Das Doppelintegral in der Berechnung von Volumen

Ma 2 – Lubov Vassilevskaya


FUJI RTP
24A
23A
24
23
20
21
22A
40
40A
41
41A
15
37
f(x, y)
A
z = f(x, y)

http://www.youtube.com/watch?v=f6rn0sgNwks&feature=related

Wir berechnen das Volumen eines Quaders mit den Seiten a, a und b.

Ein Quader ist ein vierseitiges gerades Prisma, dessen Seitenflächen Rechtecke sind, und ist ein spezielles Parallelepiped.

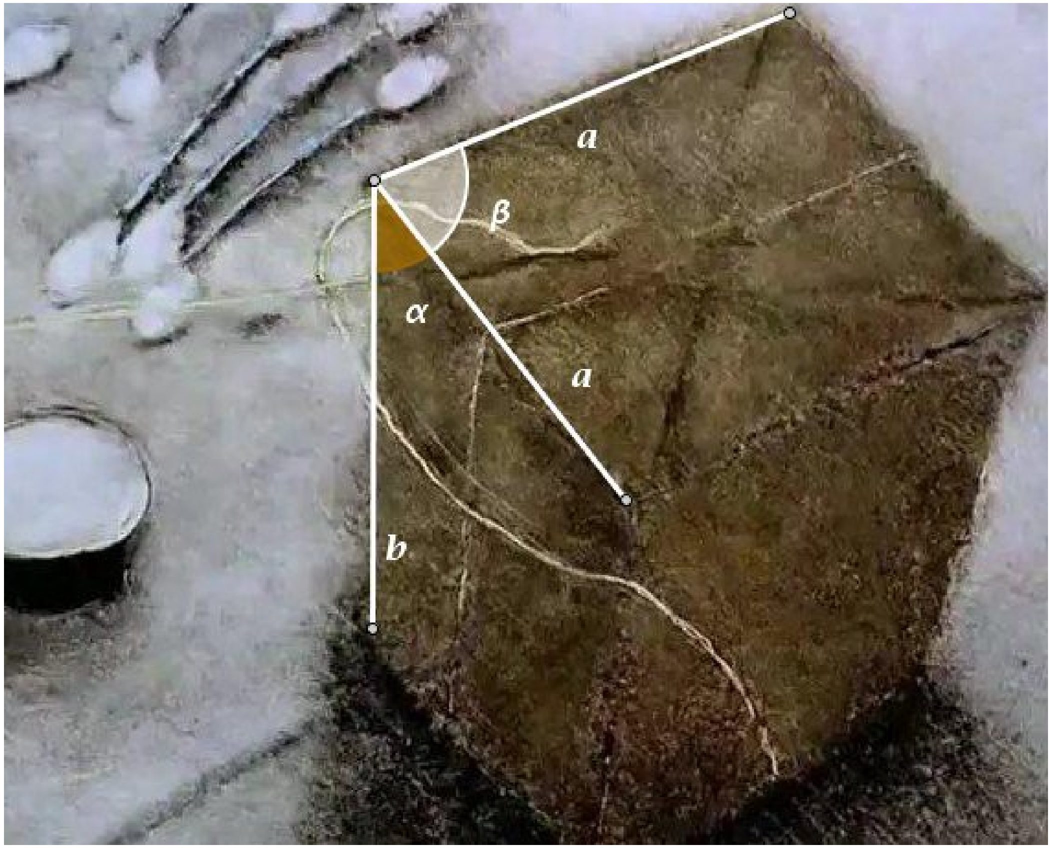


Abb. 1: Ein Quader mit den Seiten a, a und b, α = β = 90°

$$f(x, y) = b, \qquad A: \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a$$

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = b \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} dx\, dy = a^2 b \ \ (\mathrm{VE})$$

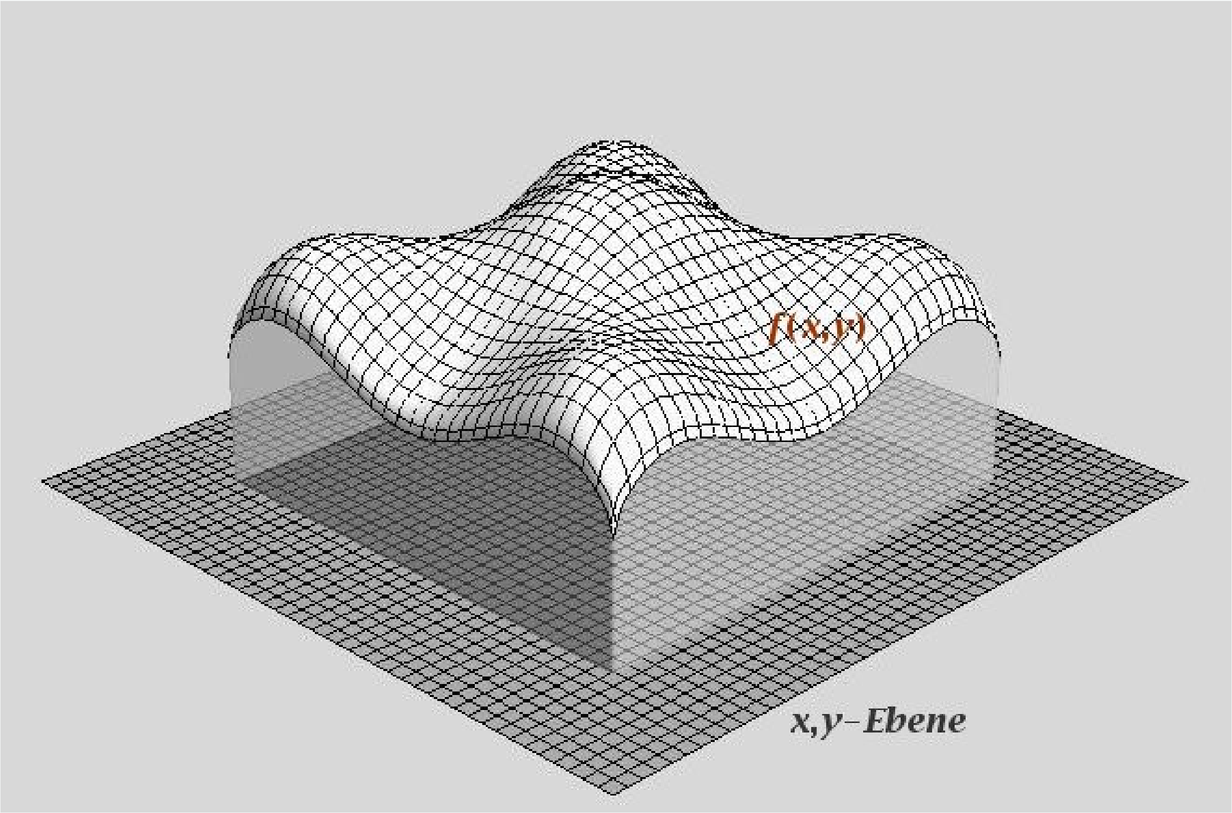
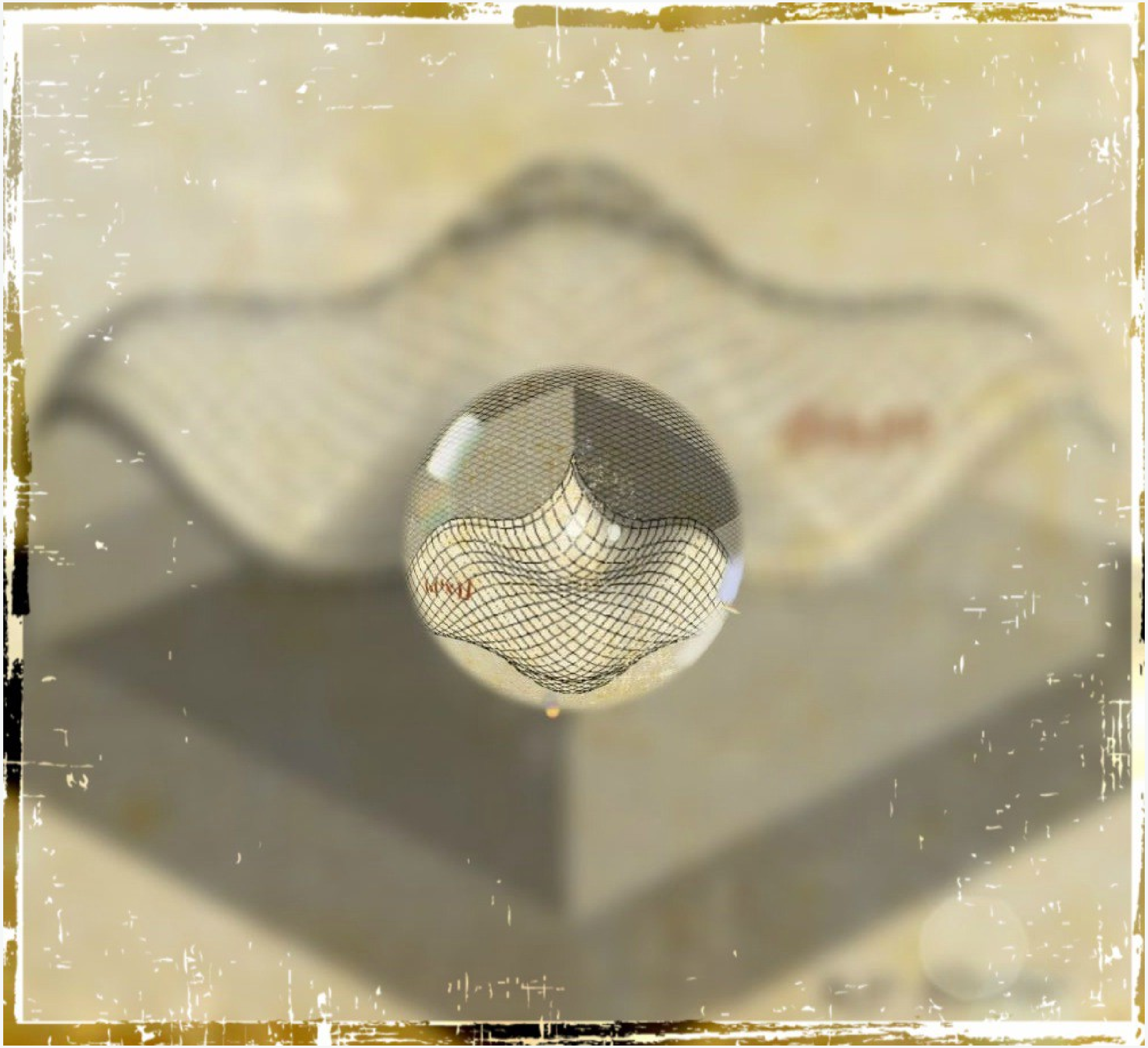


Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ über dem Definitionsbereich A

$$f(x, y) = 3 + \cos x \cdot \cos y, \qquad A: \; -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi$$

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} (3 + \cos x \cdot \cos y)\, dx\, dy = 12\,\pi^2 \;\; (\mathrm{VE})$$



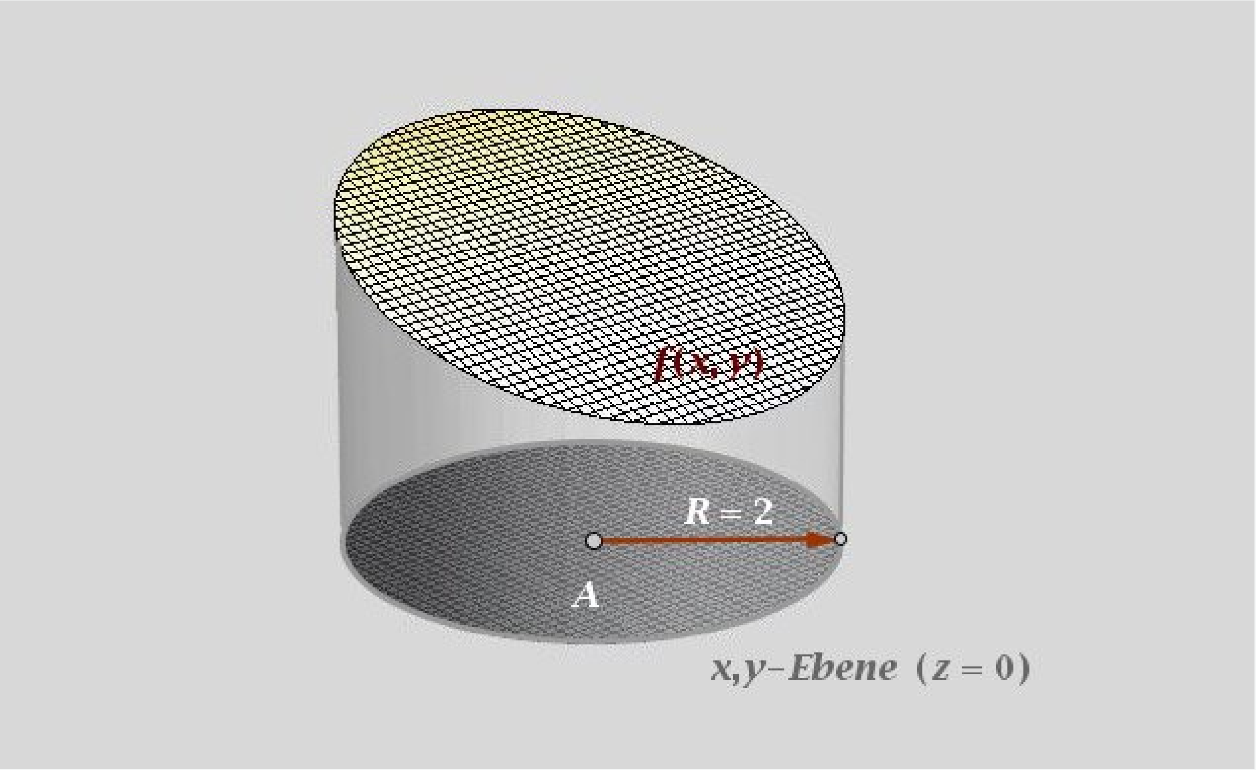


Abb. L1a: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 6 - y$ über dem Definitionsbereich A

Berechnen Sie das Volumen des Zylinderabschnitts

$$x^2 + y^2 = 4$$

der zwischen den Ebenen $y + z = 6$ und $z = 0$ liegt.

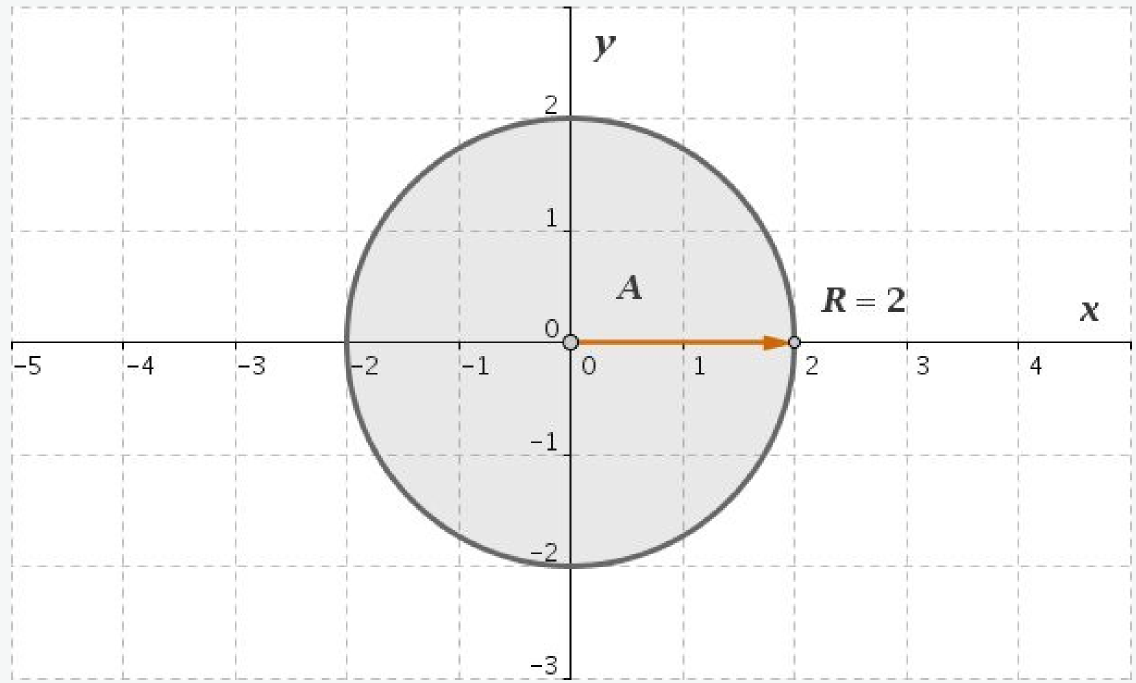


Abb. L1b: Definitionsbereich A der Funktion $f(x, y) = 6 - y$

Das Volumen ist durch das Doppelintegral $V = \iint (6 - y)\, dx\, dy$ gegeben. Da der Integrationsbereich symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, ist

$$\iint y \; dx\, dy = 0$$

$$\iint\limits_A (6 - y)\, dx\, dy = 6 \iint\limits_A dx\, dy = 6 \times (\textit{Inhalt von } A) = 6\,\pi\, R^2 = 24\,\pi \quad (\mathrm{VE})$$

Berechnen Sie die Volumina der Körper, die durch folgende Flächen begrenzt werden:

Aufgabe 2:

$$y = x^2, \quad y = 1, \quad x + y + z = 2, \quad z = 0$$

Aufgabe 3:

$$y = \frac{x^2}{2} - 2, \quad y = 2 + \sin\left(\frac{3x}{2}\right), \quad x = -2, \quad x = 2$$

$$z = 8 + x - y$$

Aufgabe 4:

$$z = 1 + e^{-(x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$$

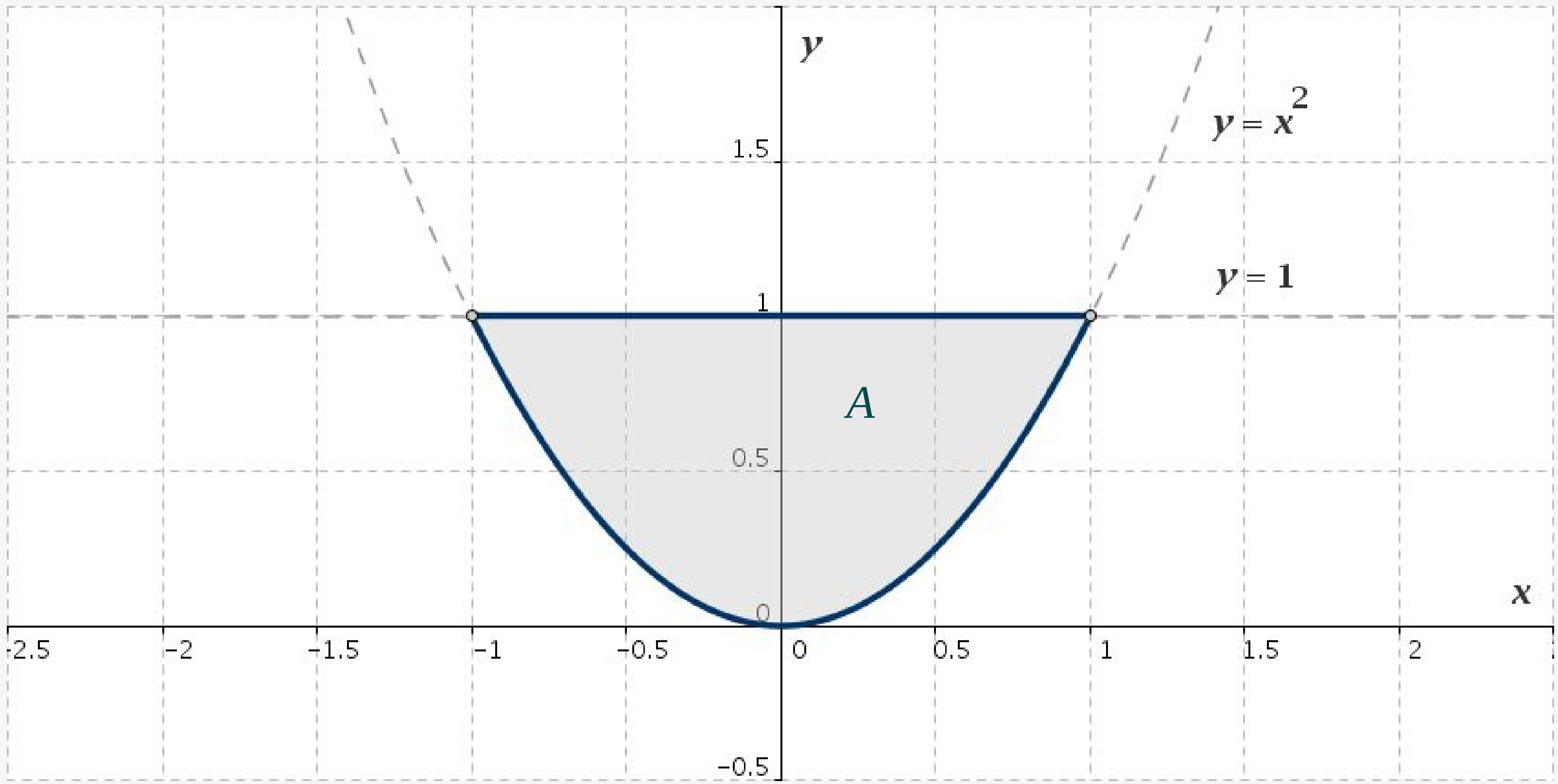
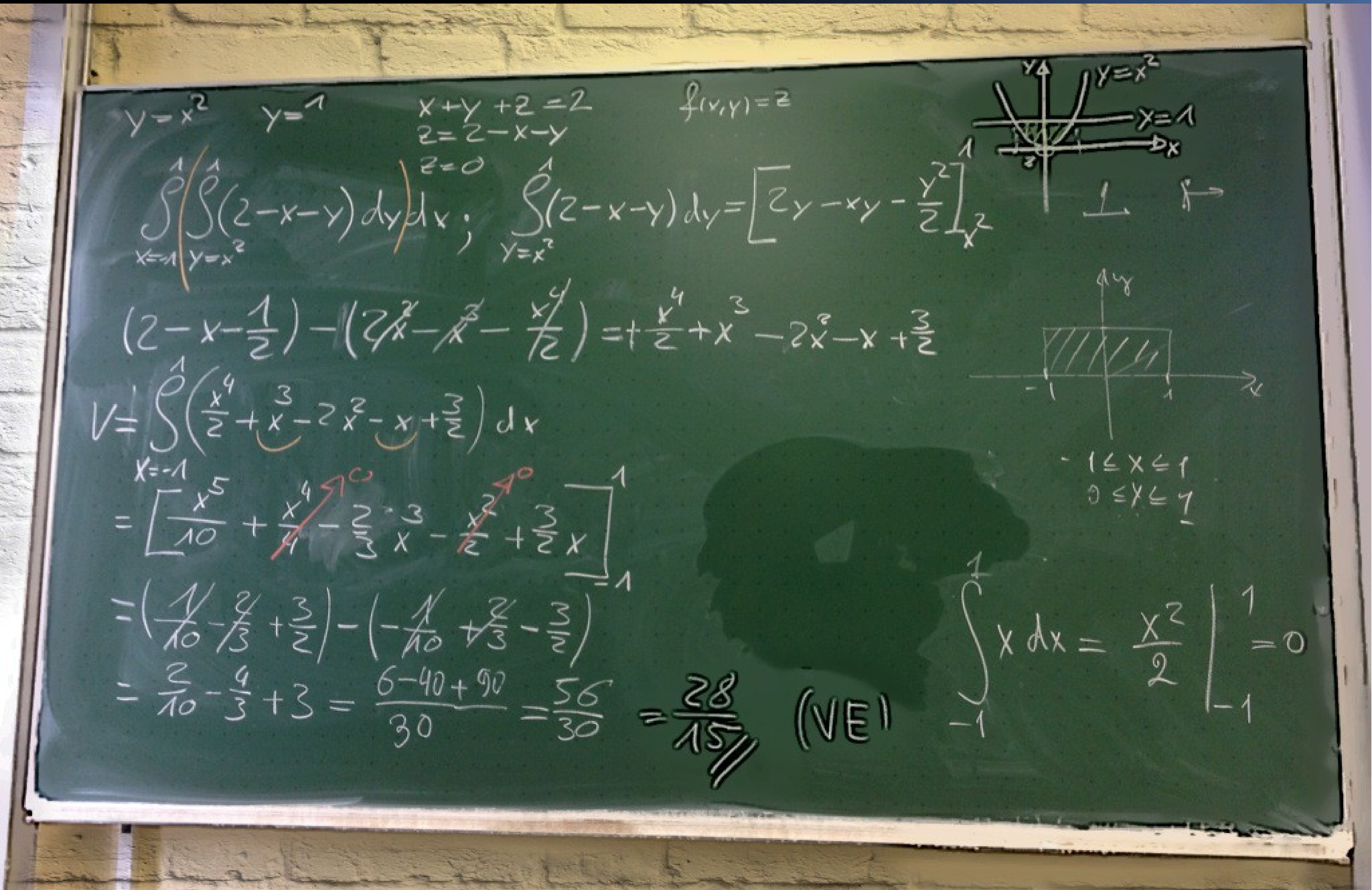


Abb. L2a: Definitionsbereich A der Funktion $f(x, y) = 2 - x - y$

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=-1}^{1} dx \int_{y=x^2}^{1} (2 - x - y)\, dy = \frac{28}{15} \text{ (VE)}$$

Doppelintegral in der Volumenberechnung: Lösung 2



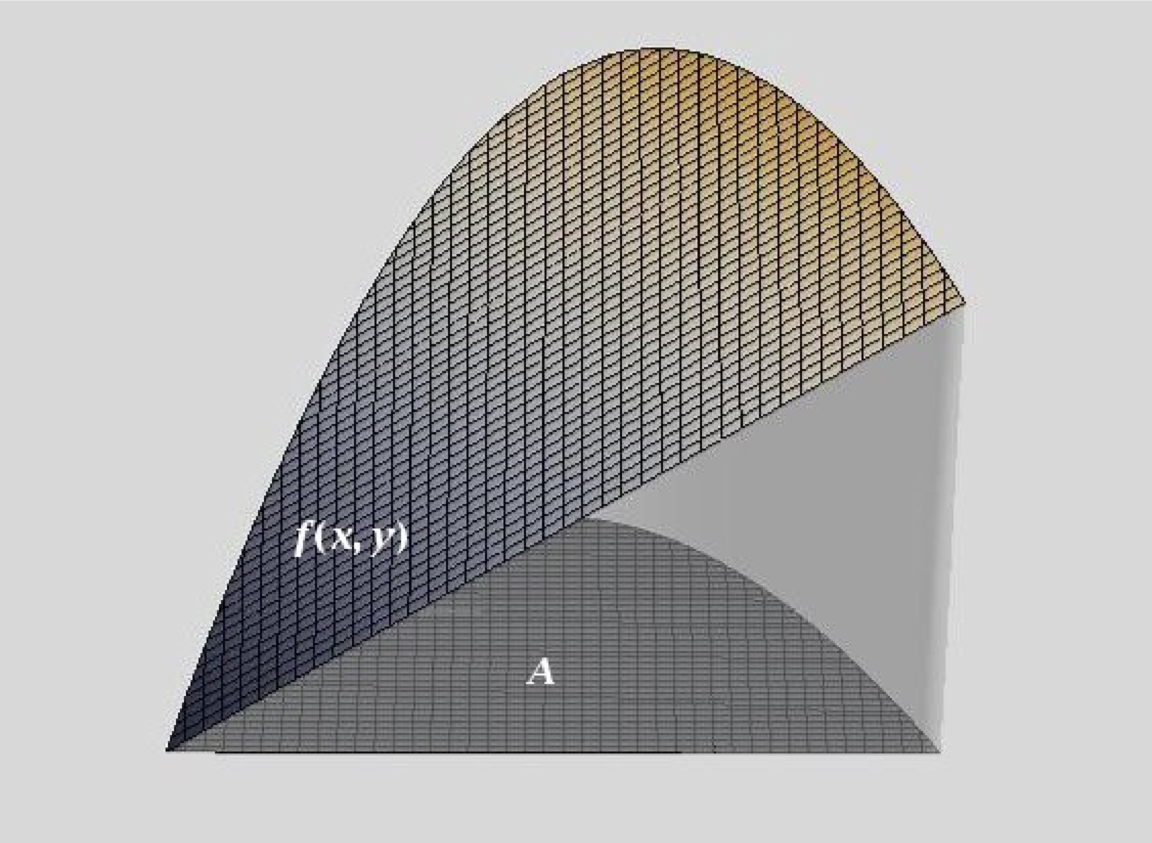


Abb. L2b: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 2 - x - y$ *über dem Definitionsbereich A*

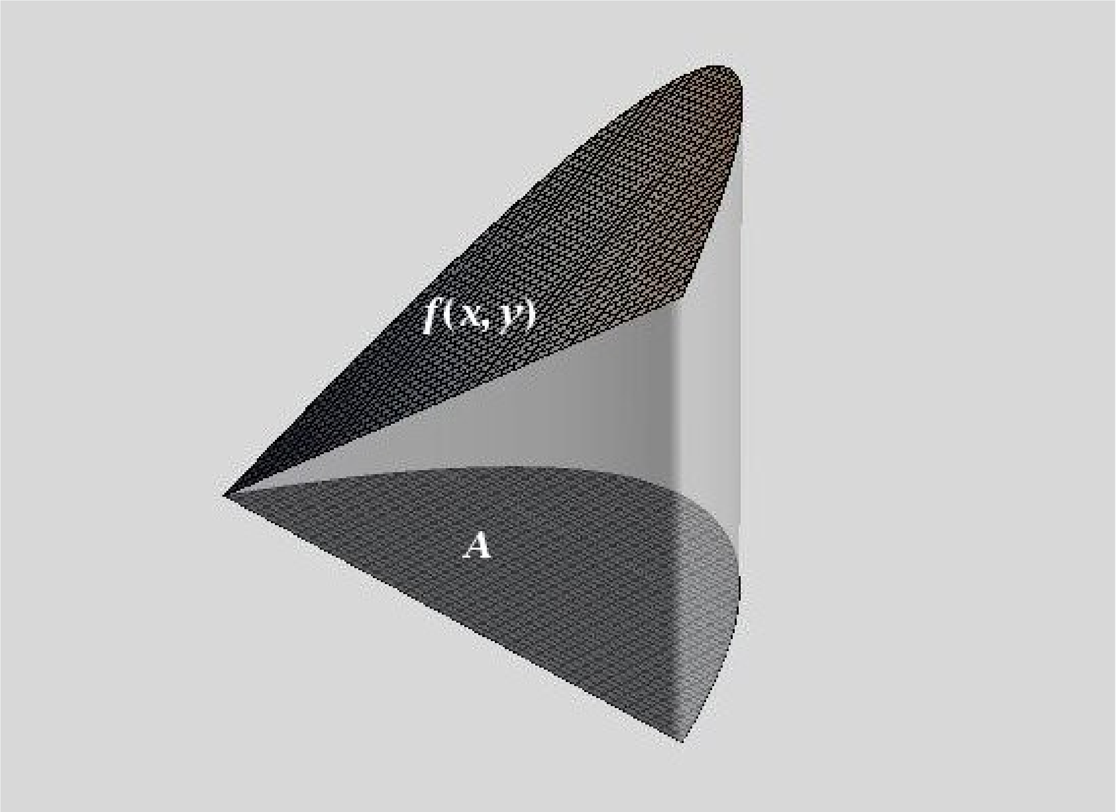


Abb. L2c: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 2 - x - y$ *über dem Definitionsbereich A*

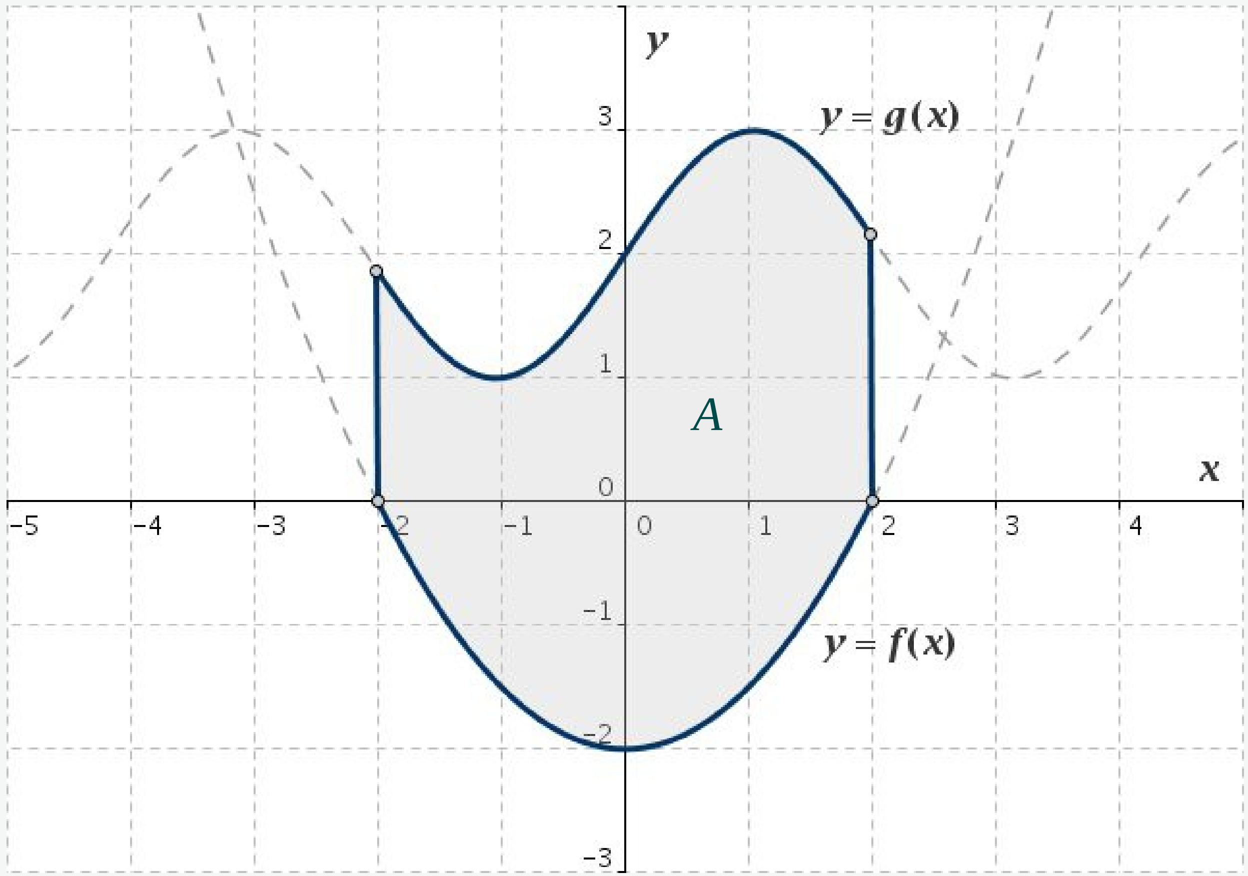


Abb. L3a: Definitionsbereich A der Funktion $f(x, y) = 8 + x - y$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2, \qquad g(x) = 2 + \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$$

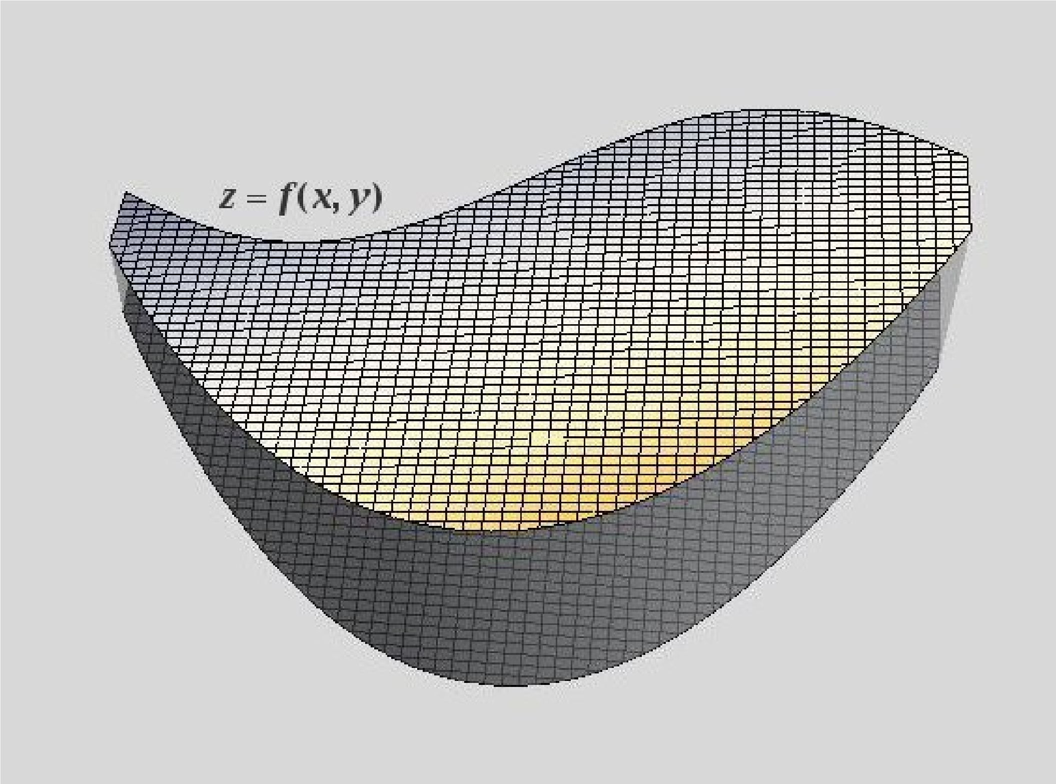


Abb. L3b: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 8 + x - y$ über dem Definitionsbereich A

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=-2}^{2} dx \int_{y=\frac{x^2}{2}-2}^{2+\sin\left(\frac{3x}{2}\right)} (8 + x - y)\, dy$$

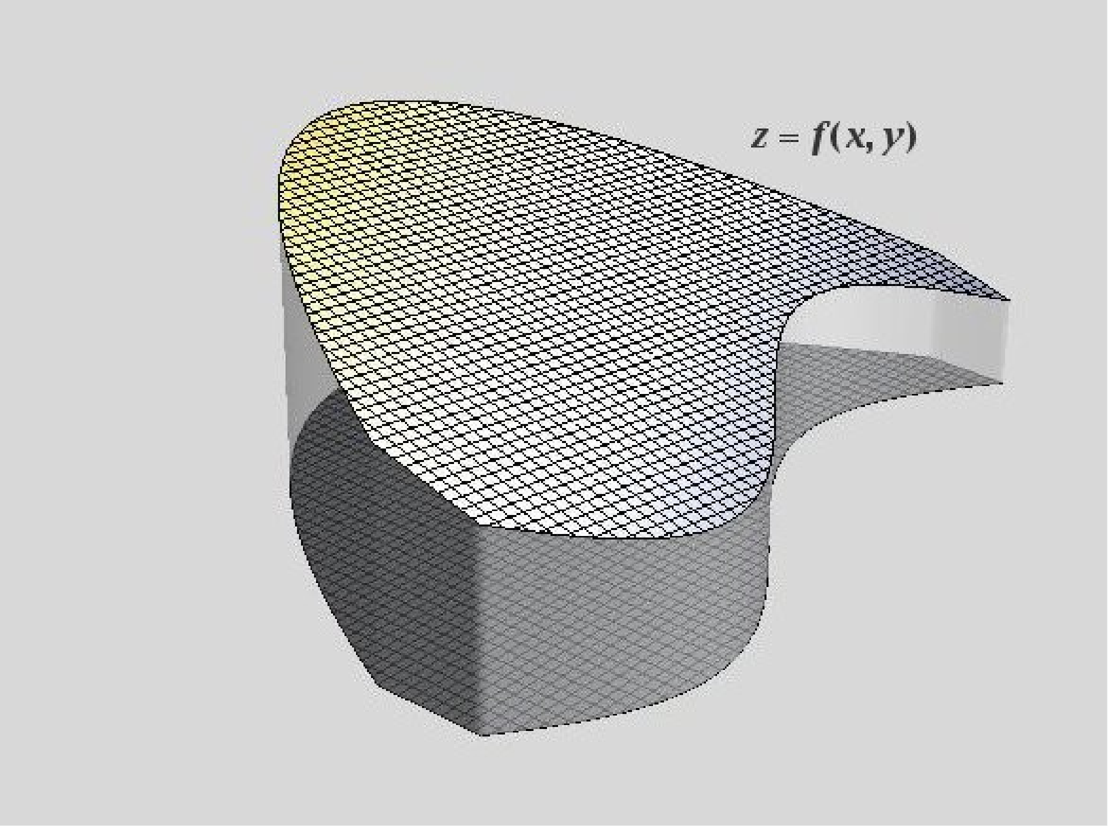


Abb. L3c: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 8 + x - y$ über dem Definitionsbereich A

$$V = \int_{x=-2}^{2} \left(x \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + 6 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{63}{2} + 4x - 5x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1529}{15} + \frac{1}{3}\sin(3)\cos(3) - \frac{8}{3}\cos(3) + \frac{8}{9}\sin(3) \simeq 104.65 \quad (\mathrm{VE})$$

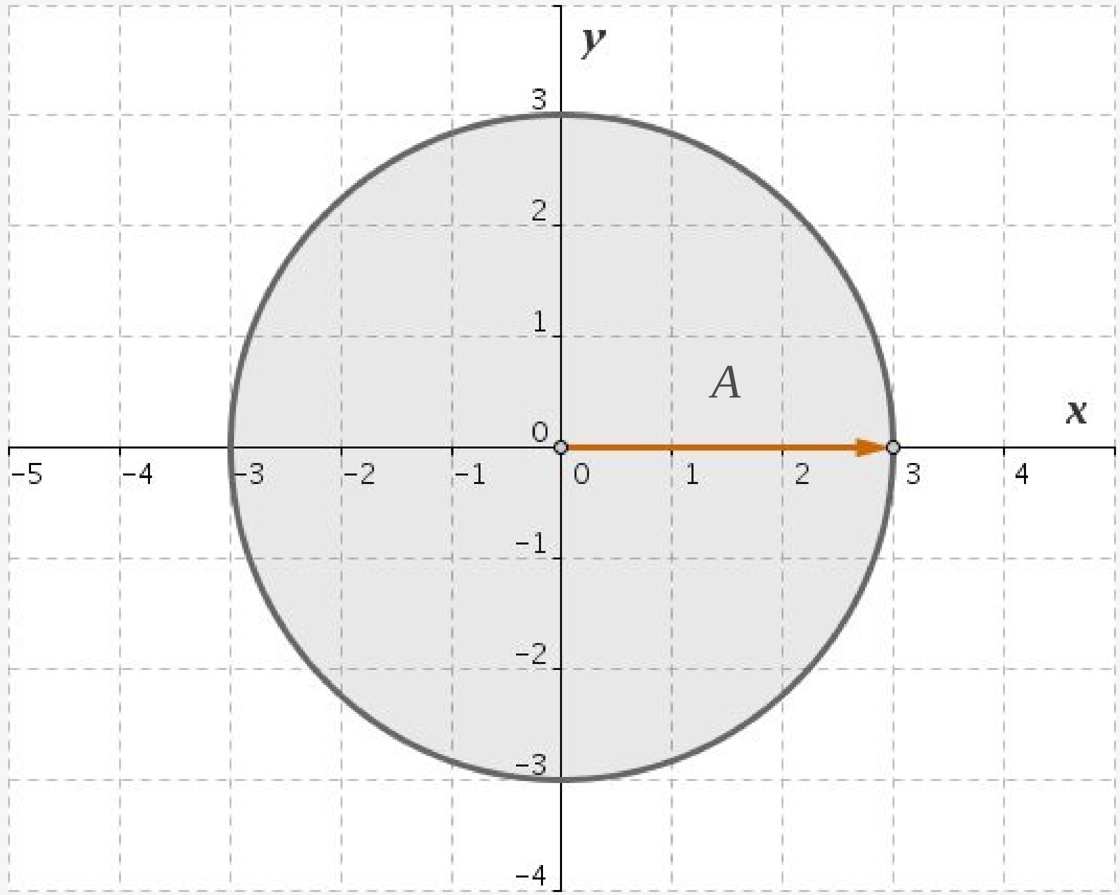


Abb. L4a: Der Definitionsbereich A der Funktion $z = f(x, y)$ ist ein Kreis mit dem Radius 3

$$z = 1 + e^{-(x^2 + y^2)}, \qquad A: \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$$

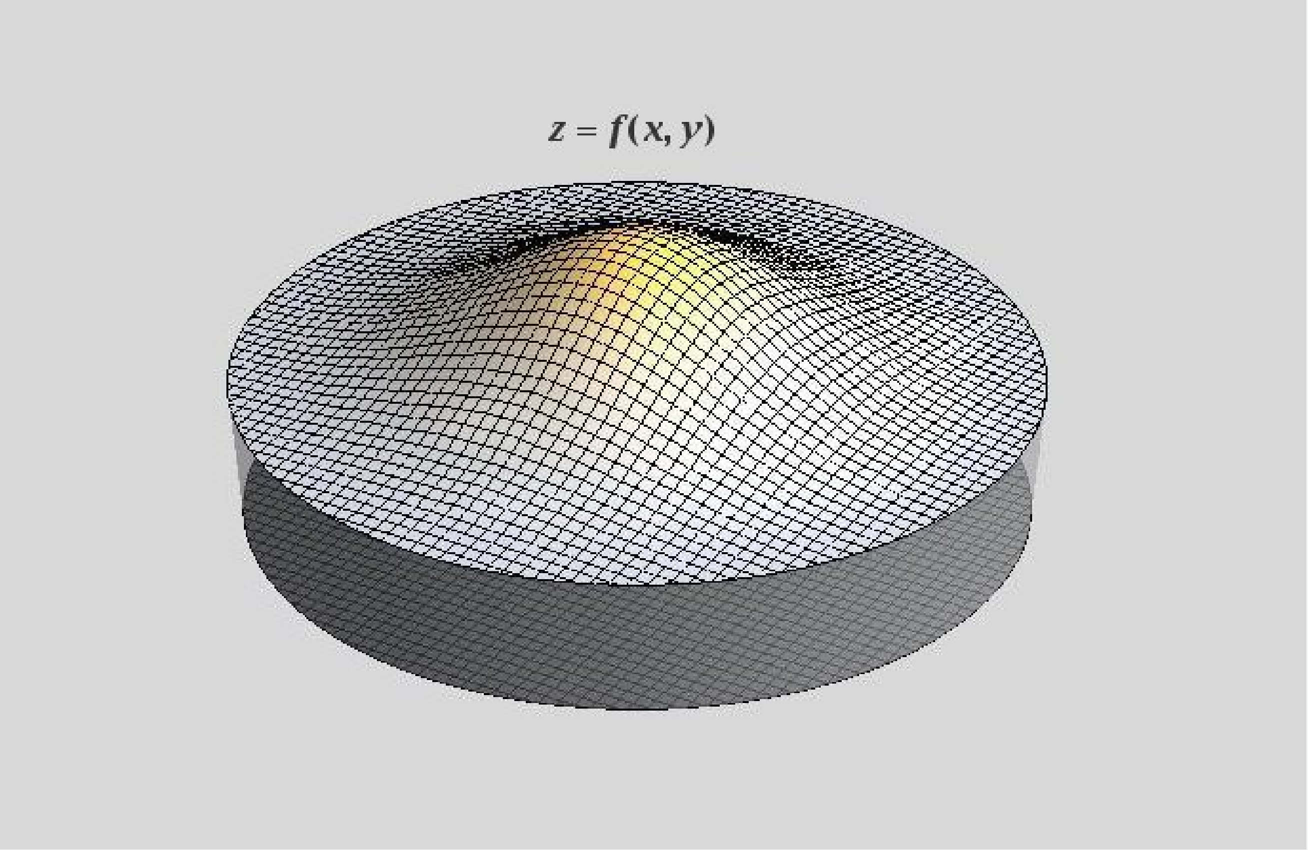


Abb. L3b: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ *über dem Definitionsbereich A*

In kartesischen Koordinaten:

$$V = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x=-3}^{3} \int\limits_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \left(1 + e^{-(x^2 + y^2)}\right) dy\, dx$$

In Polarkoordinaten:

$$V = \iint\limits_A g(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{3} \left(1 + e^{-r^2}\right) r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(5 - \frac{1}{2}\, e^{-9}\right) d\varphi = \pi\, \left(10 - e^{-9}\right) \simeq 31.42 \;\; (\mathrm{VE})$$

$$\int x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}$$