http://musicbox.juniorwebaward.ch/pictures/05/bpam2v8uuurwum051rpbwvhons4j18/violine_11-289.jpg

Symmetrien in Doppelintegralen

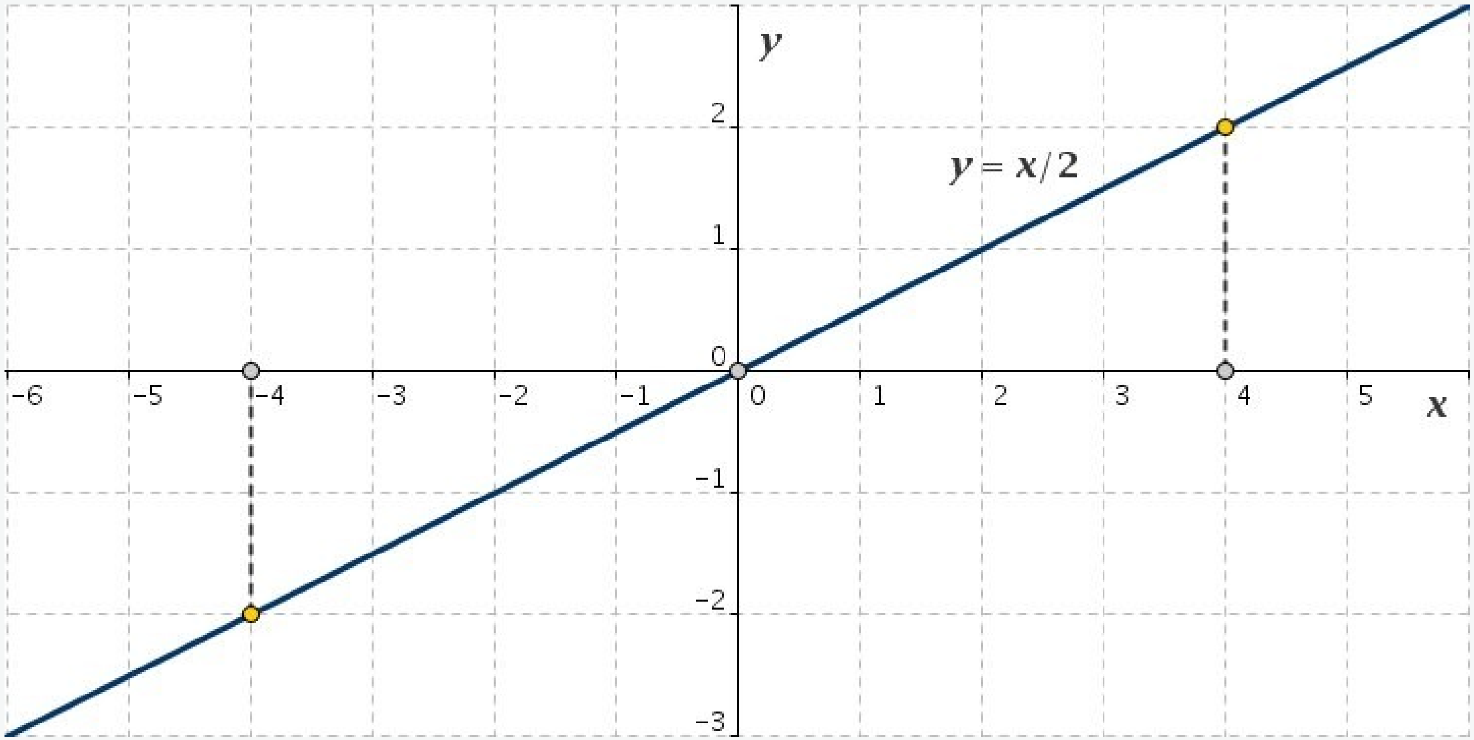

Abb. 1-1: Graphische Darstellung der ungeraden Funktion $f(x) = 0.5\,x$

Die Funktion $f(x)$ sei in einem zum Ursprung symmetrischen Intervall, z.B. $[-a, a]$, stetig.

$f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ ist eine ungerade Funktion $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

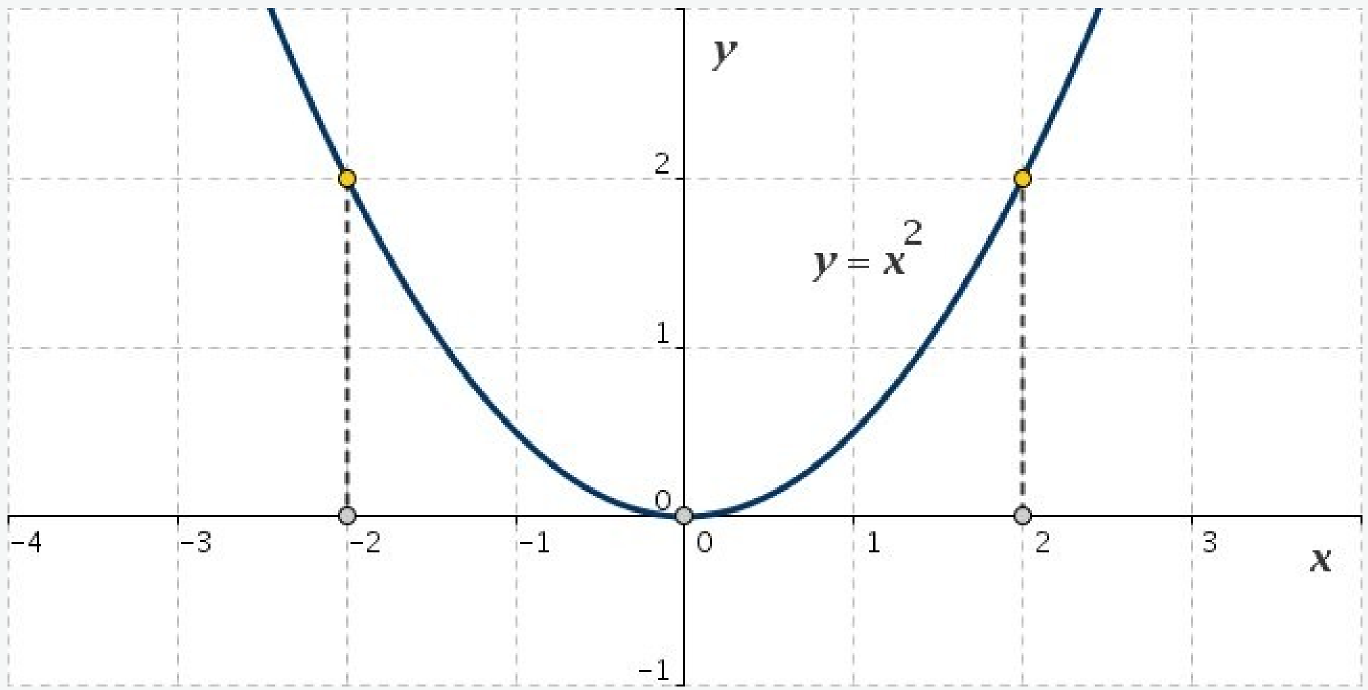

Abb. 1-2: Graphische Darstellung der geraden Funktion $f(x) = x^2$

$f(-x) = f(x)$, $f(x)$ ist eine gerade Funktion

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Ähnliche Aussagen gelten für Doppelintegrale.

Es sei A ein bezüglich der y-Achse symmetrischer Bereich.

Ist $f(x, y)$ in x ungerade:

$$f(-x, y) = -f(x, y)$$

dann ist

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

Ist $f(x, y)$ in x gerade

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

dann ist

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = 2 \iint_{A_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

A_R ist die rechte Hälfte von A, bzw. der Teil mit $x \geq 0$.

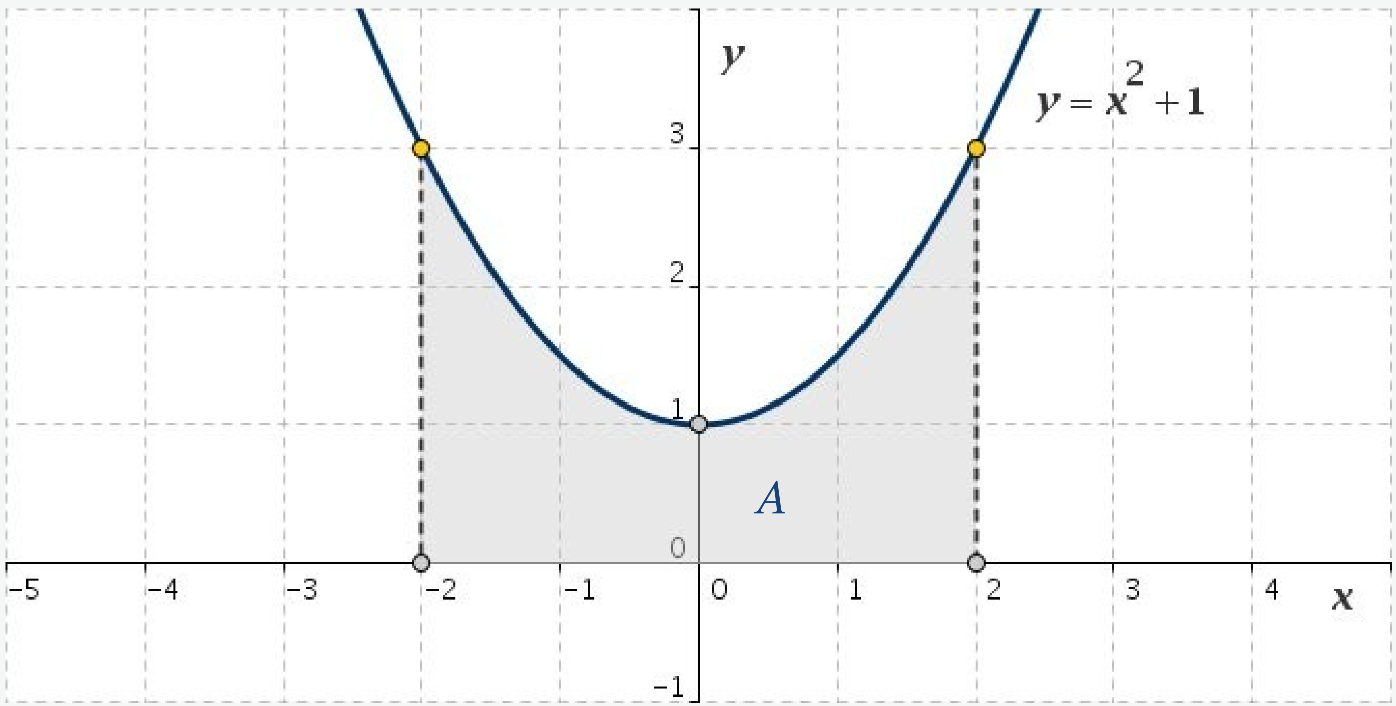

Abb. 2: Darstellung eines bezüglich der y-Achse symmetrischen Integrationsbereiches A

Es sei A ein bezüglich der y-Achse symmetrischer Bereich

$$A: \quad 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 1, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

$$f(x, y) = x\, y, \quad f(-x, y) = -x\, y = -f(x, y)$$

$$f(x, y) = x^2 y, \quad f(-x, y) = (-x)^2 y = f(x, y)$$

Symmetrien in Doppelintegralen: Beispiel 1

$f(x, y) = x\,y$ ist eine in x ungerade Funktion

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x=-2}^{2} x\, dx \int\limits_{y=0}^{x^2+1} y\, dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} x\,(x^2+1)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} (x^5 + 2\,x^3 + x)\, dx = 0$$

$f(x, y) = x^2\,y$ ist eine in x gerade Funktion

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x=-2}^{2} x^2\, dx \int\limits_{y=0}^{x^2+1} y\, dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} x^2\,(x^2+1)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} (x^6 + 2\,x^4 + x^2)\, dx = \int\limits_{0}^{2} (x^6 + 2\,x^4 + x^2)\, dx = \frac{3544}{105} \simeq 33.75$$

Es sei A ein bezüglich der x-Achse symmetrischer Bereich.

Ist $f(x, y)$ in y ungerade:

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

dann ist

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

Ist $f(x, y)$ in y gerade

$$f(x, -y) = f(x, y)$$

dann ist

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = 2 \iint_{A_o} f(x, y)\, dx\, dy$$

A_o ist die obere Hälfte von A, bzw. der Teil mit $y \geq 0$.

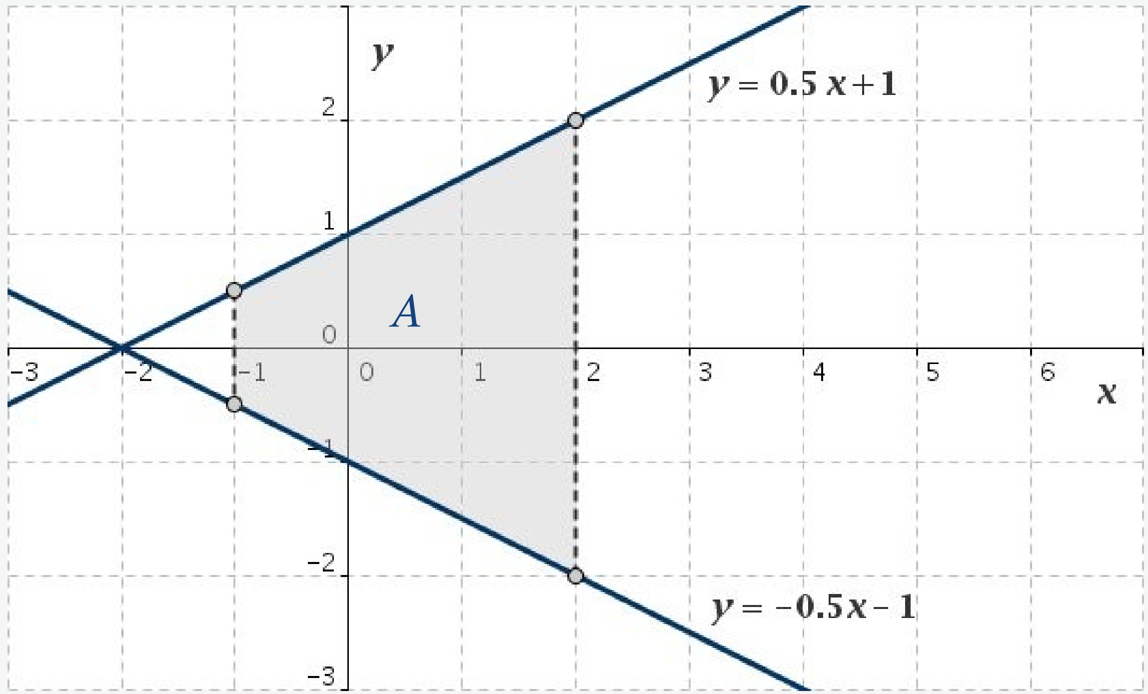

Abb. 3: Darstellung eines bezüglich der x-Achse symmetrischen Integrationsbereiches A

Es sei A ein bezüglich der x-Achse symmetrischer Bereich

$$A: \quad -\frac{x}{2} - 1 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2} + 1, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 2$$

$$f(x, y) = x\, y, \qquad f(x, -y) = -x\, y = -f(x, y)$$

$$f(x, y) = x\, y^2, \qquad f(x, -y) = x\, (-y)^2 = f(x, y)$$

$f(x, y) = x\,y$ ist eine in y ungerade Funktion

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x=-1}^{2} x\, dx \int\limits_{y=-(x/2+1)}^{x/2+1} y\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{2} x \left[\left(\frac{x}{2} + 1 \right)^2 - \left(-\frac{x}{2} - 1 \right)^2 \right] dx = 0$$

$f(x, y) = x\,y^2$ ist eine in y gerade Funktion

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x=-1}^{2} x\, dx \int\limits_{y=-(x/2+1)}^{x/2+1} y^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{2} x \left[\left(\frac{x}{2} + 1 \right)^3 + \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^3 \right] dx = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{2} x \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^3 dx = \frac{32}{5}$$