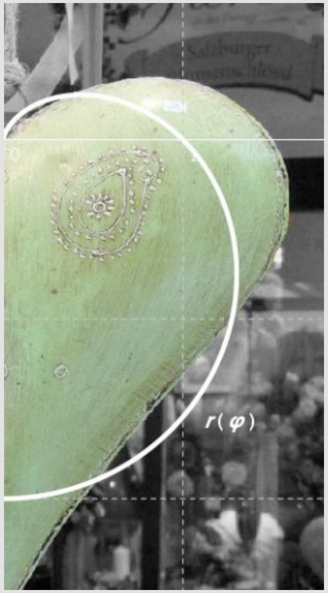
Flächen in Polarkoordinaten

Kardioide



$$x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi$$

$$r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

Fläche zwischen zwei Kurven in Polarkoordinaten:

$$A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left[r^2 \right]_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi) \right] d\varphi$$


1
2
3
y
x
r(φ)
A
R
B
C
1
2
3

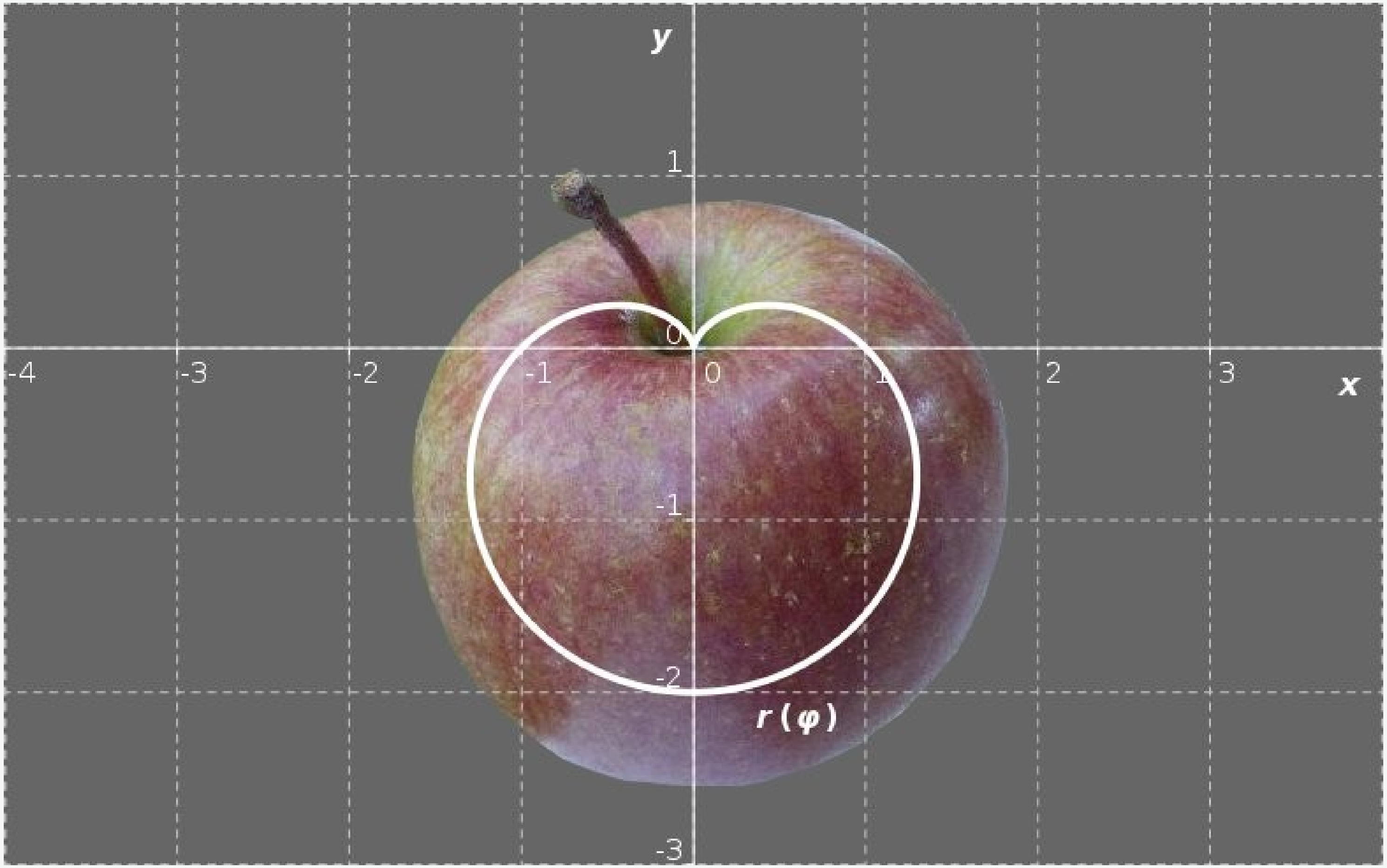


Abb. 1-1a: Die Darstellung einer Kardioide

$$r(\varphi) = 1 - \sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Abb. 1-1b: Die Darstellung einer Kardioide als Herzkurve

$$r(\varphi) = 1 - \sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

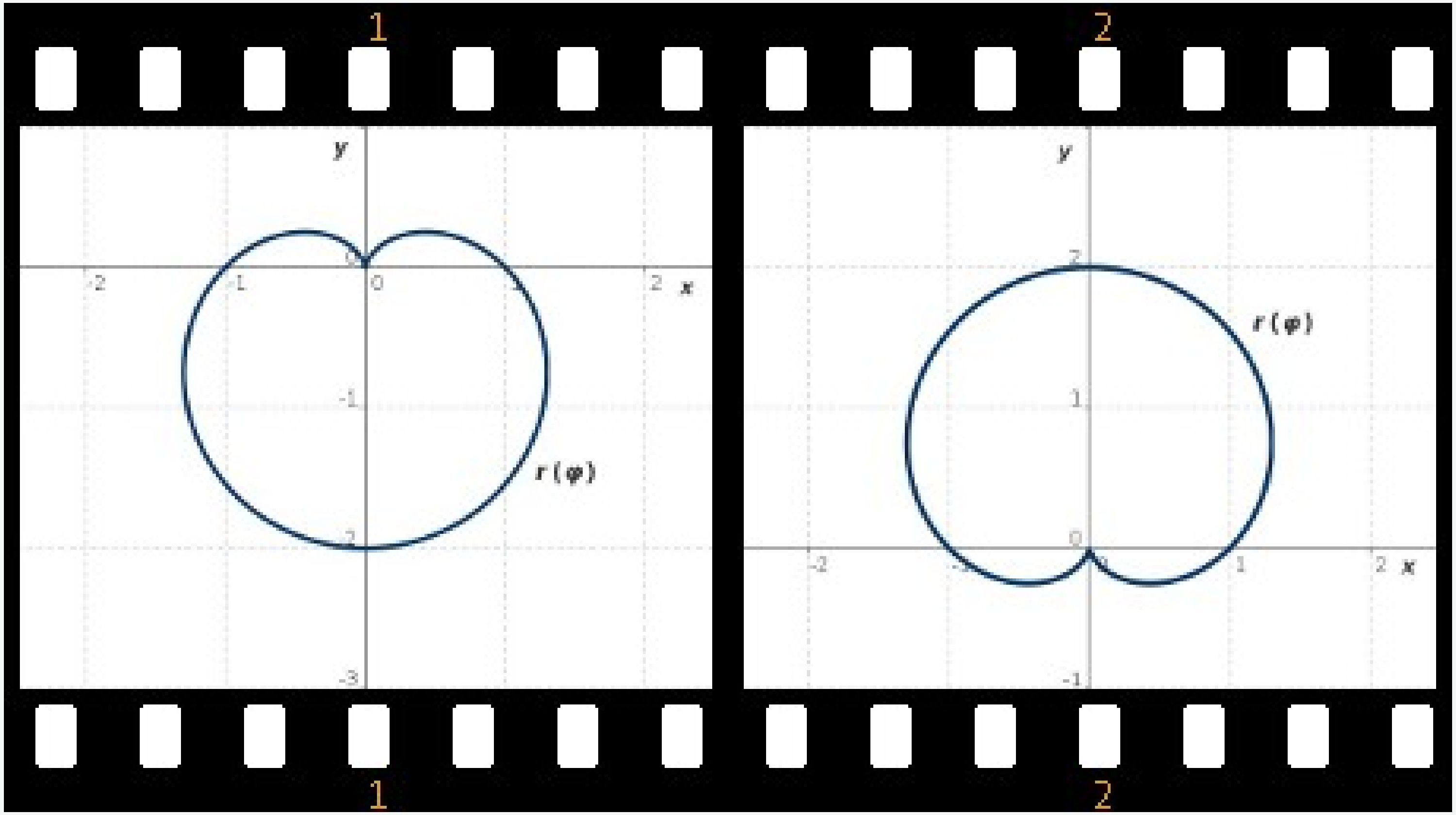


Abb. 1-2: Die Darstellung einer Kardioide

1) $r(\varphi) = 1 - \sin\varphi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$

2) $r(\varphi) = 1 + \sin\varphi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$

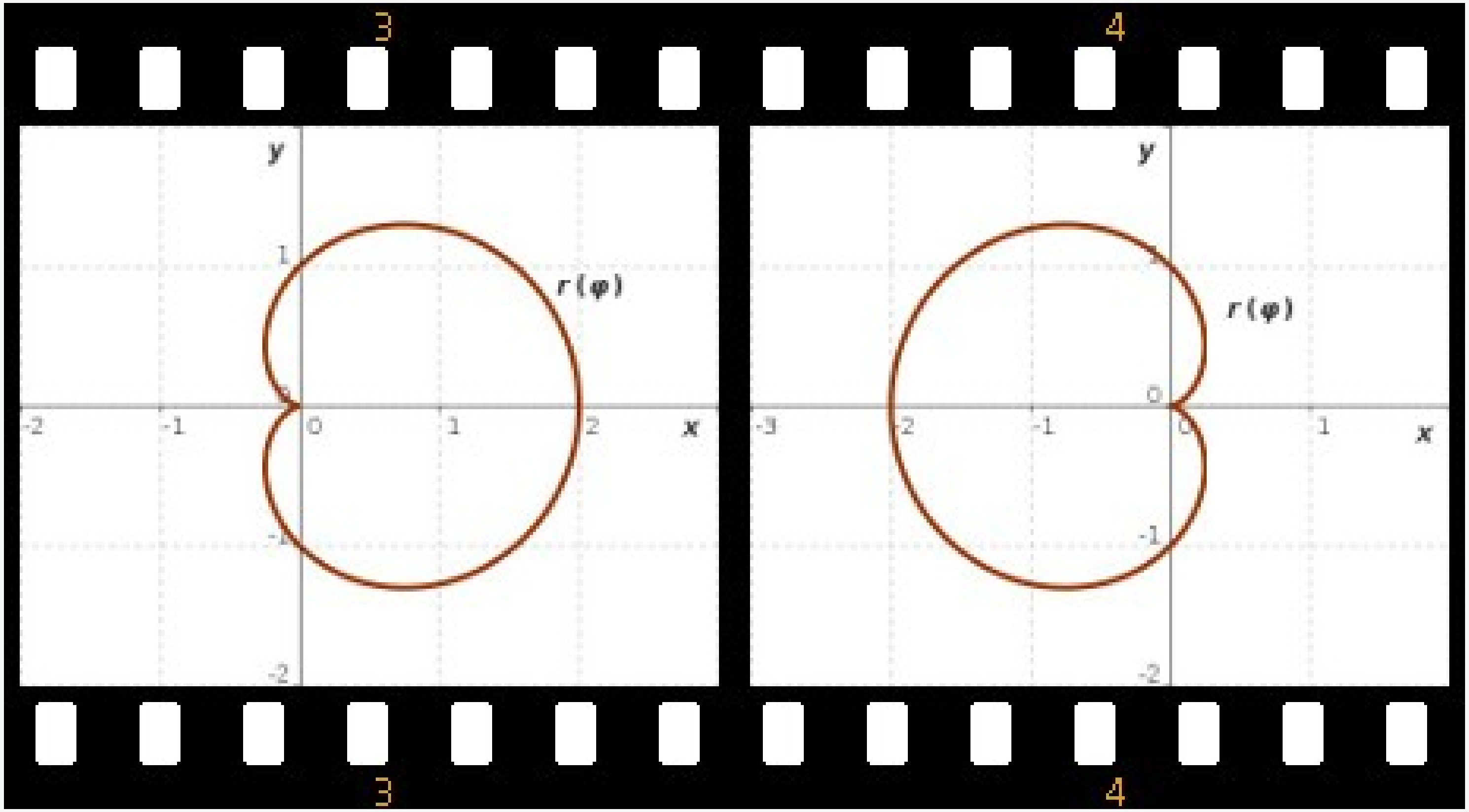
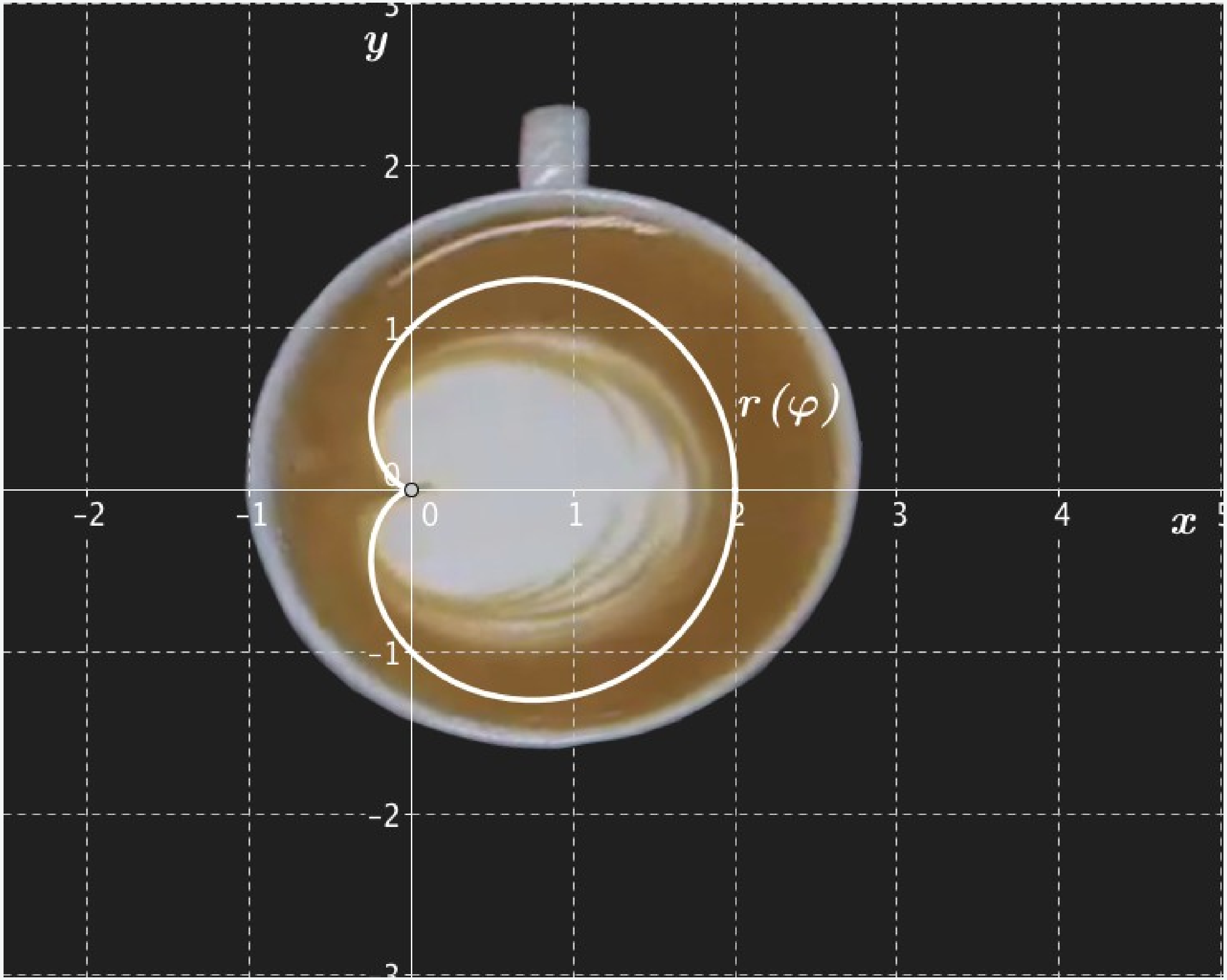


Abb. 1-3: Die Darstellung einer Kardioide

$$3)\quad r(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$4)\quad r(\varphi) = 1 - \cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$



Kardioide (die Kurve der Aufgabe) kann man z.B. in einer Kaffeetasse beobachten.

Die Kardioide $r = r(\varphi)$ berandet das dargestellte Flächenstück, dessen Flächeninhalt zu berechnen ist

$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi \quad (\text{FE})$$

Da die Fläche symmetrisch bezuglich der x-Achse ist kann man bis π integrieren und das Integral mit 2 multiplizieren:

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\,dr = 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\,dr$$

Ist die Gleichung der Kardioide $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$ ist der Flächeninhalt gleich

$$A = \frac{3}{2}\pi a^2 \quad (\mathrm{FE})$$

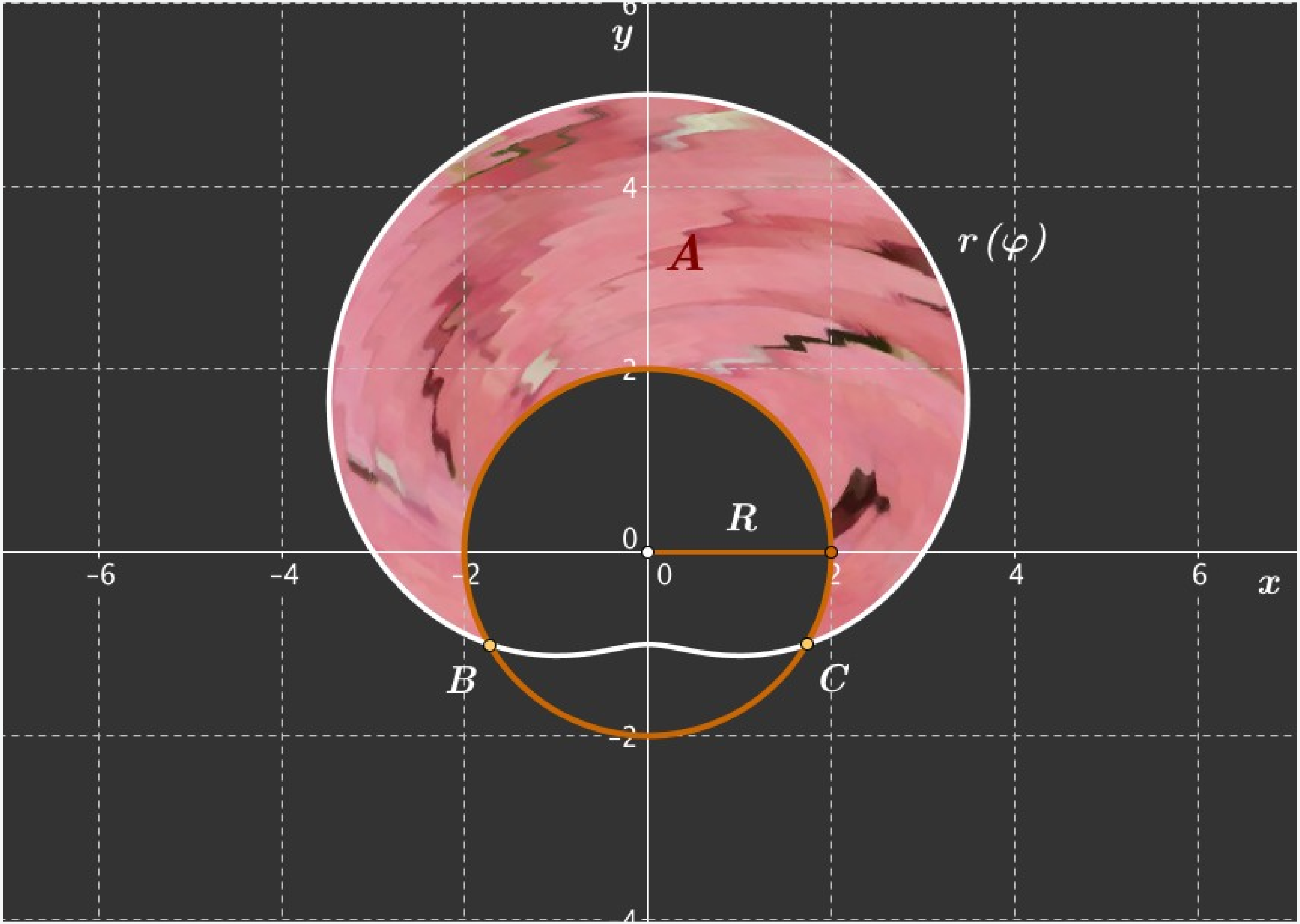


Abb. L2-1: Graphische Darstellung der Aufgabe 2

Bestimmen Sie die obere Fläche A, die innerhalb der Kurve $r(\varphi) = 3 + 2\sin\varphi$ liegt und gleichzeitig ausserhalb eines Ursprungskreises mit Radius $R = 2$.

Flächen in Polarkoordinaten: Lösung 2

Um diese Fläche zu bestimmen, müssen wir die Werte von φ kennen, wo sich die beiden Kurven schneiden

$$r(\varphi) = 3 + 2\sin\varphi\,, \qquad r(\varphi) = 2$$

Wir bestimmen die Schnittpunkt aus der Gleichung

$$3 + 2\sin\varphi = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{11\,\pi}{6}\,, \qquad \varphi_2 = \frac{7\,\pi}{6}$$

Beachten Sie, dass wir die zweite Wurzel nicht nur als $11\pi/6$, sondern auch als

$$\frac{11\,\pi}{6} - 2\,\pi = -\frac{\pi}{6}$$

angegeben haben, was für diese Aufgabe wichtig ist. Würden wir bei der Integration von $\varphi = 7\pi/6$ zum größeren $11\pi/6$ integrieren, dann würden wir die untere Fläche bestimmen. Wenn wir dagegen von $\varphi = -\pi/6$ zum größeren $7\pi/6$ integrieren, erhalten wir die gesuchte Fläche A.

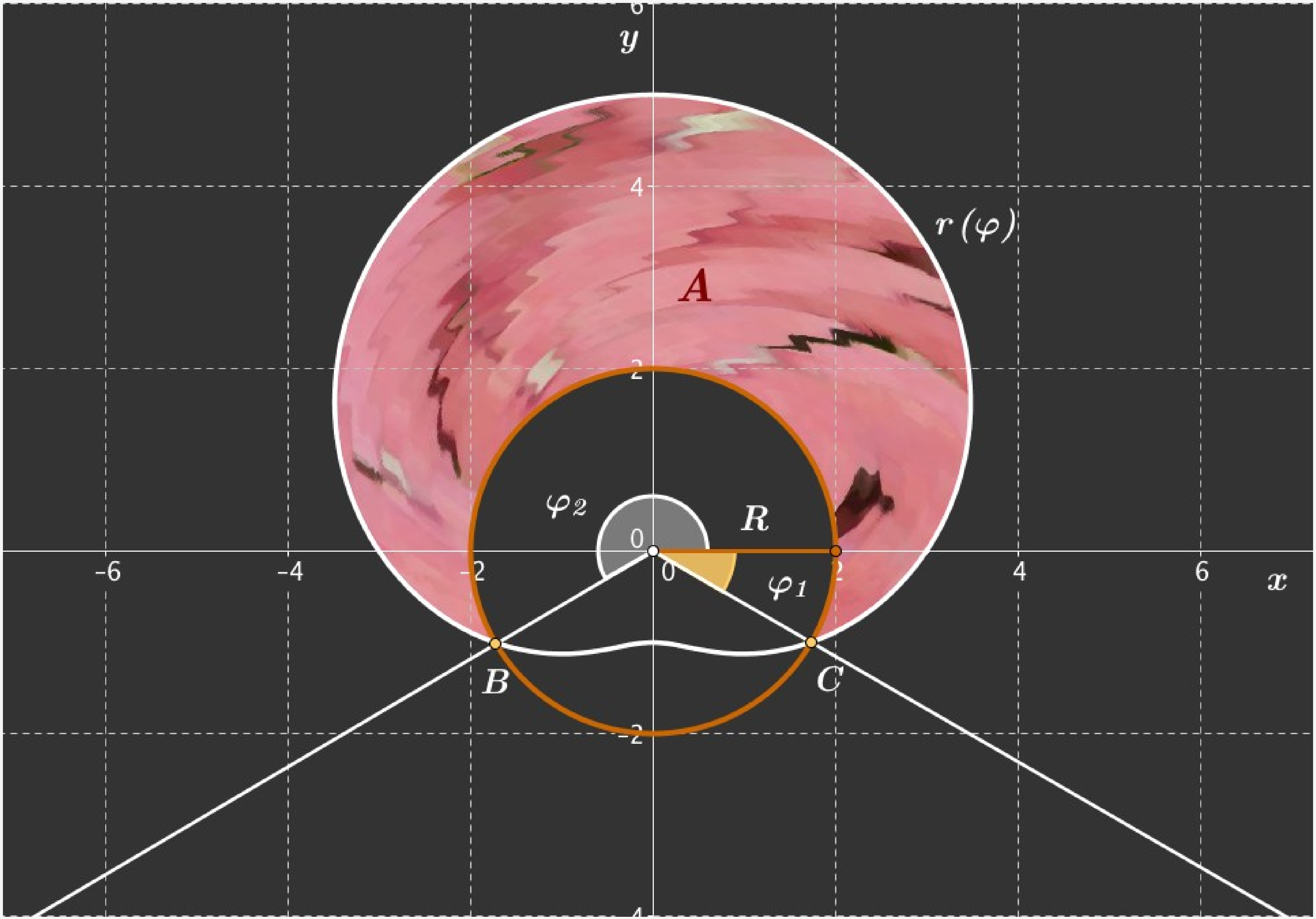


Abb. L2-2: Gezeichnete Winkeln bestimmen die Integrationsgrenzen nach φ

$$r(\varphi) = 3 + 2\sin\varphi\,, \qquad r(\varphi) = 2, \qquad -\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{7\pi}{6}$$

$$A = \int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \int\limits_{r=2}^{3+2\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (5 + 12\sin\varphi + 4\sin^2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (7 + 12\sin\varphi - 2\cos(2\varphi)) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(7\varphi - 12\cos\varphi - \sin(2\varphi)\right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} =$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14}{3}\pi \simeq 24.187 \quad (\mathrm{FE})$$

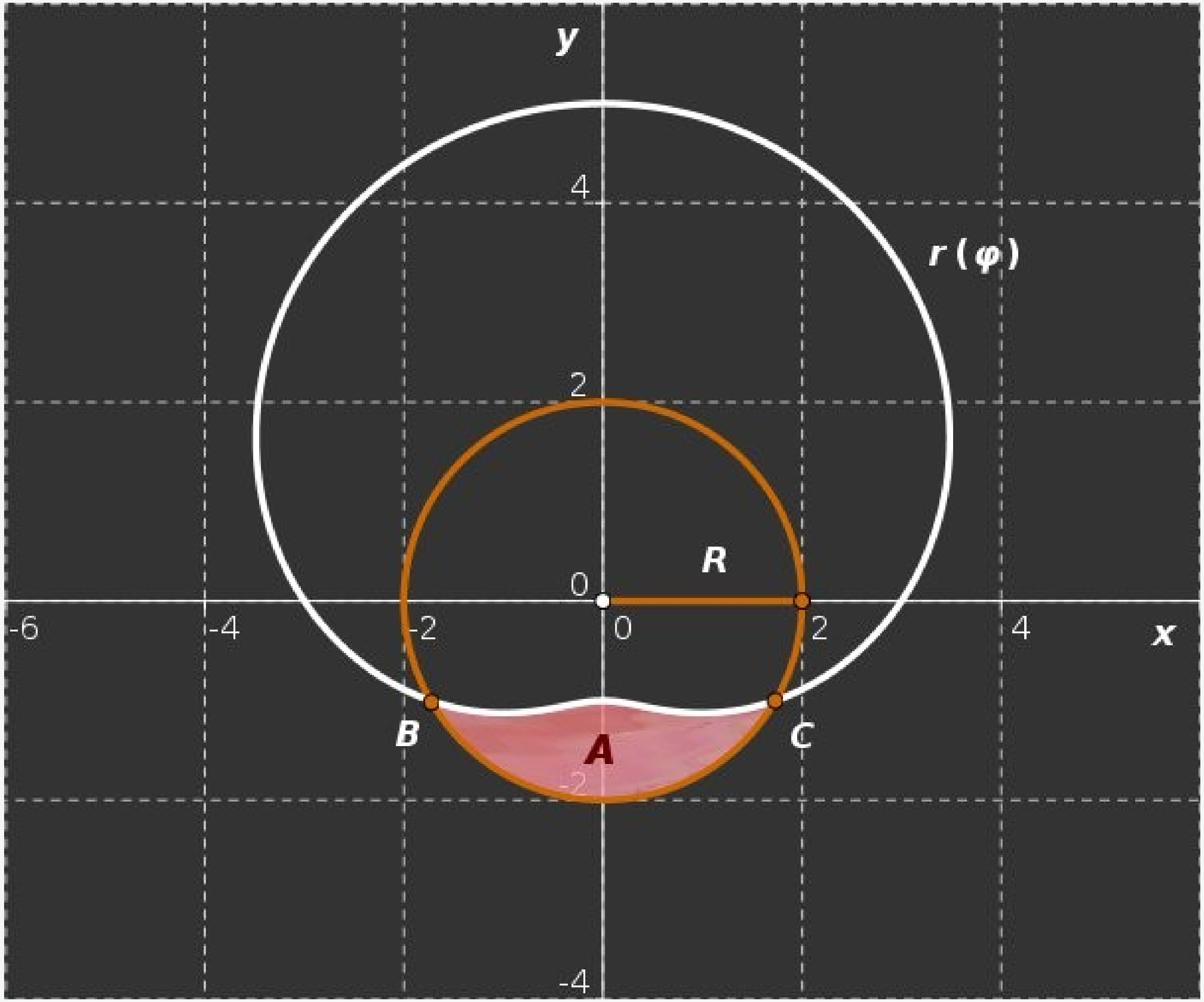


Abb. L3-1: Graphische Darstellung der Aufgabe

Bestimmen Sie jetzt die Fläche, die außerhalb der Kurve $r(\varphi) = 3 + 2\sin\varphi$ liegt und innerhalb eines Ursprungskreises mit Radius $R = 2$.

$$r(\varphi) = 3 + 2\sin\varphi\,, \qquad r(\varphi) = 2, \qquad \frac{7\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{11\pi}{6}$$

$$A = \int\limits_{\varphi=\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \int\limits_{r=3+2\sin\varphi}^{2} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(2^2 - (3 + 2\sin\varphi)^2\right)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(7 + 12\sin\varphi - 2\cos(2\varphi)\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-7\varphi + 12\cos\varphi + \sin(2\varphi)\right) \Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} =$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{3}\pi \simeq 2.196 \quad (\text{FE})$$

Flächen in Polarkoordinaten: Lösung 3

Man beachte, dass jetzt der Kreis die äußere Funktion ist und

$$r(\varphi) = 3 + 2 \sin \varphi$$

die innere. Deshalb hat die Differenz äußere Funktion – innere Funktion jetzt das umgekehrte Vorzeichen.

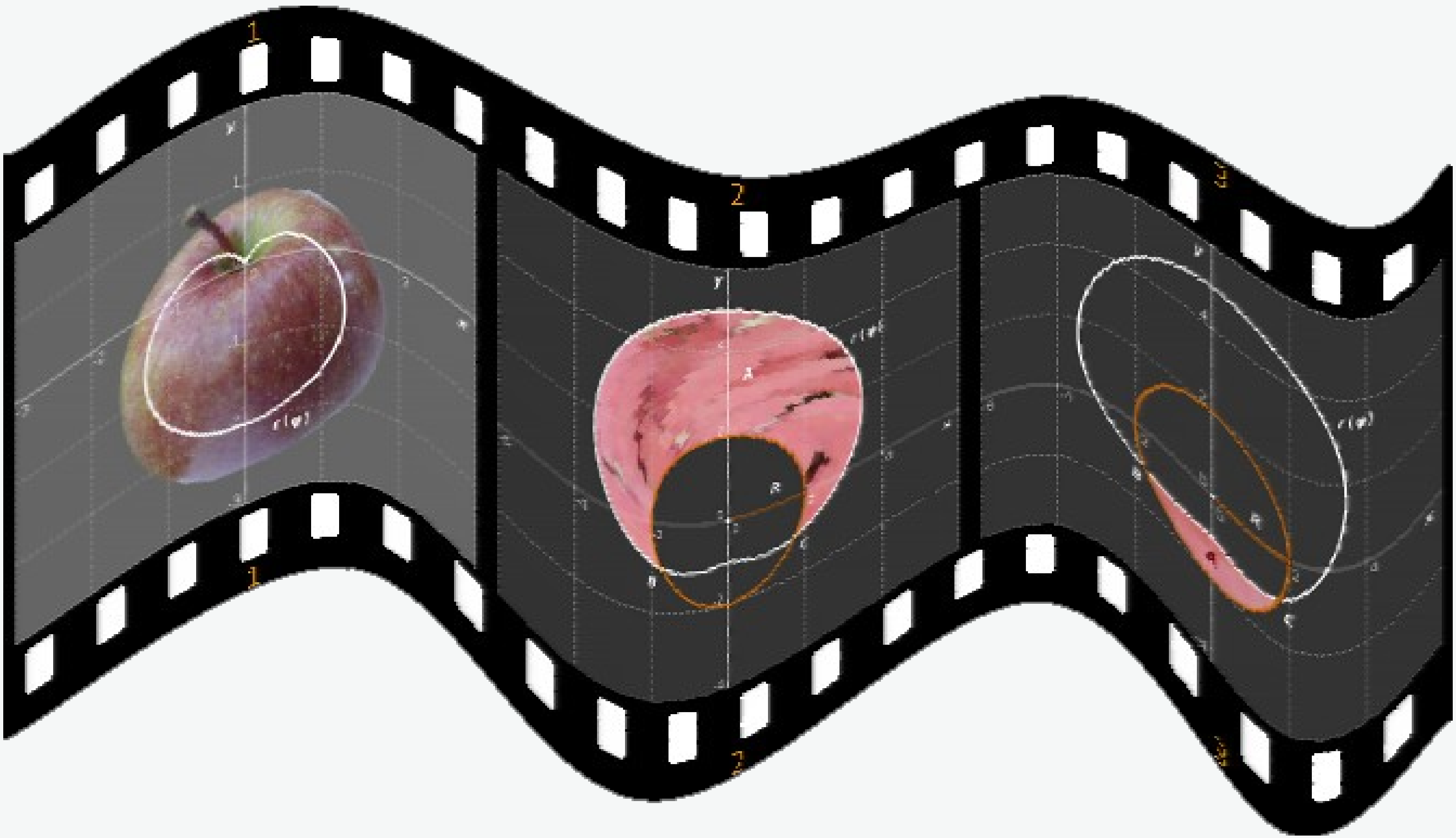


Abb.2-1: Die Darstellung einer Kardioide als Herzkurve

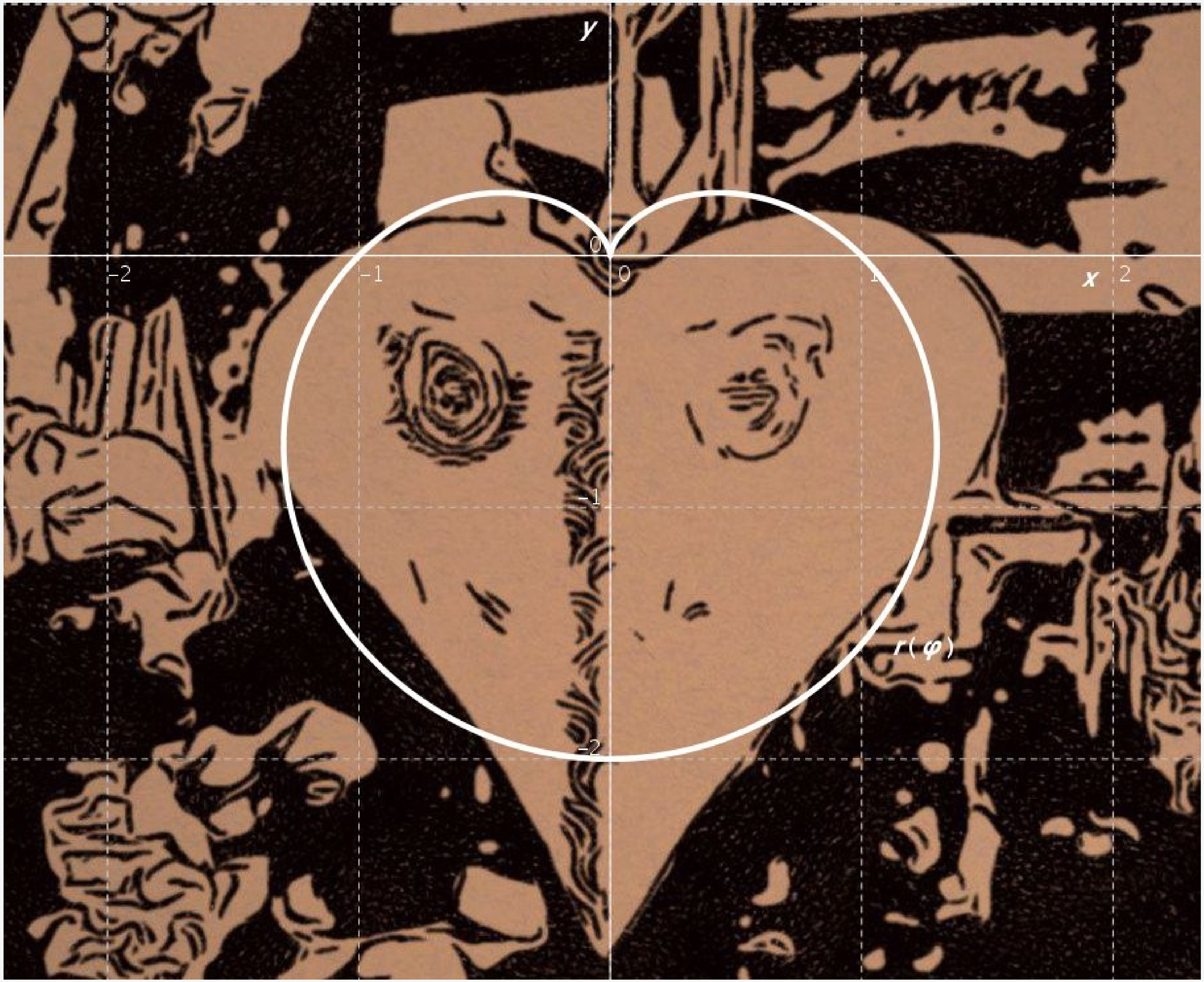


Abb.2-2: Die Darstellung einer Kardioide als Herzkurve

$$r(\varphi) = 1 - \sin\varphi\,, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$