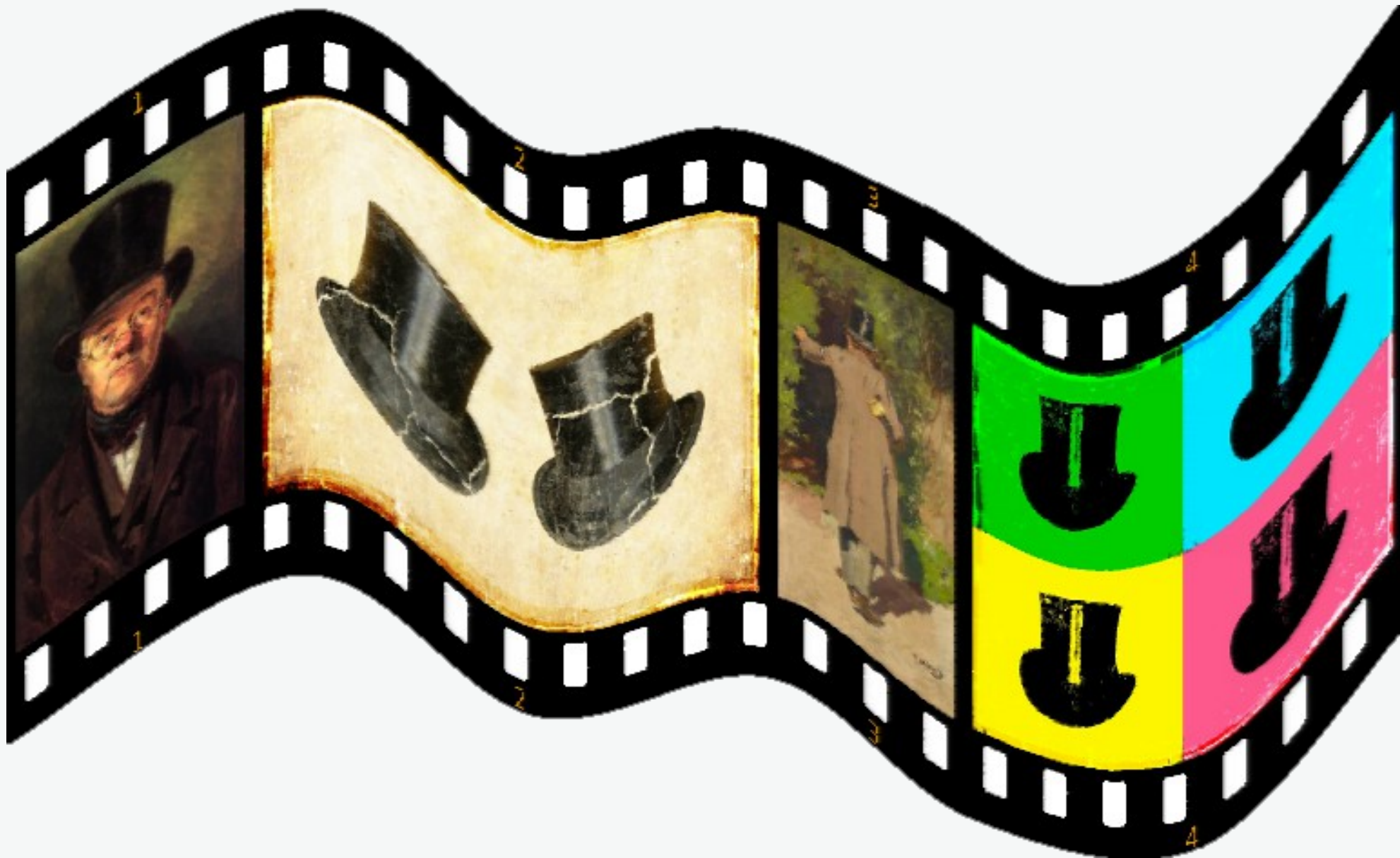




Zylinderkoordinaten





Die Koordinaten sind durch die Beziehungen definiert:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

Für sie sollen stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung existieren. Durch diese Transformationsgleichungen wird der räumliche Bereich V auf einen räumlichen Bereich $\tilde{V}$ abgebildet.

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$dV = dx dy dz = |D| du dv dw$$

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\tilde{V}} g(u, v, w) |D| du dv dw$$

$$\int_{\tilde{V}} g(u, v, w) dV = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \int_{w_1(u, v)}^{w_2(u, v)} g(u, v, w) |D| du dv dw$$

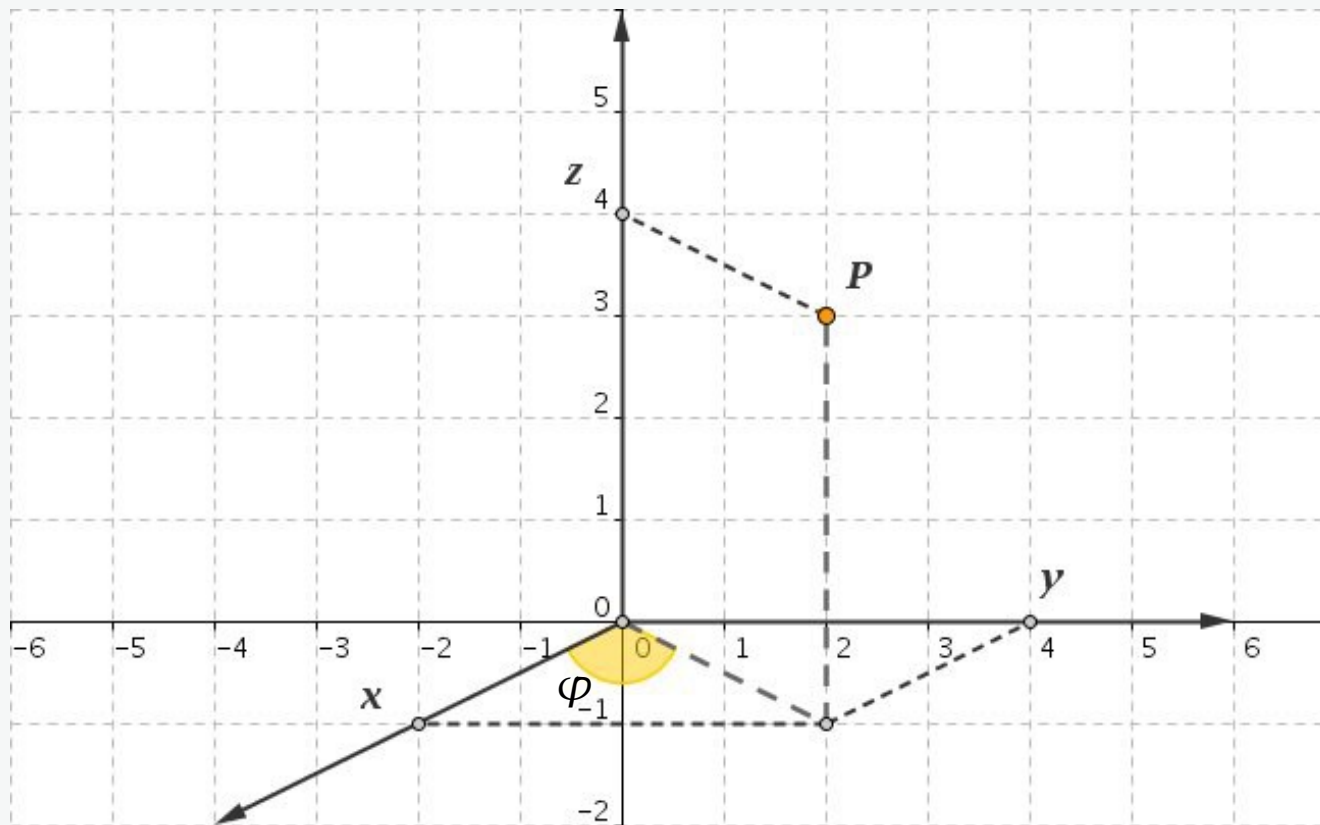


Abb. 1: Ein Punkt im zylindrischen Koordinatensystem

Die Zylinderkoordinaten bestehen aus:

- den Polarkoordinaten r und φ der Projektion des Punktes P auf die x, y -Ebene und
- der z -Koordinate des Punktes P



Abb. 2: Zylinder

Die Transformationsgleichungen:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

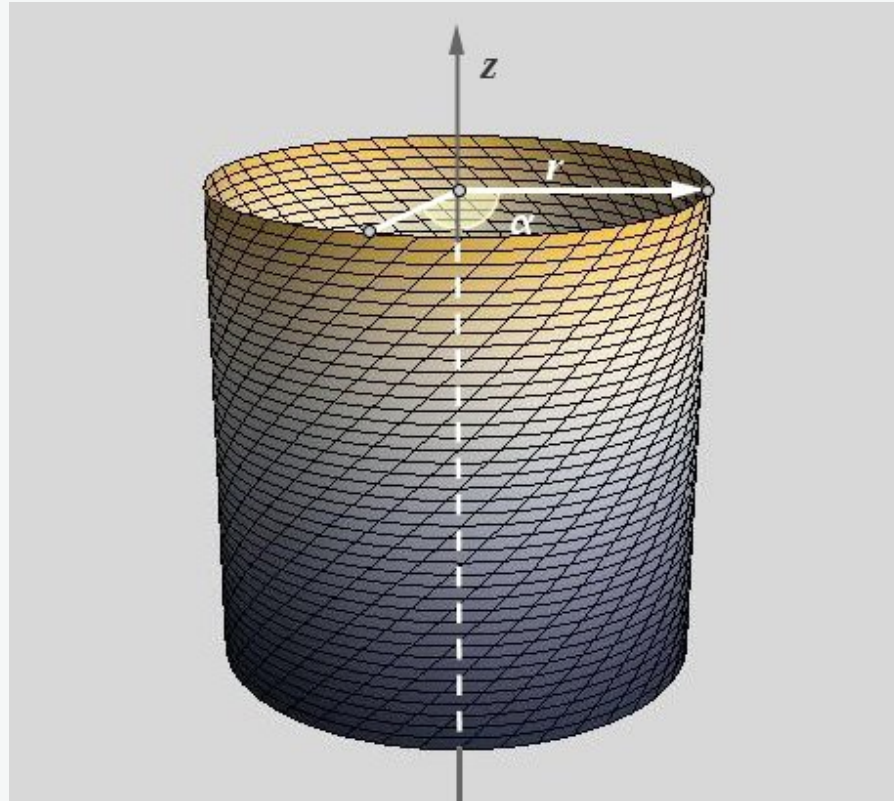


Abb. 3: Zylinder

Die Koordinatenflächen dieses Systems sind:

- die Zylinderflächen mit dem Radius $r = \text{const}$,
- die von der z -Achse ausgehenden Halbebenen mit $\varphi = \text{const}$ und
- die zur z -Achse senkrechten Ebenen mit $z = \text{const}$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$dV = dx \, dy \, dz = |D| \, dr \, d\varphi \, dz = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

Nach der Darstellung des Integranden in Zylinderkoordinaten lautet das Integral:

$$\int_V f(r, \varphi, z) \, dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} f(r, \varphi, z) \, r \, dz \, dr \, d\varphi$$



Aufgabe 1:

Berechnen Sie folgende Integrale in Zylinderkoordinaten

$$I_a = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x y z \, dz \, dx \, dy$$

$$I_b = \int_{y=-1}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x y z \, dz \, dx \, dy$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Masse eines Körpers mit der Dichtefunktion $\rho = 8 + x + y$, der von dem Paraboloid $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ und der x, y -Ebene begrenzt wird

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

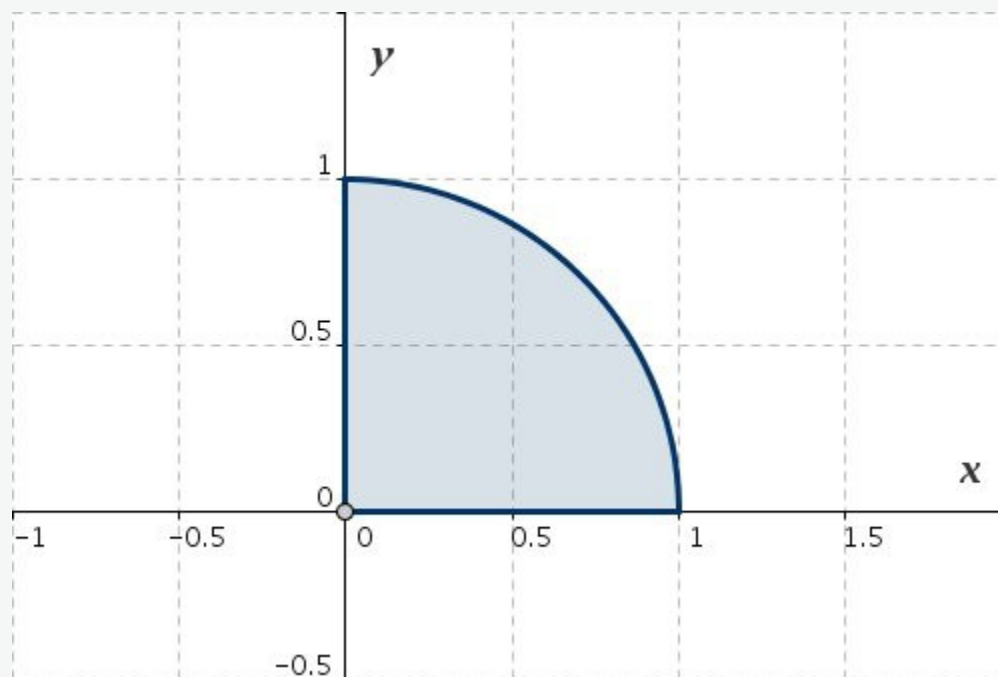


Abb. LI-1: Der Integrationsbereich in der x,y -Ebene

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$dV = dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\varphi \, dz, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r^2 \leq z \leq r$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$I_a = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x y z \, dz \, dx \, dy =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^1 \int_{z=r^2}^r (r \cos \varphi) \cdot (r \sin \varphi) \cdot z \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi \int_{r=0}^1 r^3 \, dr \int_{z=r^2}^r z \, dz =$$

$$= \frac{1}{48} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{96}$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x y z \, dz \, dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} x y \left(x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 \right) dx \, dy = \\ &= \frac{1}{24} \int_{y=0}^1 (y - 3 y^5 + 2 y^7) dy = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

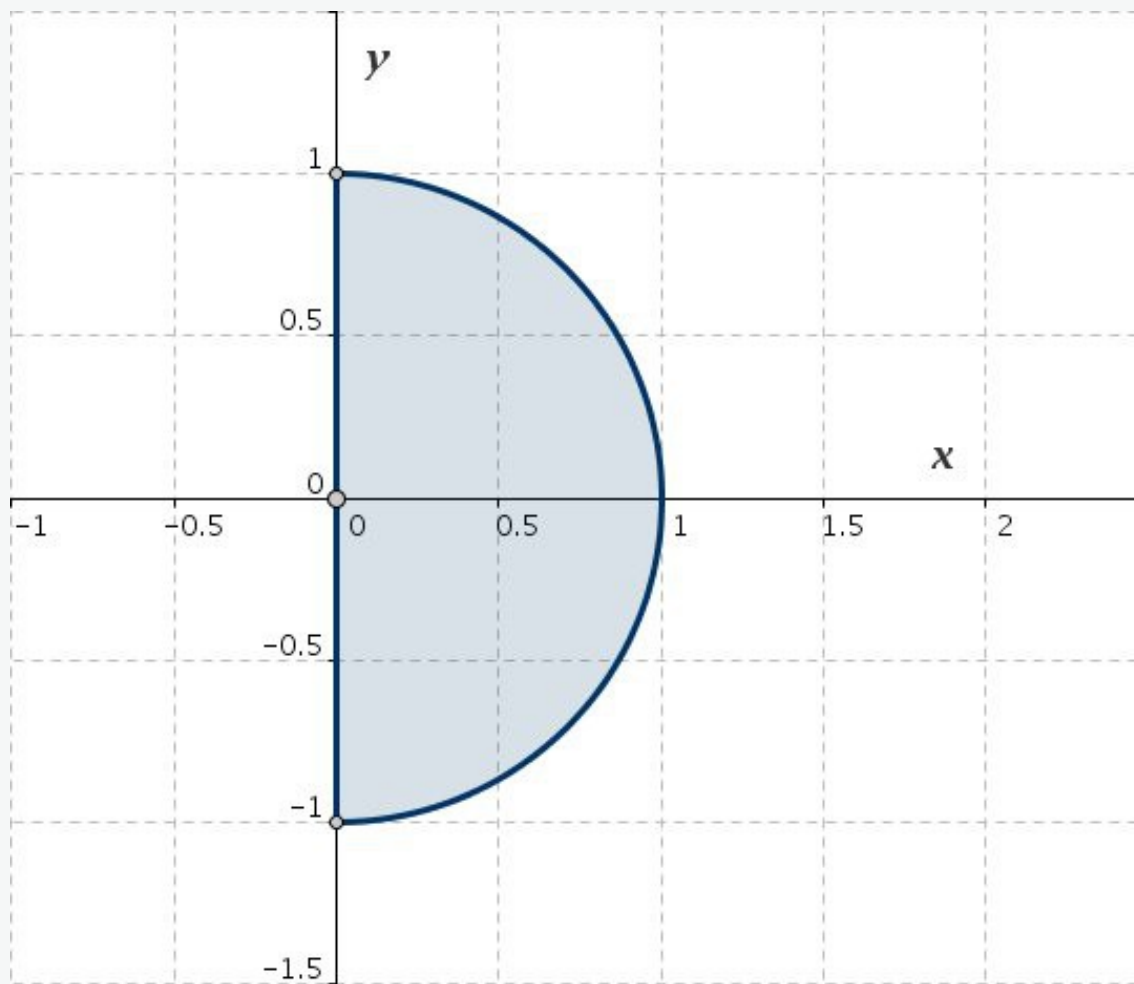


Abb. L1-2: Der Integrationsbereich in der x,y -Ebene

$$-1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$$

$$\begin{aligned} I_b &= \int_{y=-1}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x y z \, dz \, dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} x y \left(x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 \right) dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

(aus Symmetriegründen)

Das Integral kann man in folgender Form darstellen:

$$I_b = \frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 \int_{x=x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx \, dy, \quad f(x, y) = \frac{1}{2} x y \left(x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 \right)$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist in y ungerade und der Integrationsbereich ist symmetrisch bezüglich x -Achse

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

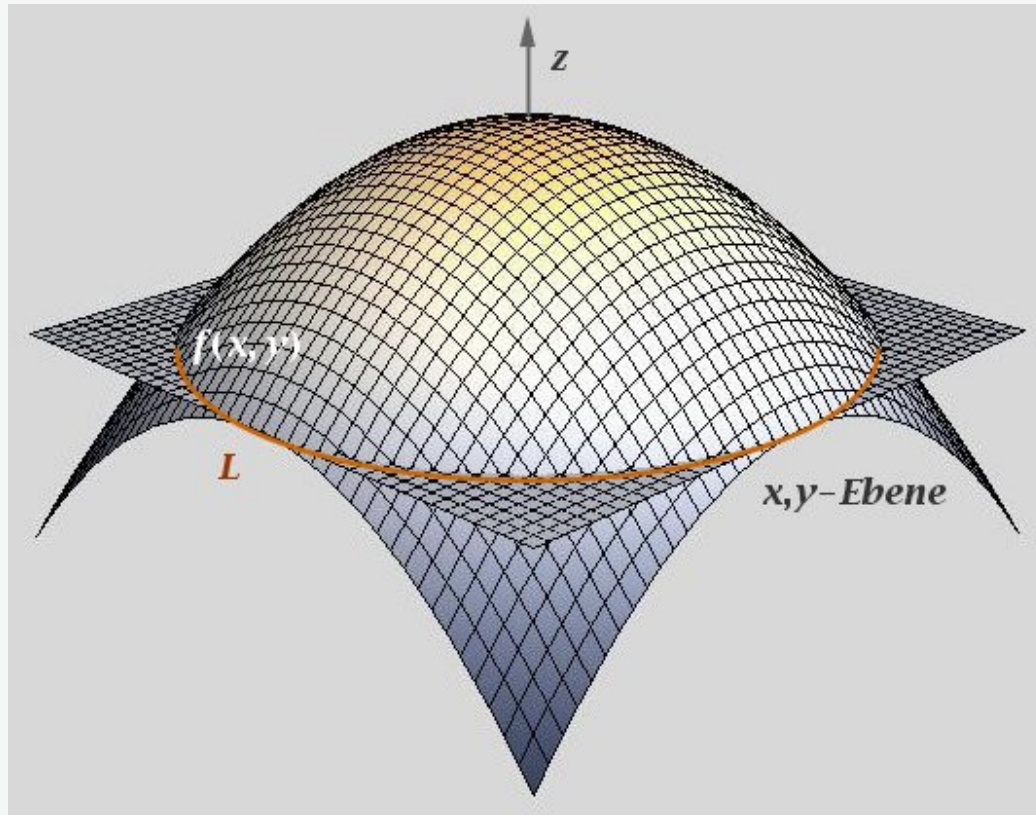


Abb. L2-1: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$. L ist die Schnittkurve der Fläche $z = f(x, y)$ mit der x, y -Ebene

Die Schnittkurve mit der x, y -Ebene ist die Kreislinie:

$$16 - x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16$$

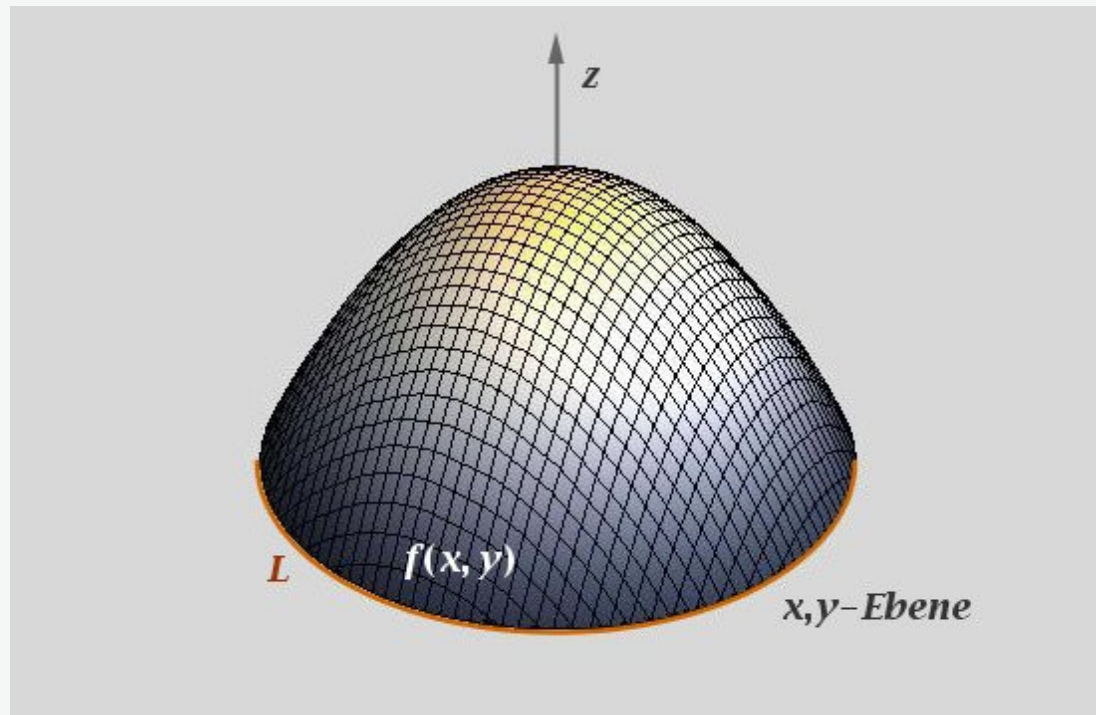


Abb. L2-2: Der Körper, der von der Funktion $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ und x, y -Ebene begrenzt wird. L ist die Schnittkurve der Fläche $z = f(x, y)$ mit der x, y -Ebene

$$M = \int_V \rho \, dV = \iiint \rho \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \iiint (8 + x + y) \, r \, dz \, dr \, d\varphi =$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 16 - r^2$$

$$\begin{aligned} M &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=0}^{16-r^2} (8 + r \cos \varphi + r \sin \varphi) \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{r=0}^4 r (16 - r^2) \, dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} (8 + r \cos \varphi + r \sin \varphi) \, d\varphi = \\ &= 16\pi \int_{r=0}^4 r (16 - r^2) \, dr = 4^5 \pi = 1024 \pi \text{ (ME)} \end{aligned}$$



Abb. 4-1: Carl Spitzweg, "Mann mit Zylinderhut"



Abb. 4-2: Hugo Mühlig, "Herr mit Zylinder"

