1.1 Mathematik 3. Klausur, 03.03.2022. Klausurvorbereitung

Liebe Studierende,

Hier ist die Information zur Prüfung *Mathematik 3.*

Die Prüfung

- findet am 3.03.2022 um 17 Uhr statt,
- dauert 70 Minuten (?),
- wird als Präsenzprüfung im Raum 20.018 durchgeführt.

Ablauf:

1. Die Studierenden kommen mit eigener Maske um 16 Uhr 45.
2. Während der Prüfung soll eine FFP2-Maske getragen werden.
3. Alle elektronische Geräte müssen sich während der Prüfung ausgeschaltet in Taschen, Rücksäcken usw. befinden.
4. Die Formelsammlung befindet sich auf der Webseite:
   http://math-grain.de/download/password/m3/m3-formeln.pdf

Themen zur Wiederholung

1. Funktionen mehrerer Variablen:
   Grundbegriffe, Definitions- und Wertebereich, Darstellungsformen.

2. Partielle Ableitungen:
   - Partielle Ableitungen 1. Ordnung,
   - Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Satz von Schwarz,
   - Die Gleichung der Tangentialebene.

3. Mehrfachintegrale:
   - Das Doppelintegral mit konstanten und beliebigen Integrationsgrenzen in kartesischen Koordinaten; Bestimmung von Integrationsgrenzen, Flächeninhalt,
   - Jacobi-Determinante,
   - Doppelintegral in Polarkoordinaten: Flächeninhalt und Schwerpunkt in Polarkoordinaten,
   - Anwendungen von Doppelintegralen,
   - Integrale in Zylinder- und Kugelkoordinaten,
   - Dreifachintegrale.

4. Laplace-Transformationen
   - Heaviside-Funktion und ihre Eigenschaften,
   - Begriff einer Originalfunktion,
   - Laplace-Transformierte einer Funktion, Berechnung von Laplace-Transformierten,
   - Inverse Laplace-Transformation, Inverse Laplace-Transformation mit Partialbruchzerlegung,
   - Laplace-Transformationen in Lösungen von Differentialgleichungen:
     Differentialgleichung 1. Ordnung,
     Differentialgleichung 2. Ordnung,

5. Fourier-Reihe einer 2π periodischen Funktion:
   Rechtecksfunktion, Sägezahnfunktion, Dreiecksschwingung, Periodische Dreieckfolge, Trapezimpuls, Hakenimpuls, Parabelförmiger Impuls.

1.2 Mathematik 3, Klausurvorbereitung

1.1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f_1(x,y) = \sqrt{2x} + \dfrac{1}{y-2}$.
Zeichnen Sie den Definitionsbereich.

1.2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktionen $f_1(x,y) = 3x^2 - y^2 + \dfrac{5}{x^2+y^2}$ und $f_2(x,y) = (3x^2 - 5y)\sin y$.

1.3. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$f_1(x,y) = \cos(x^2 - 3y), \qquad f_2(x,y,z) = e^{xy}\sin(2z).$$

1.4. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 2. Ordnung

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x^4}{\sqrt{y}}\right) + e^x y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

1.5. Bestimmen Sie die Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = (x^2 - 2y)\sin y$ im Punkt $P\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.6. Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen für das folgende Doppelintegral $I = \iint\limits_A f(x,y)dA$ über die Fläche A (Abb. 1.1). Geben Sie jeweils zwei Möglichkeiten

1.7. Berechnen Sie den Schwerpunkt der von der Kardioide

$$r = 1 + \cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

begrenzten Fläche.

1.8. Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral

$$I = \iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y},$$

wenn der Integrationsbereich durch die folgenden Flächen begrenzt wird

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

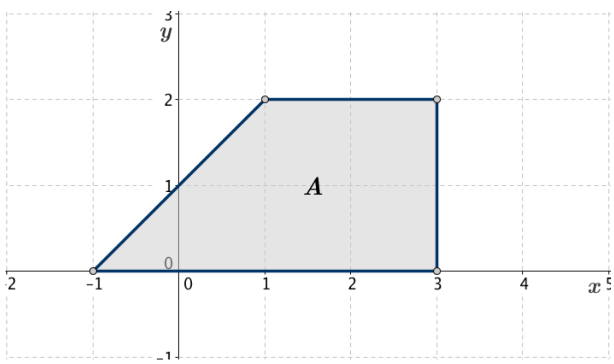

Abb. 1.1 Die Fläche A der Aufgabe 1.6

1.9. Stellen Sie die Funktion $f(x) = \sin^3 x$ als trigonometrisches Polynom dar, und bestimmen Sie seine von null verschiedenen Koeffizienten.

1.10. Die 2π-periodische Funktion besteht aus Parabelbögen mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ im Periodenintervall $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

1.2.1 Lösungen

1.1 Der Definitionsbereich der Funktion $f_1(x, y)$ ist in Abb. 1.2 dargestellt.
$D_{f_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \neq 2\}$.

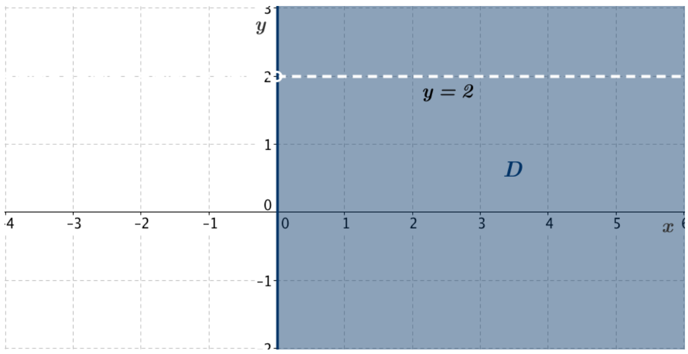

Abb. 1.2 Der Definitionsbereich der Funktion $f_1(x, y) = \sqrt{2x} + \dfrac{1}{y-2}$

1.2 $D_{f_1} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, $D_{f_2} = \mathbb{R}^2$.

1.3

$$f_1(x, y) = \cos(x^2 - 3y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2x \sin(x^2 - 3y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3 \sin(x^2 - 3y),$$
$$f_2(x, y, z) = e^{xy} \sin(2z), \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = y e^{xy} \sin(2z), \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = x e^{xy} \sin(2z), \quad \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2e^{xy} \cos(2z).$$

1.4 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{4}{x^2} + e^x y, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2y^2}.$

1.5 $z = 2x - 2y - 1.$

1.6 $I \overset{1}{=} \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=0}^{x+1} f(x,y)dydx + \int\limits_{x=1}^{3} \int\limits_{y=0}^{2} f(x,y)dydx \overset{2}{=} \int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{x=y-1}^{3} f(x,y)dxdy.$

1.8 $I = 1/2.$

1.7 $S = (5/6,\, 0).$

1.9 $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin(3x),\ b_1 = \dfrac{3}{4},\ b_3 = -\dfrac{1}{4}.$

1.10 $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \dfrac{\cos(2x)}{2^2} + \dfrac{\cos(3x)}{3^2} - \dots\right).$