x}{2}\right|}$$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0: \quad 7 - \frac{3}{2}x = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \left(\frac{14}{3},\ 0\right)$$

$$x < 0: \quad 7 + \frac{3}{2}x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \left(-\frac{14}{3},\ 0\right)$$

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0: \quad 6 - e^{\frac{x}{2}} = 0, \quad 6 = e^{\frac{x}{2}}, \quad \ln 6 = \frac{x}{2}$$

$$x = 2\ln 6 \quad \Rightarrow \quad S_2 = (2\ln 6,\ 0), \quad S_1 = (-2\ln 6,\ 0)$$

$$A = |OC| \cdot |OB| - \int_{x=-2\ln 6}^{2\ln 6} \int_{y=0}^{6 - e^{|x/2|}} dy\ dx = 7 \cdot \frac{14}{3} - 2\int_{x=0}^{2\ln 6} \int_{y=0}^{6 - e^{x/2}} dy\ dx =$$

$$= 7 \cdot \frac{14}{3} - 2\int_{0}^{2\ln 6} \left(6 - e^{\frac{x}{2}}\right) dx = 7 \cdot \frac{14}{3} - 2\left[6x - 2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{2\ln 6} =$$

$$= 7 \cdot \frac{14}{3} + 20 - 24\ln 6 = 9.66 \text{ FE}$$