



http://allgraf.net/uploads/posts/2009-07/1247941309_6-antiques.jpg

Differenzierbarkeit, Linearisierung

Wir zoomen so lange hinein bis wir Linearität entdecken.

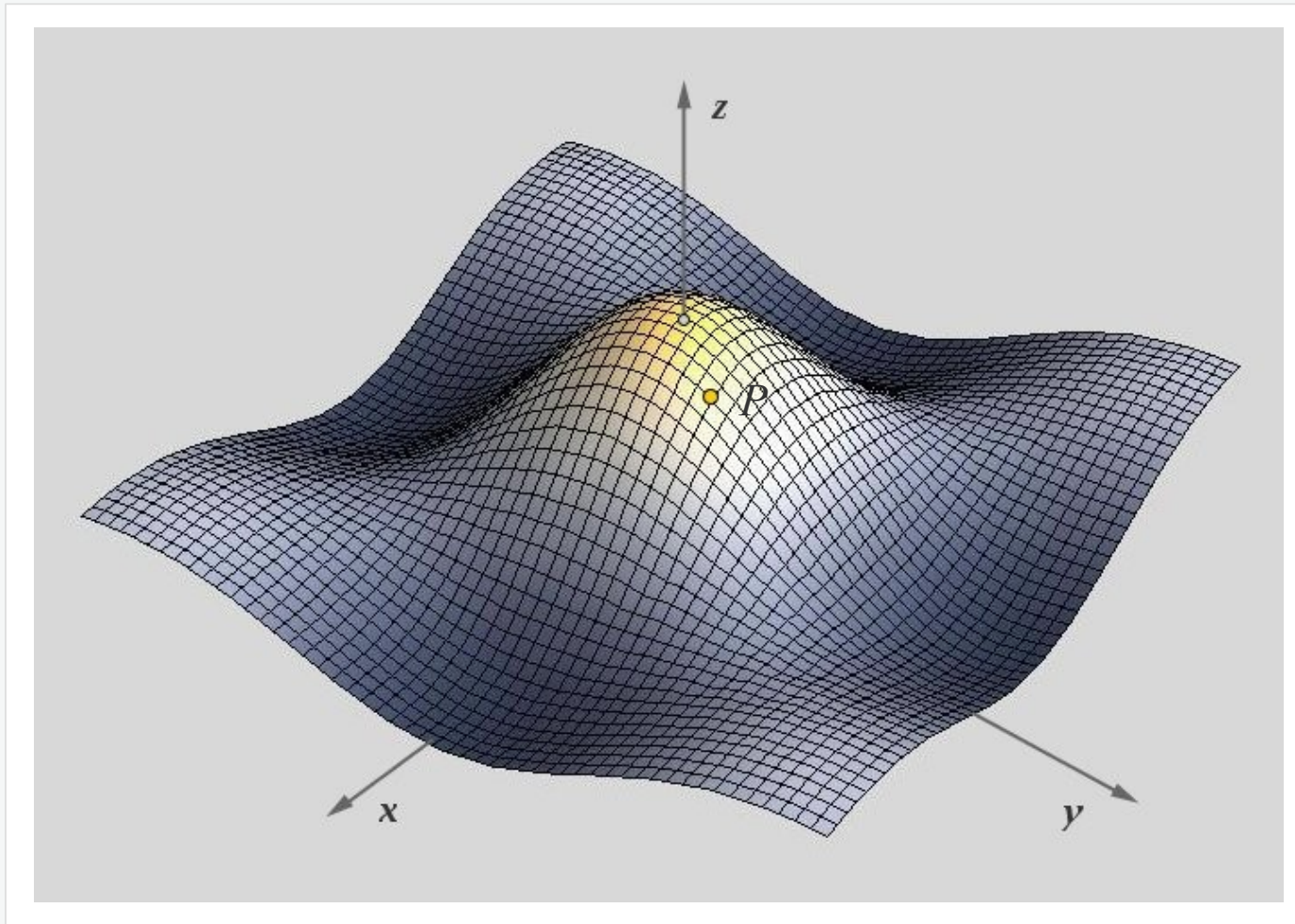


Abb. 6-1: Graphische Darstellung einer Funktion $f = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum



http://www.youtube.com/watch?v=geseQR_u2tA

Abb. 6-2: “Geometrisches Zoomen”

Wir zoomen in die Fläche der Funktion $z = f(x, y)$, bis sie wie eine Ebene aussieht. Dieses Vorgehen kann man als geometrisches “Zoomen” bezeichnen.

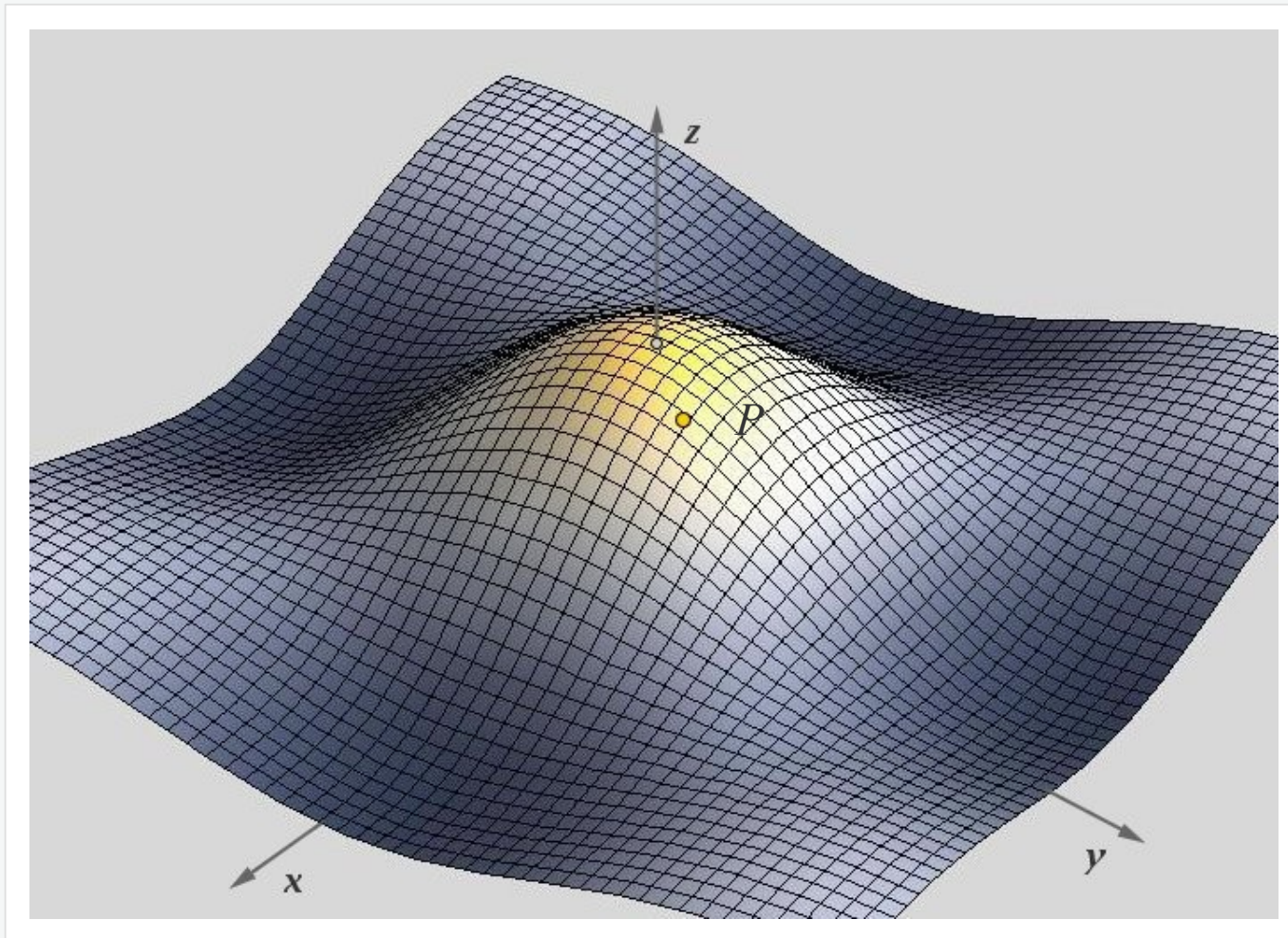


Abb. 6-3: Geometrisches “Zoomen” in die Fläche der Funktion $f=f(x, y)$ (Schritt 1)

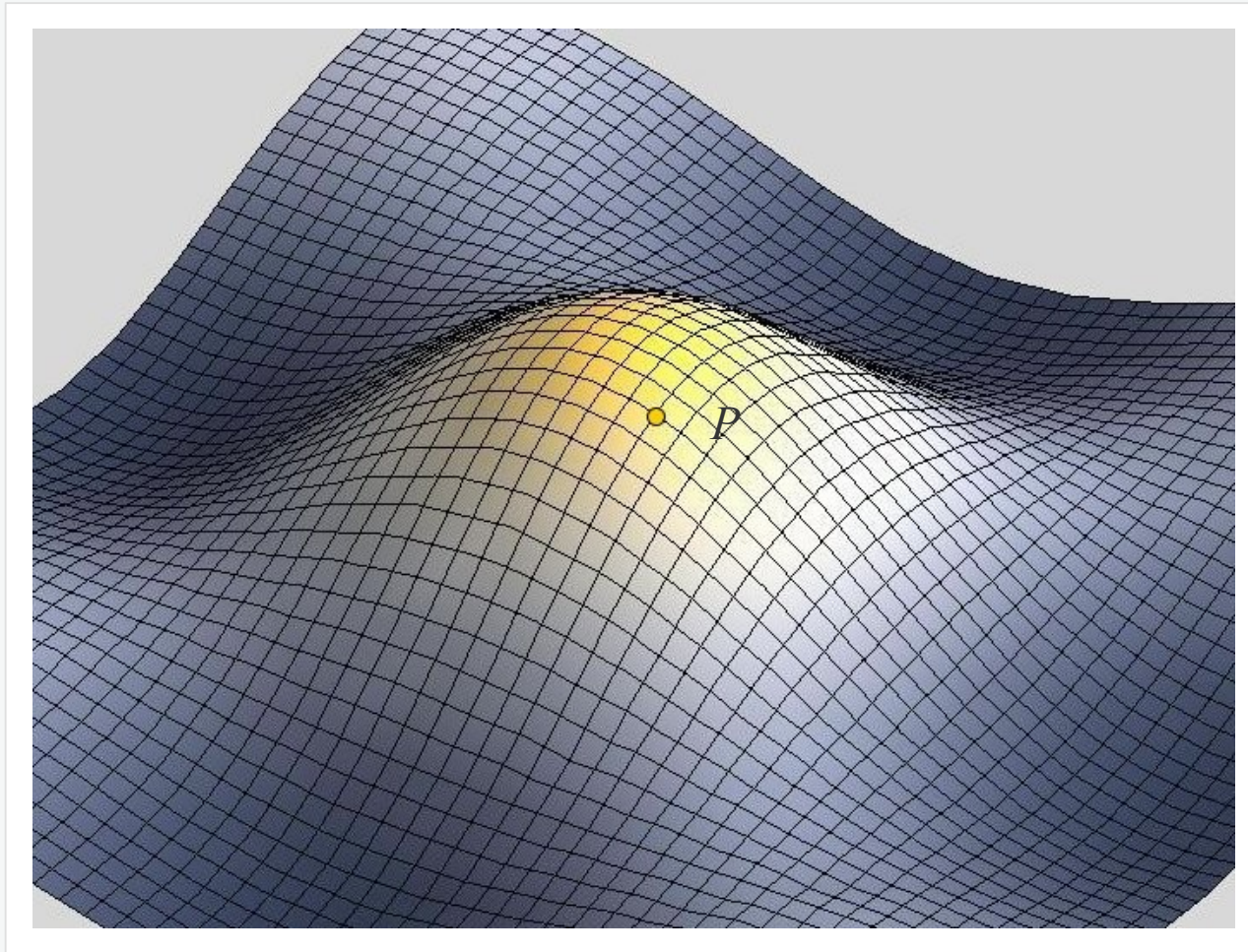


Abb. 6-4: Geometrisches “Zoomen” in die Fläche der Funktion $f = f(x, y)$ (Schritt 2)

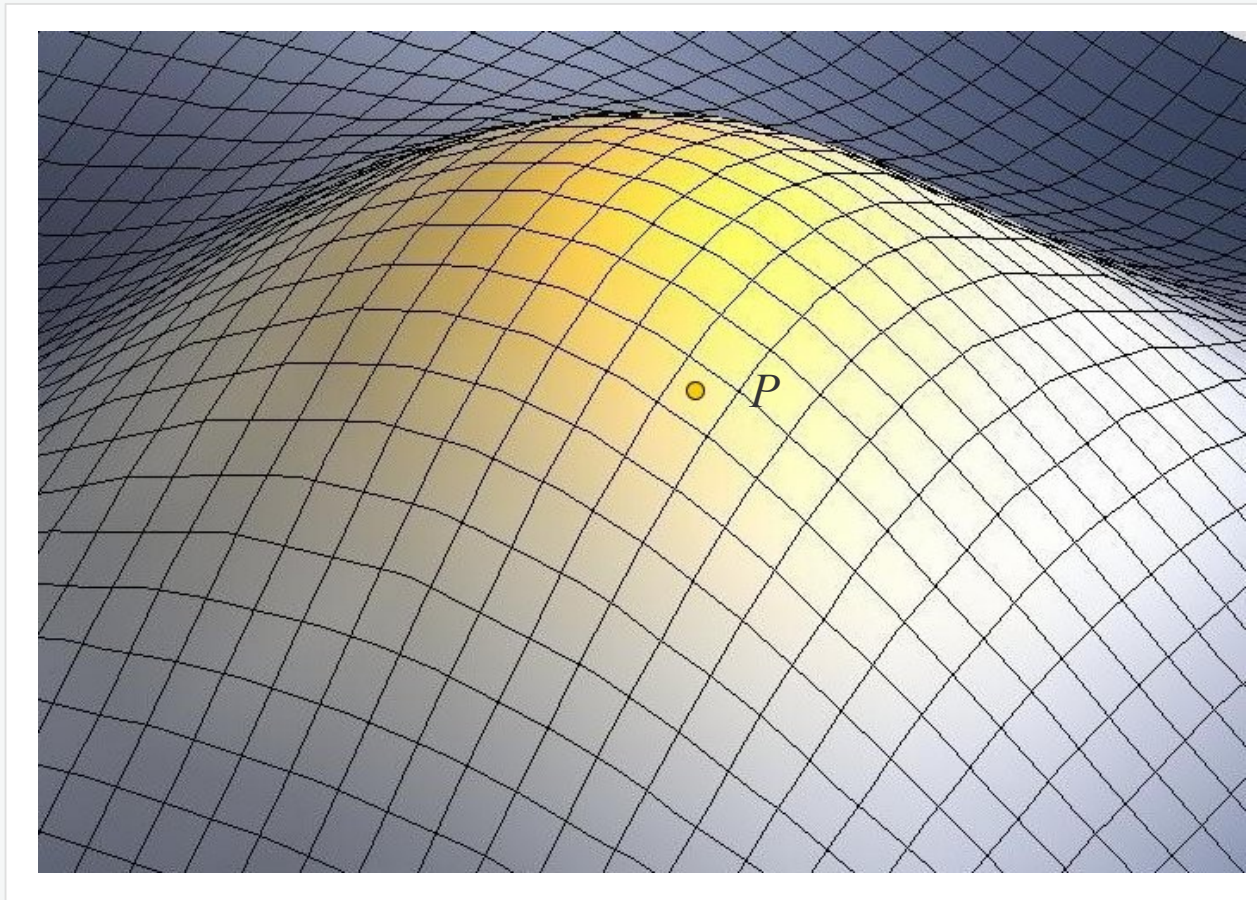


Abb. 6-5: Geometrisches “Zoomen” in die Fläche der Funktion $f = f(x, y)$ (Schritt 3)

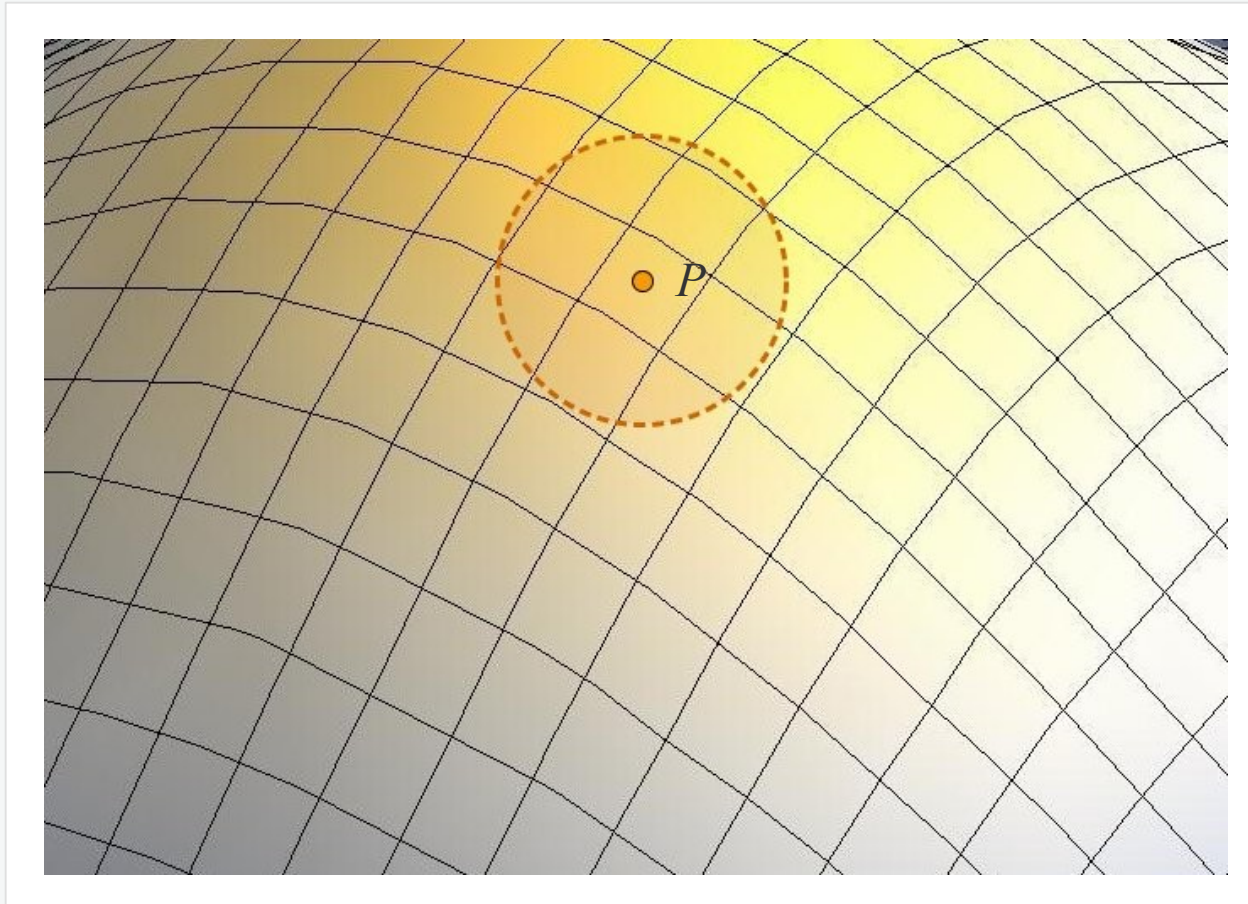


Abb. 6-6: Geometrisches “Zoomen” in die Fläche der Funktion $f = f(x, y)$ (Schritt 4). Die Fläche sieht in der gezeichneten Umgebung des Punktes P wie eine Ebene aus



http://www.youtube.com/watch?v=geseQR_u2tA

Geometrisches Zoomen verstehen wir auch intuitiv.

Was verstehen wir unter einem “algebraischen Zoomen”? Mit anderen Worten, wie kann man geometrisches Zoomen analytisch beschreiben?



http://www.youtube.com/watch?v=geseQR_u2tA

Algebraisches Zoomen bedeutet Differenzierbarkeit !

Auch eine Funktion $z = f(x, y)$ kann unter bestimmten Voraussetzungen in der unmittelbaren Umgebung eines Flächenpunktes linearisiert, d.h. durch eine lineare Funktion vom Typ

$$z = a x + b y + c$$

näherungsweise ersetzt werden. Linearisierung einer Funktion $f = f(x, y)$ bedeutet, dass man die gekrümmte Bildfläche von $f = f(x, y)$ in der unmittelbaren Umgebung des Punktes P durch die Tangentialebene ersetzt.

Eine Funktion, die in der Nähe eines Punktes durch eine Tangentialebene ersetzt werden kann, heißt total differenzierbar.

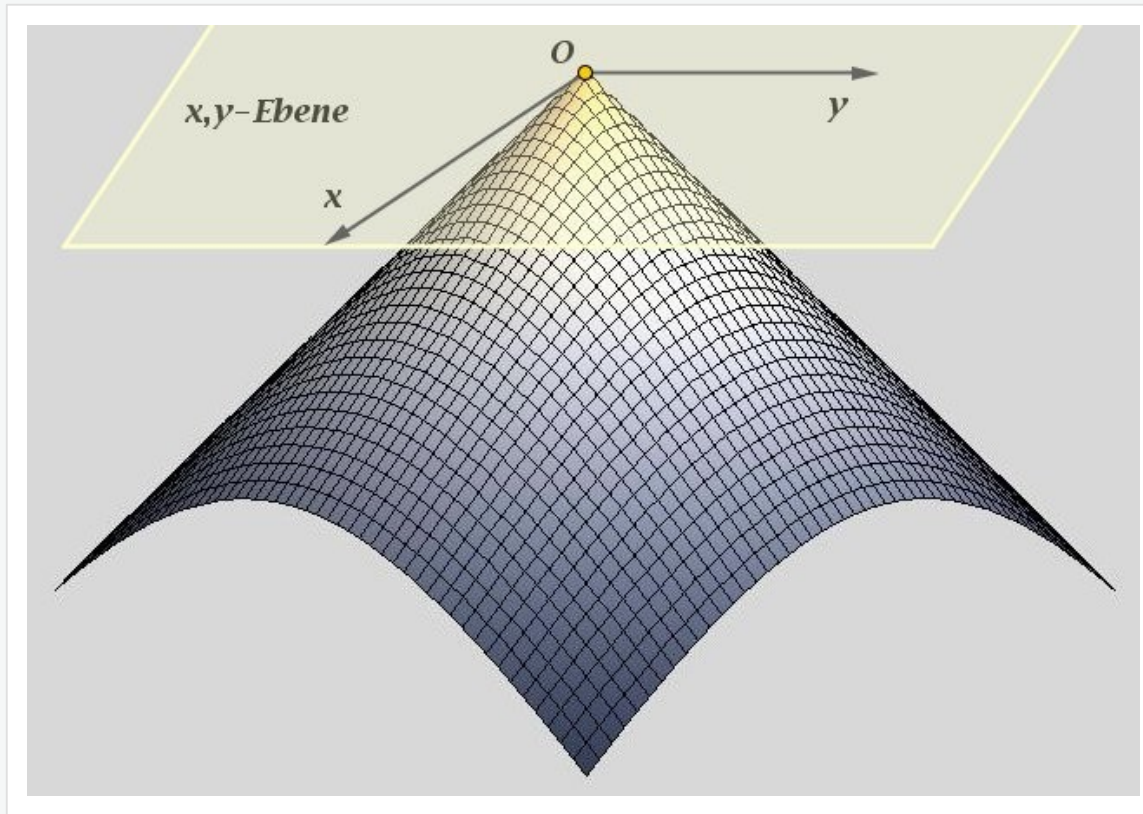


Abb. 8-1a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

Nicht differenzierbare Funktion $f = f(x, y)$: Beispiel 1

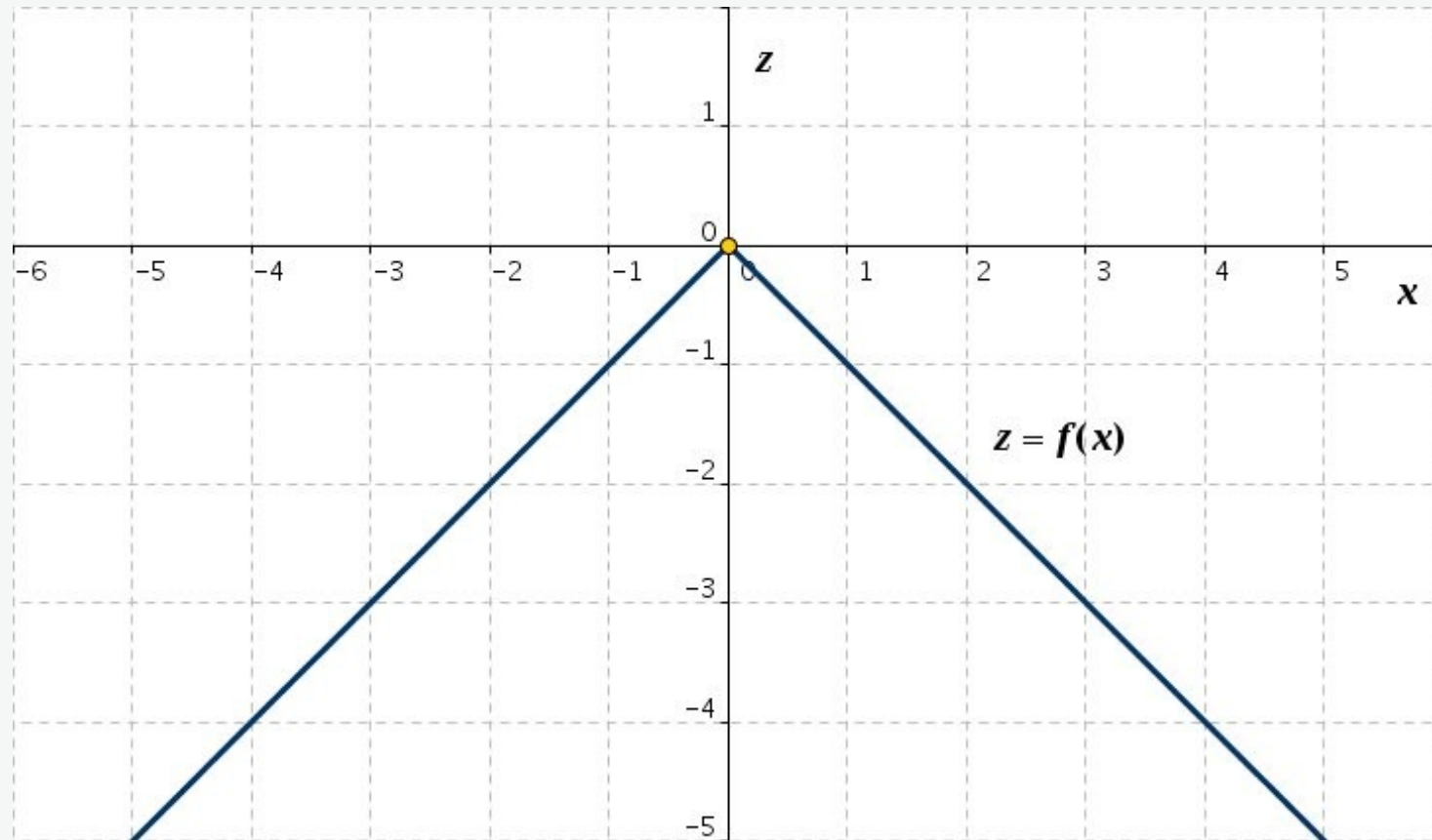


Abb. 8-1b: Die Schnittkurve der Funktion $z = f(x, y)$ und z, x -Ebene

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist im Punkt $O(0, 0)$ nicht differenzierbar.
Dieser Punkt entspricht der Spitze auf der Funktionsfläche.

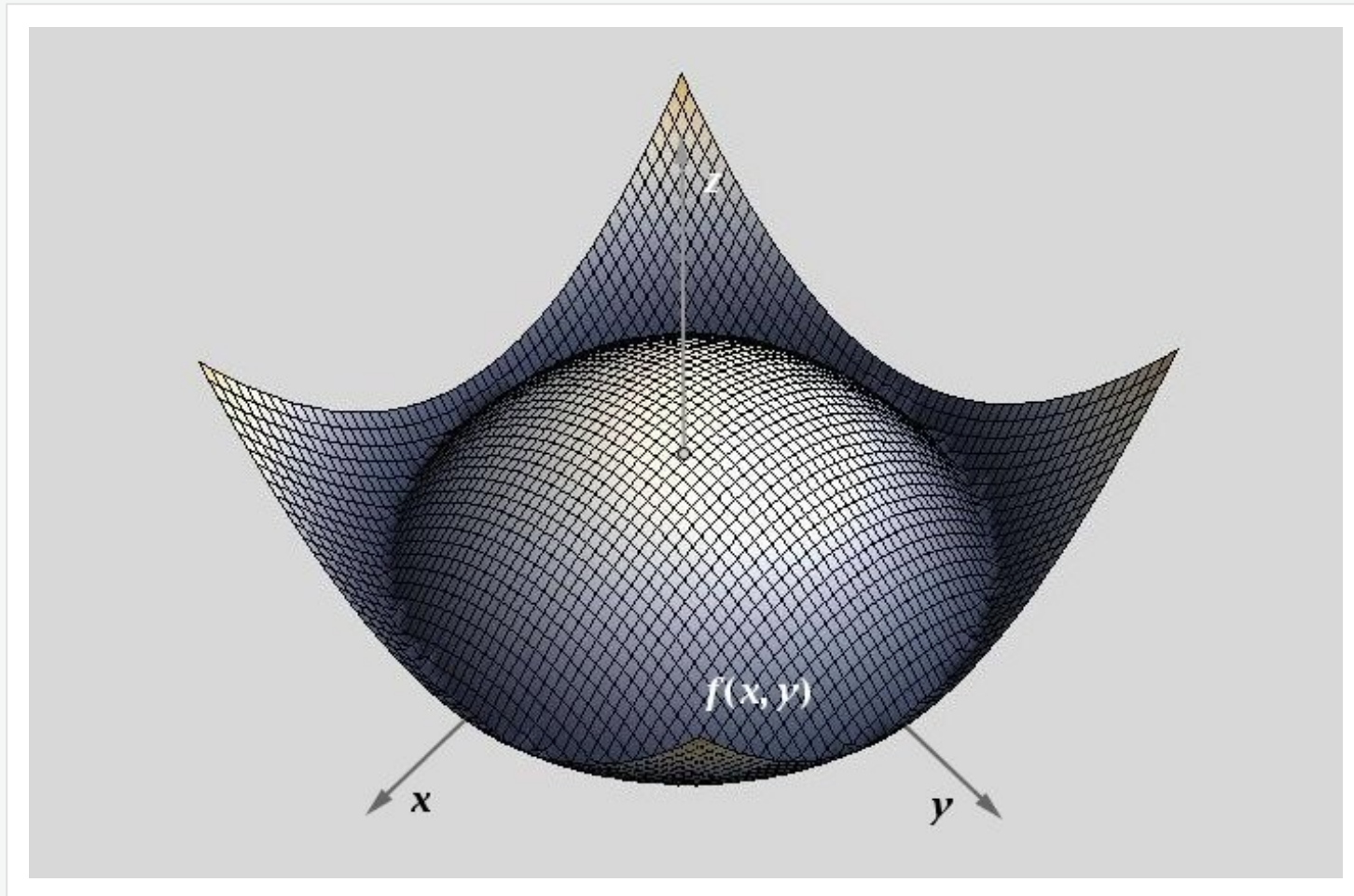


Abb. 8-2a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = |4 - x^2 - y^2|$$

Nicht differenzierbare Funktion $f = f(x, y)$: Beispiel 2

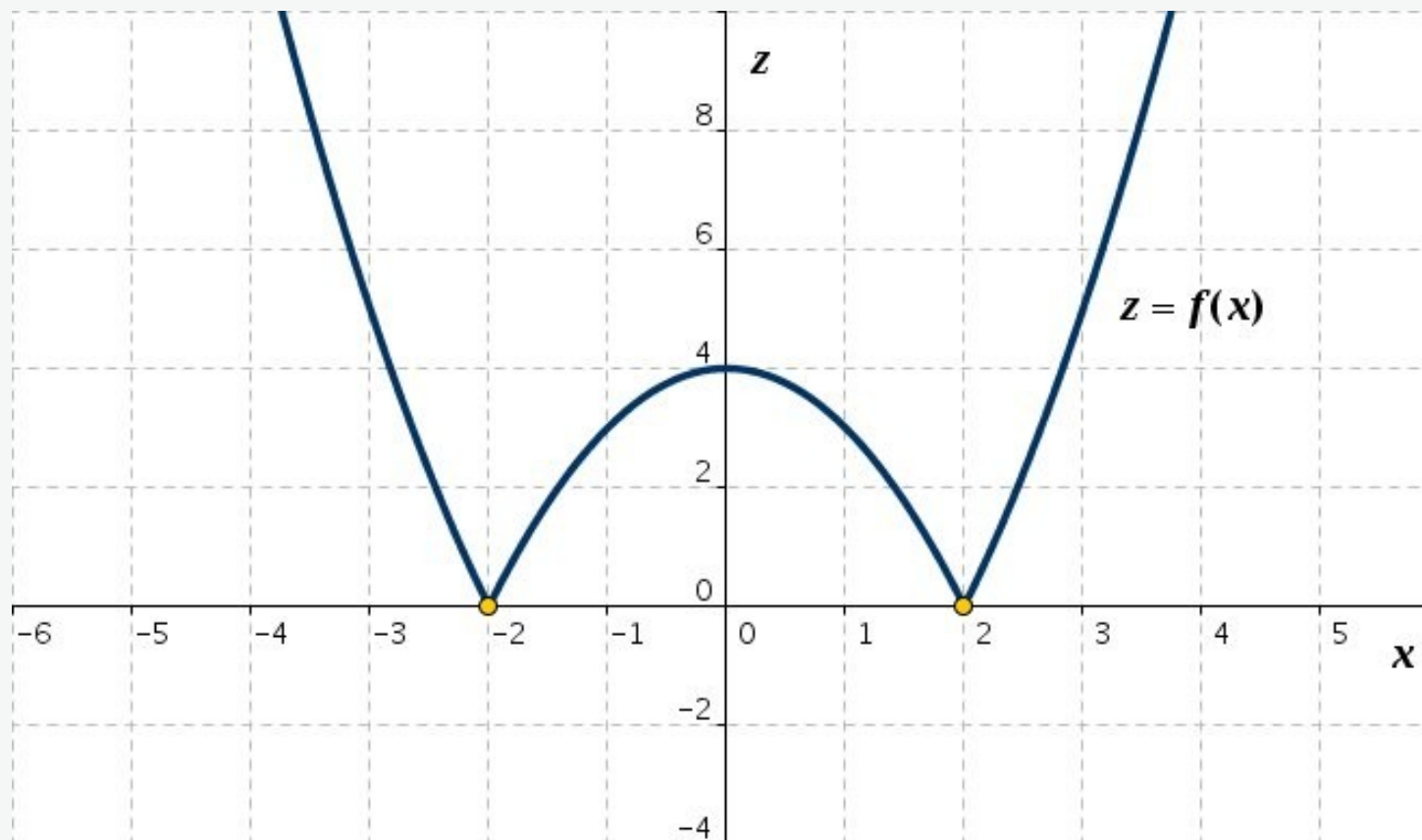


Abb. 8-2b: Die Schnittkurve der Funktion $f(x, y) = |4 - x^2 - y^2|$ und z, x -Ebene

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist in allen Punkten mit $z = 0$ nicht differenzierbar. Diese Punkte entsprechen einem Kreis $x^2 + y^2 = 4$ mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt im Punkt $(0, 0)$ der x, y -Ebene.

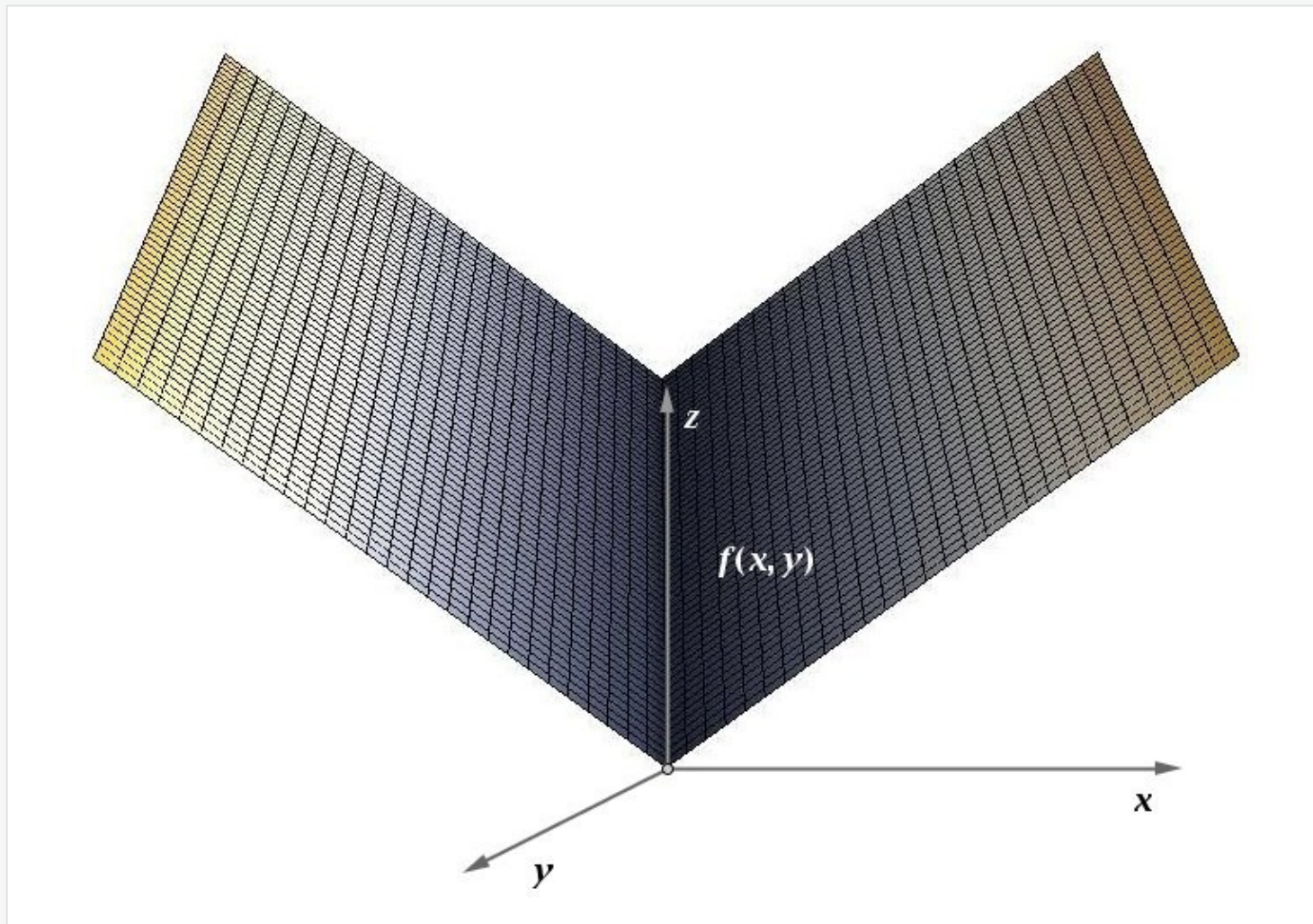


Abb. 8-3a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = |x|$$

Nicht differenzierbare Funktion $f = f(x, y)$: Beispiel 3

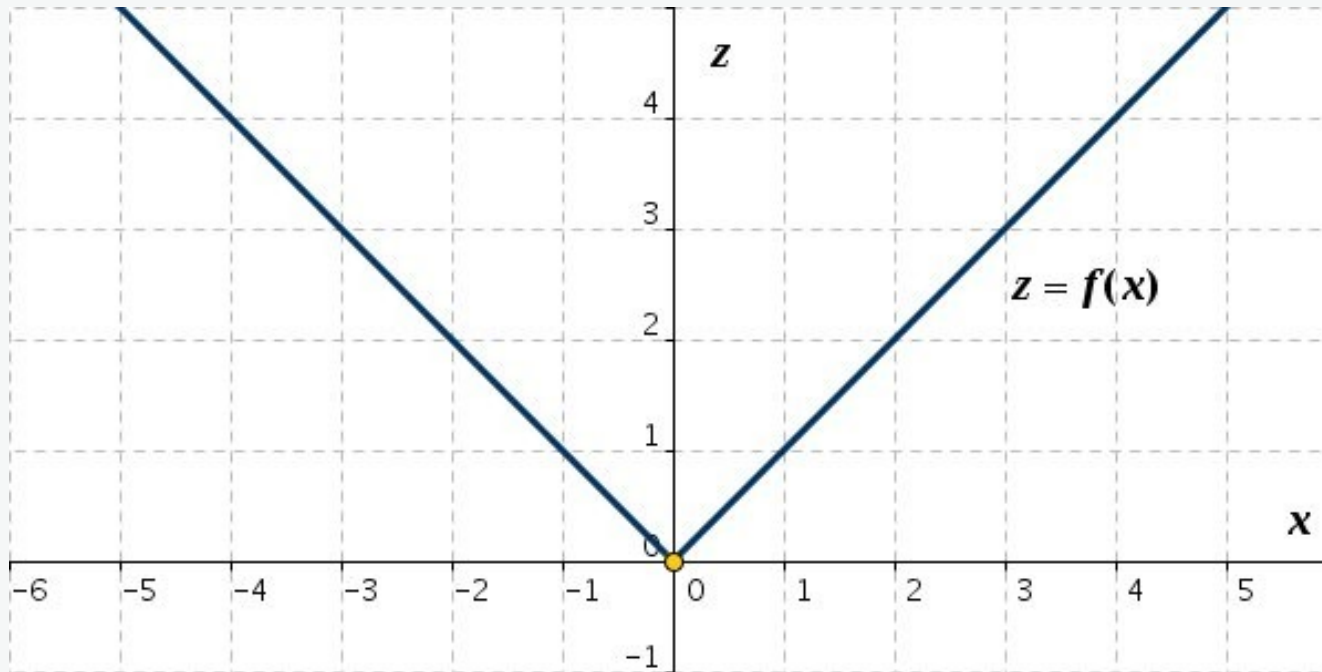


Abb. 8-3b: Die Schnittkurve der Funktion $f(x, y) = |x|$ und z, x -Ebene

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist in allen Punkten mit $z = 0$ nicht differenzierbar. Diese Punkte entsprechen den Punkten der y -Achse ($x = 0$).

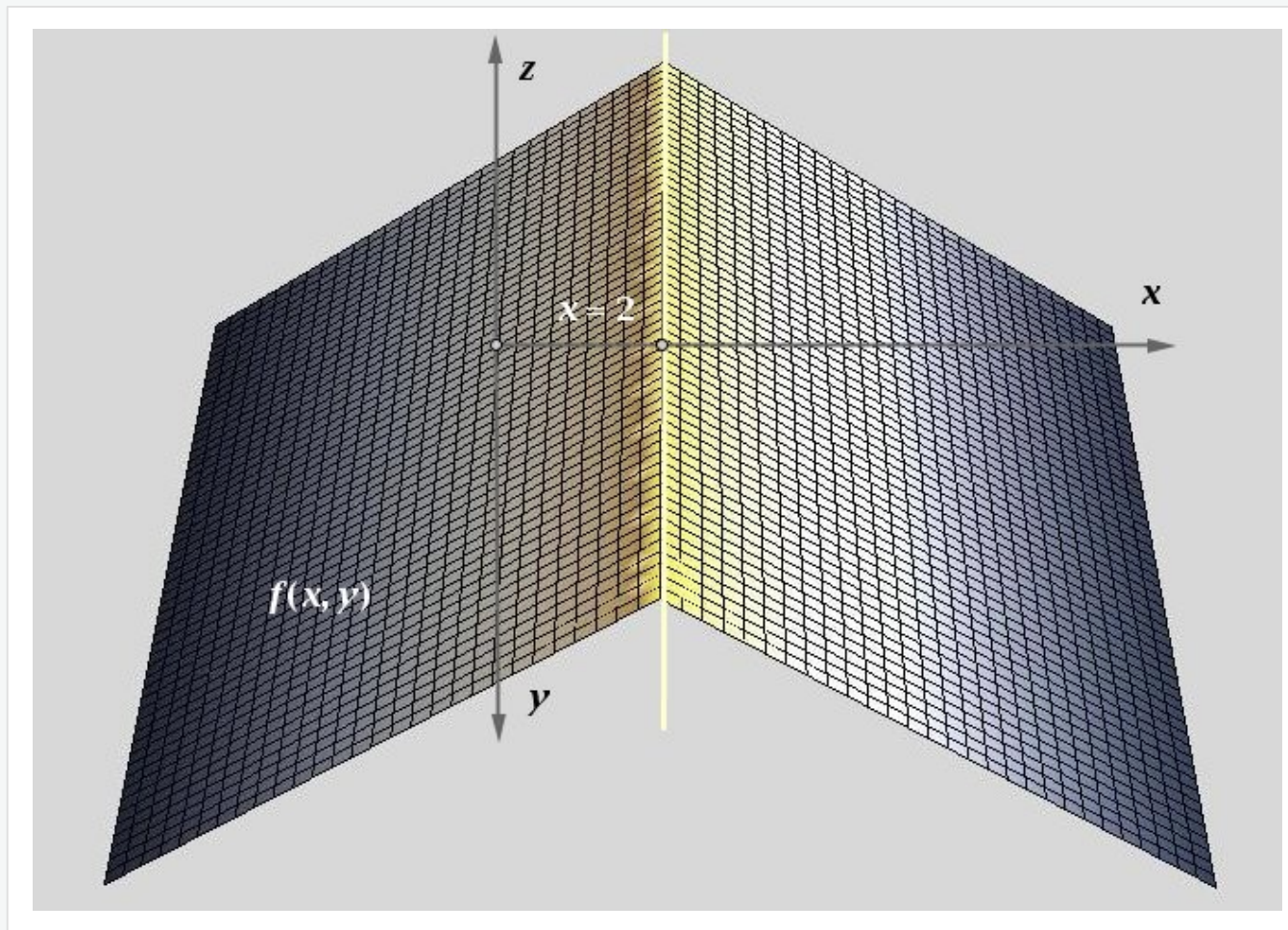


Abb. 8-4a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = -|x - 2|$$

Nicht differenzierbare Funktion $f = f(x, y)$: Beispiel 4

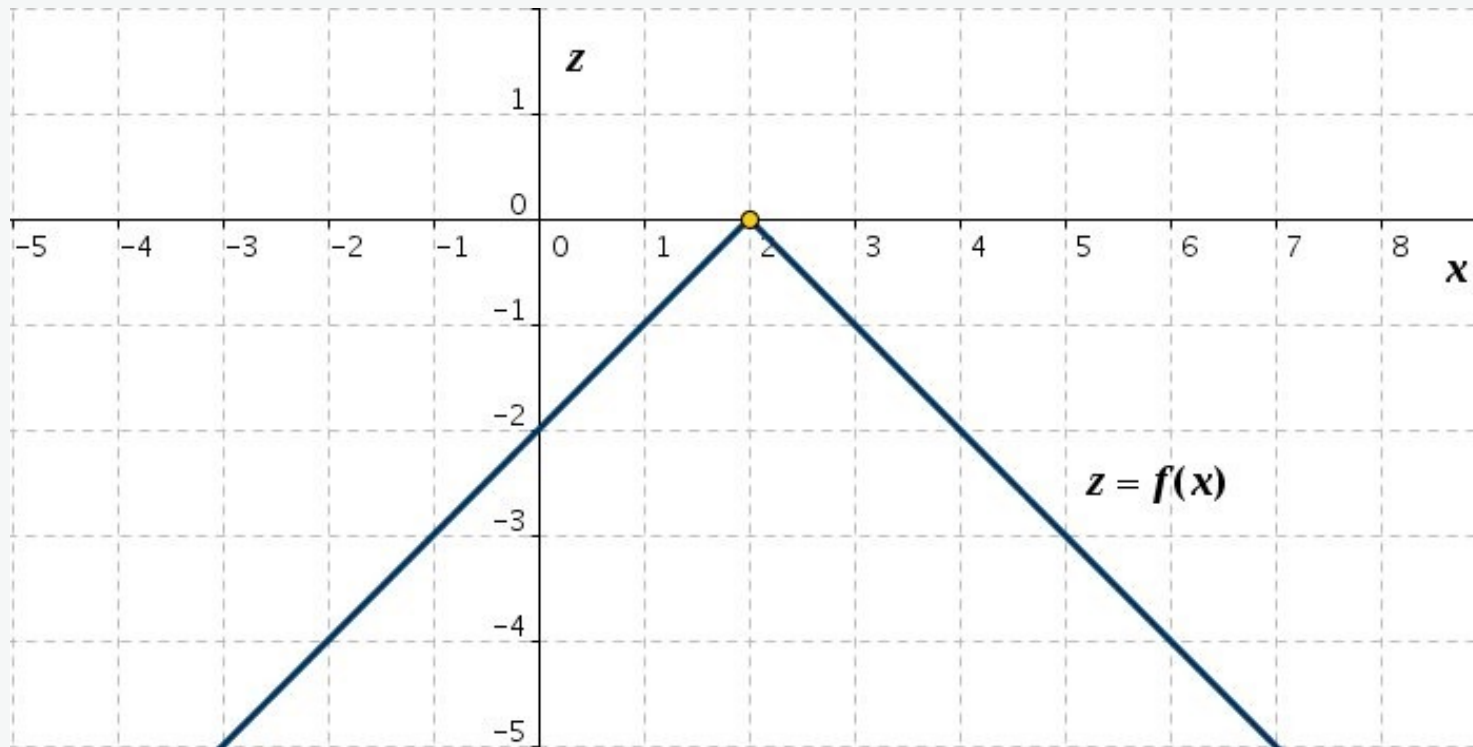


Abb. 8-4b: Die Schnittkurve der Funktion $f(x, y) = -|x - 2|$ und z, x -Ebene

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist in allen Punkten mit $z = 0$ nicht differenzierbar. Diese Punkte entsprechen den Punkten der Gerade $x = 2$ der x, y -Ebene.

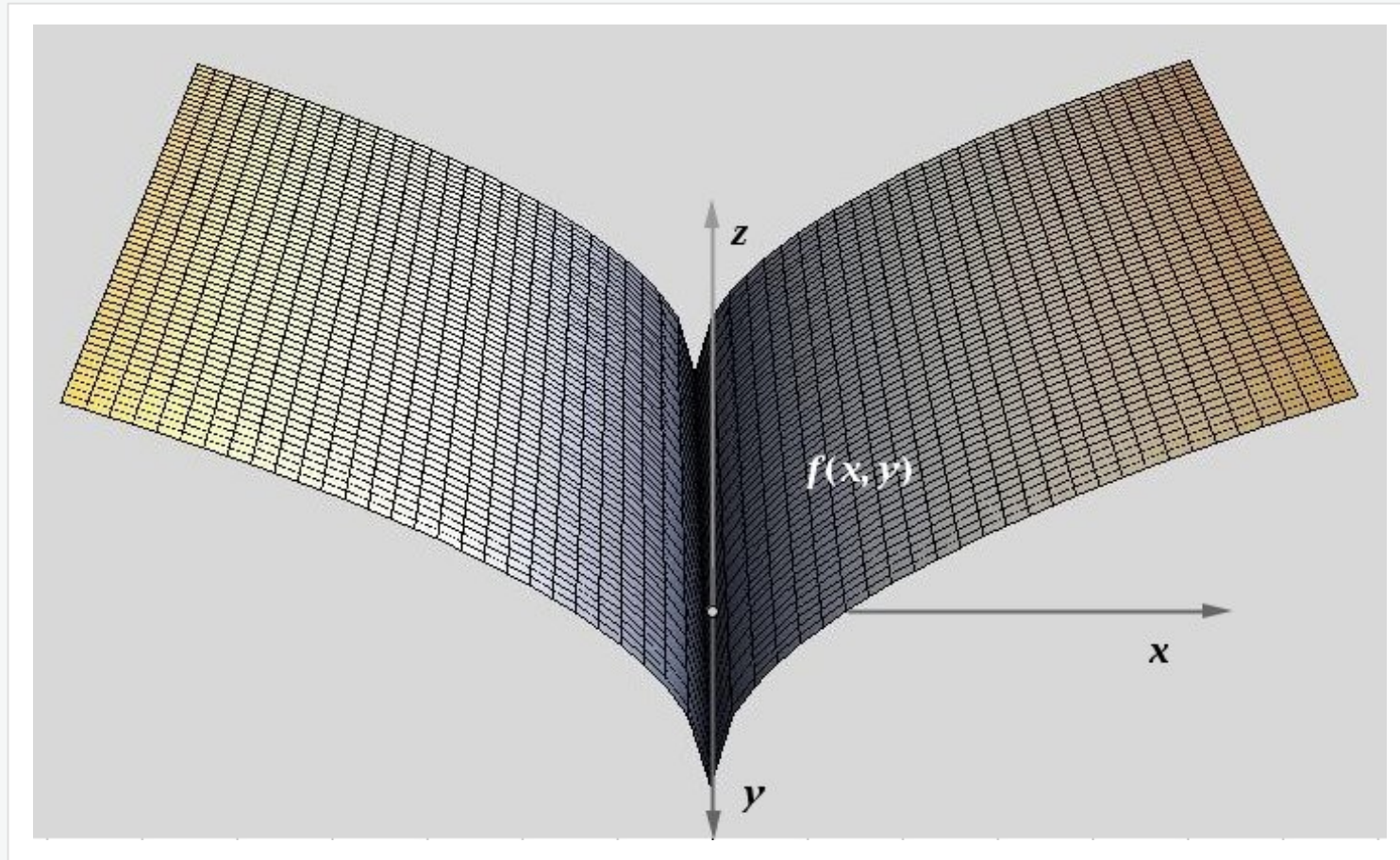


Abb. 8-5a: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ als Fläche im 3D-Raum

$$f(x, y) = \sqrt{|x|}$$

Nicht differenzierbare Funktion $f = f(x, y)$: Beispiel 5

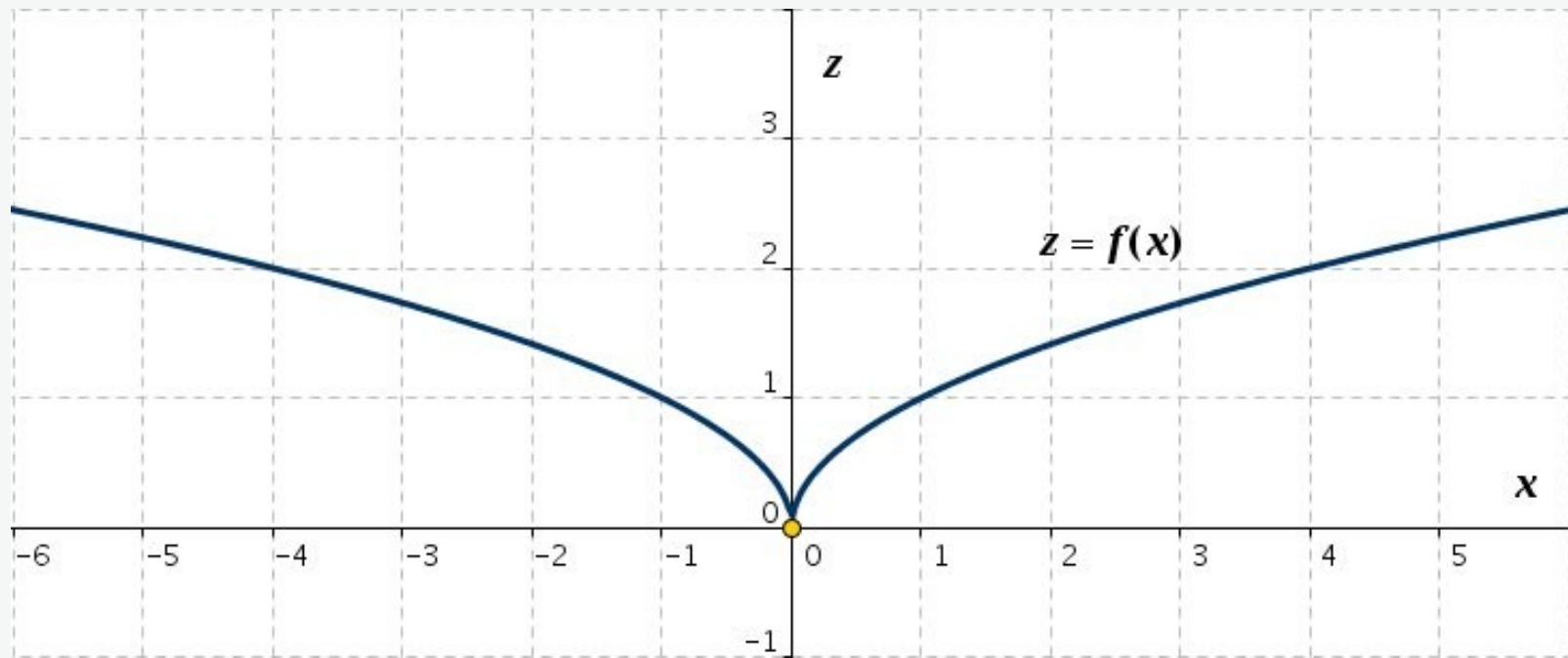


Abb. 8-5b: Die Schnittkurve der Funktion $z = f(x, y)$ und z, x -Ebene

Die Funktion $z = f(x, y)$ ist in allen Punkten mit $z = 0$ nicht differenzierbar. Diese Punkte entsprechen den Punkten der y -Achse ($x = 0$).