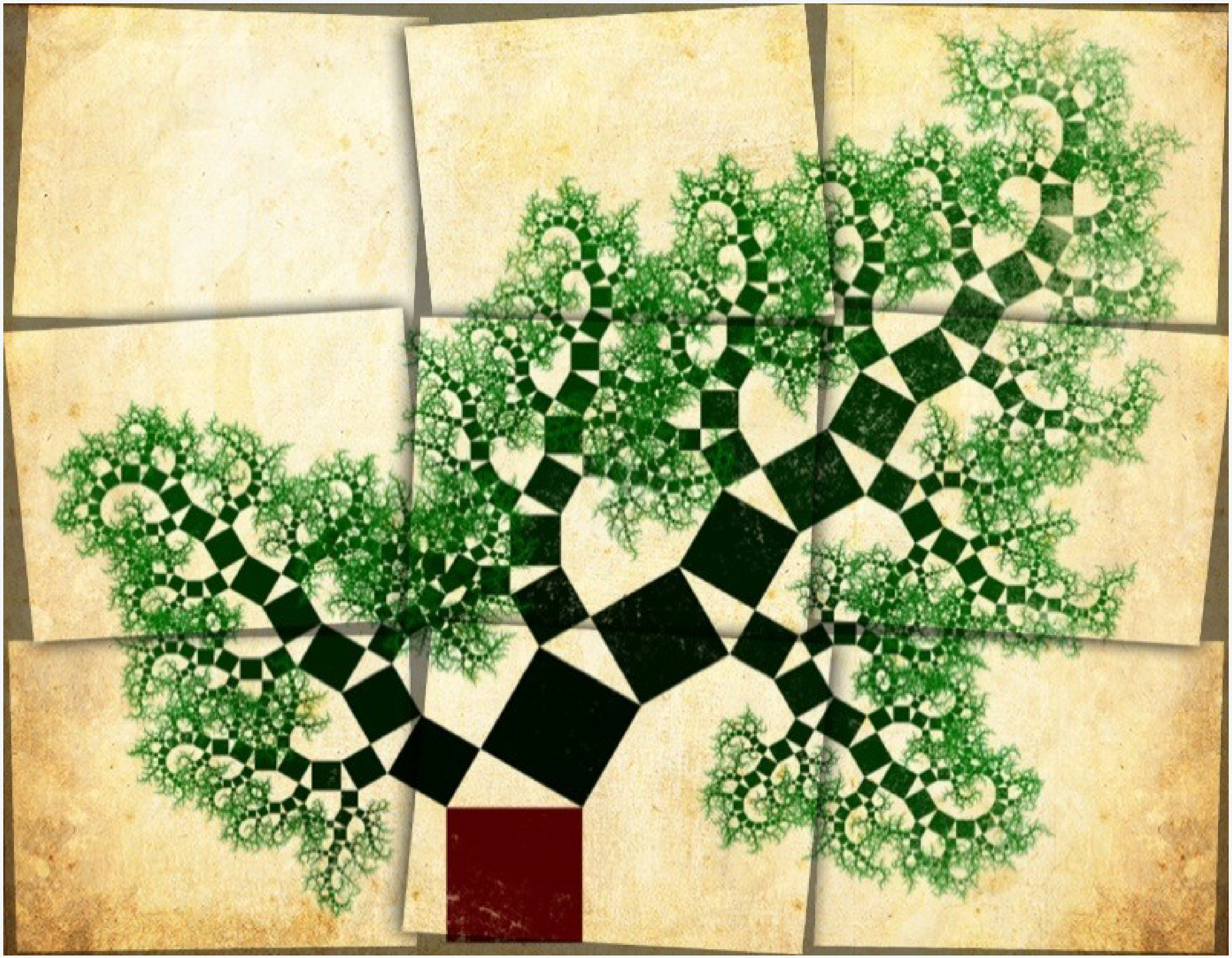


Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$$f(x, y) = x \cos y + y e^x$$

$\downarrow$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y e^x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

$\downarrow$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = y e^x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \cos y$$

Definition:

Eine partielle Ableitung

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$$

wird gebildet, indem man die Funktion $z = f(x, y)$ zunächst nach der Variablen x und anschließend nach der Variablen y differenziert.

Partielle Ableitungen *2*. Ordnung:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Gemischte partielle Ableitungen *2*. Ordnung

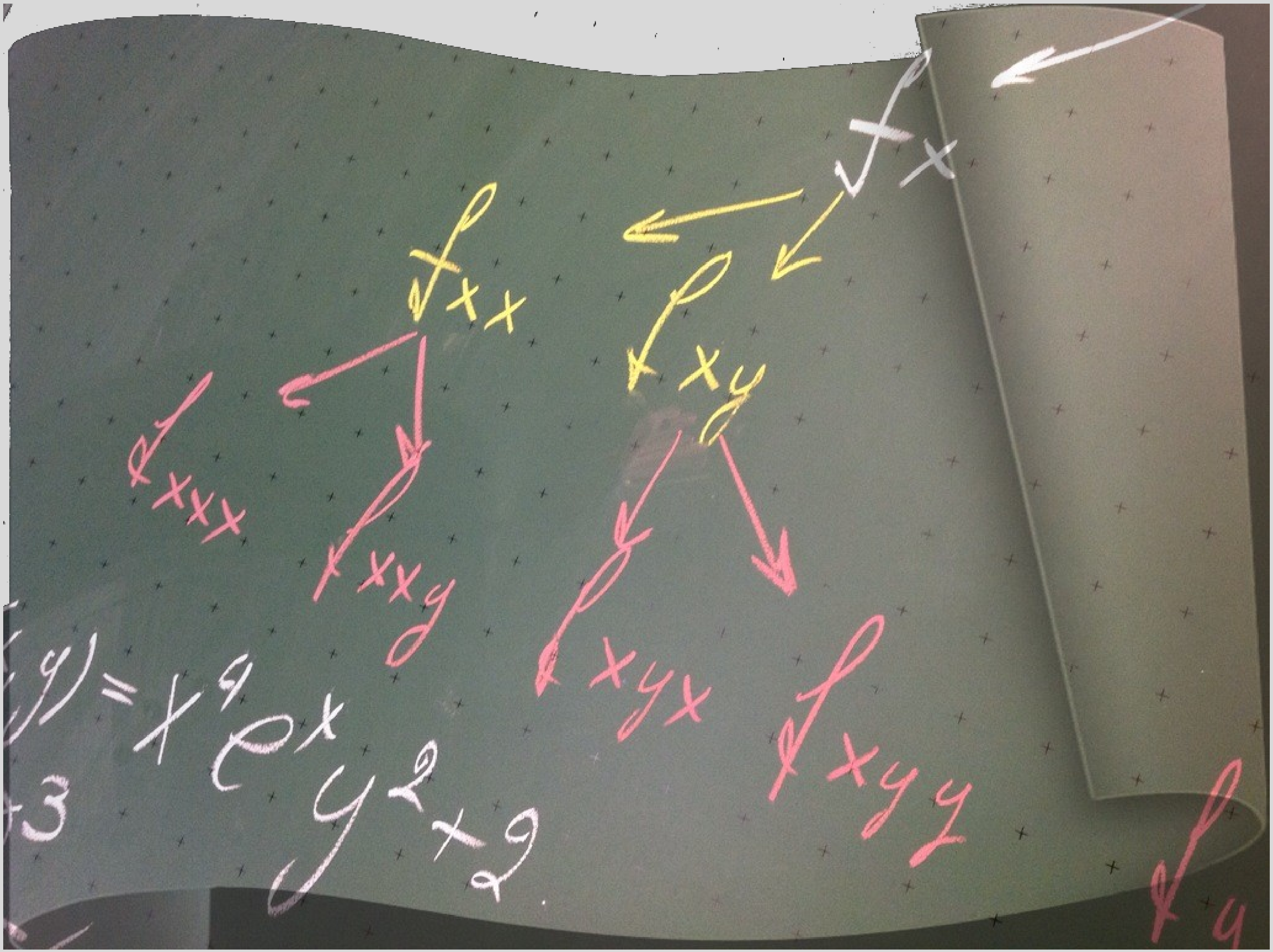
$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}$$

Gemischte partielle Ableitungen *3*. Ordnung

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \qquad f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \qquad f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

Die Zahl der möglichen partiellen Ableitungen höherer Ordnung wird rasch größer. Aus einer Funktion von zwei Variablen erhält man zwei partielle Ableitungen 1. Ordnung, vier partielle Ableitungen *2*. Ordnung und acht partielle Ableitungen *3*. Ordnung.


f
x
f
xx
f
xy
f
xxx
f
xxy
f
xyx
f
xyy
(y) = x⁴eˣ
y²+2

Partielle Ableitungen höherer Ordnung: anschauliche Vorstellung

http://dark.pozadia.org/images/wallpapers/57-288798.jpeg

Abb. 1-1a: Die wachsende Zahl der partiellen Ableitungen kann man mit einem Baum vergleichen: je höher, desto mehr Äste

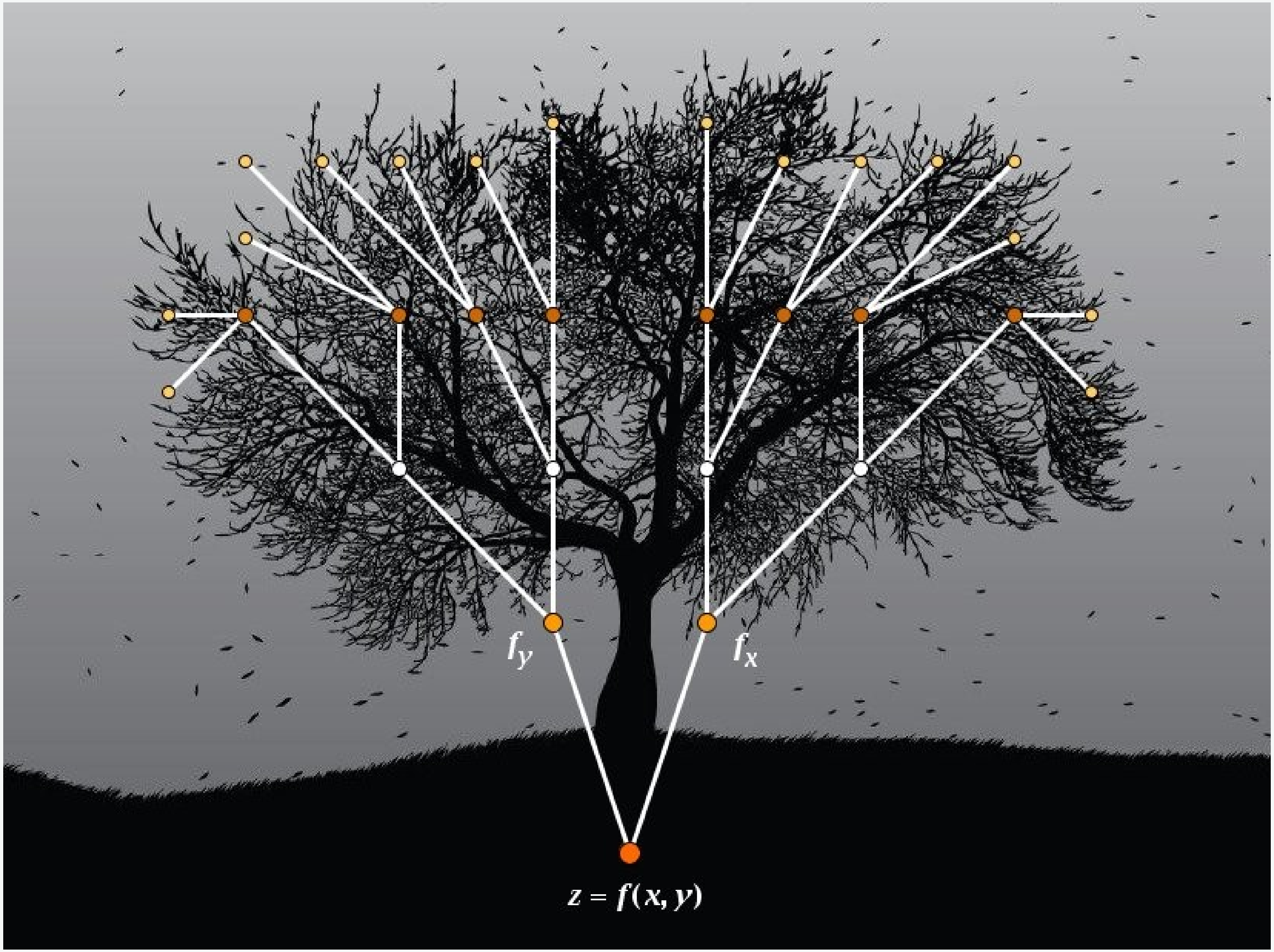
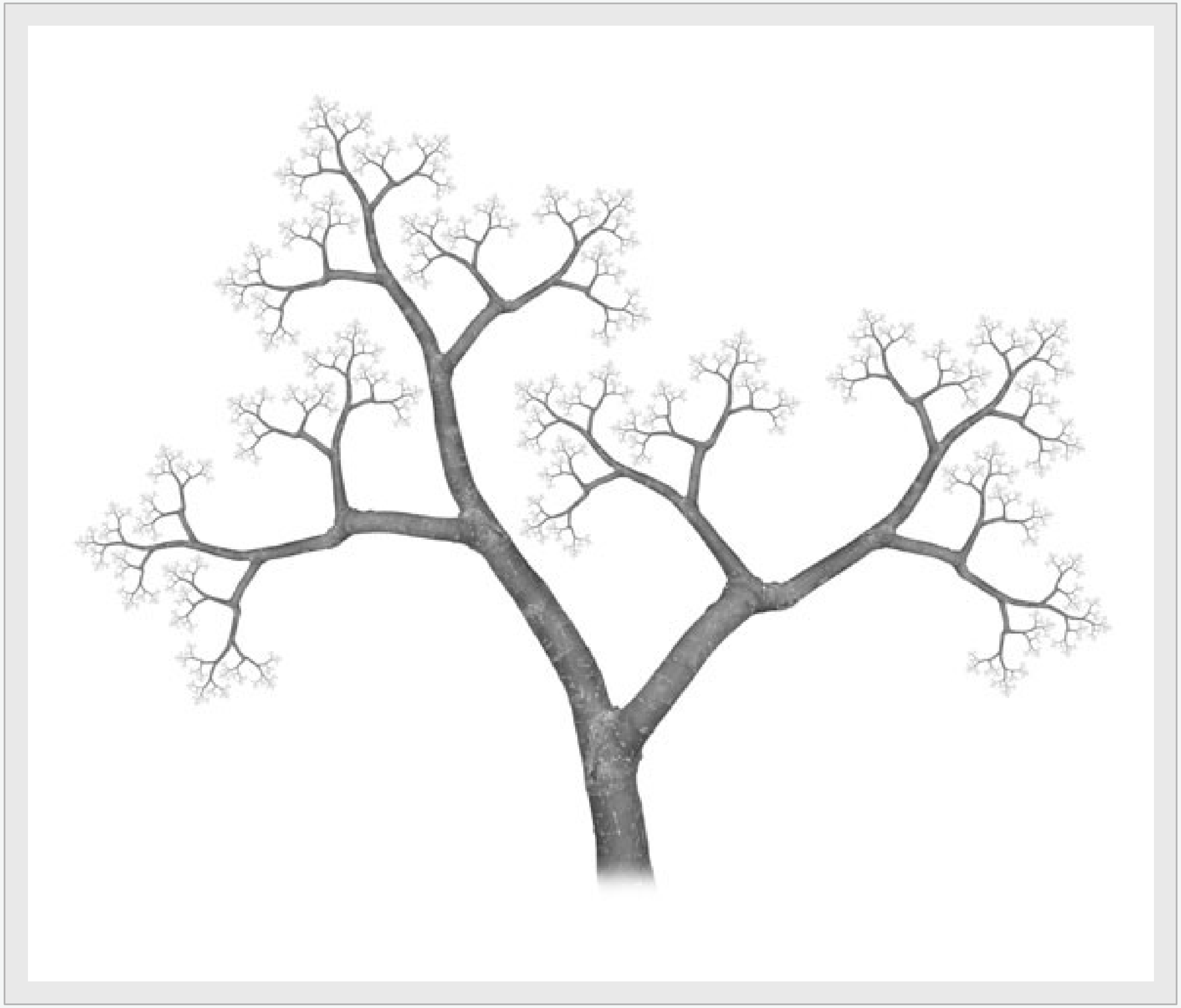


Abb. 1-1b: Die wachsende Zahl der partiellen Ableitungen einer Funktion $z = f(x, y)$



http://www.mathartfun.com/shopsite_sc/store/html/FractalTree2.jpg

Abb. 1-2a: Ein fraktaler Baum: In jedem Teil wiederholt sich die Baumstruktur immer kleiner werdend

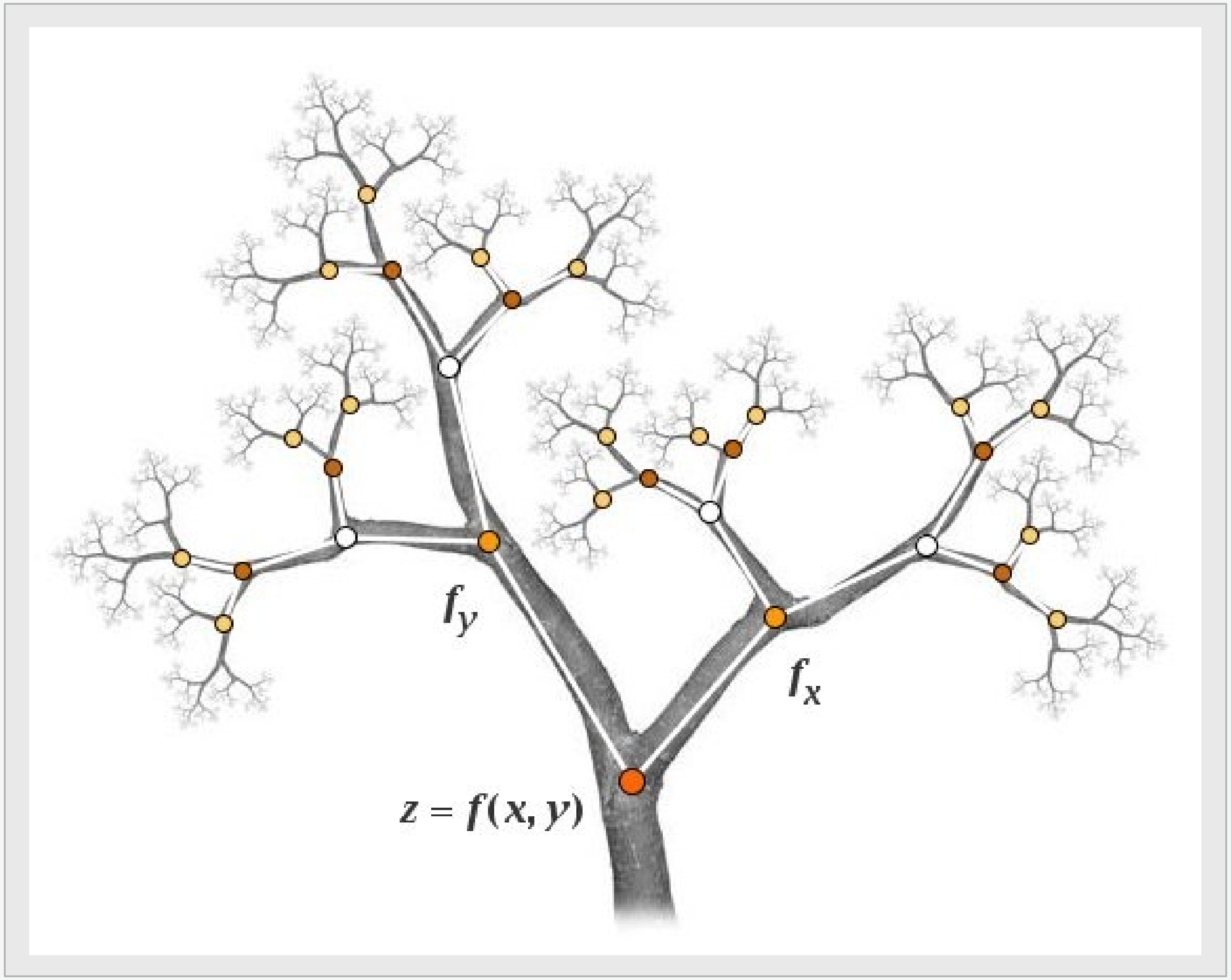


Abb. 1-2b: Ein fraktaler Baum und partielle Ableitungen einer Funktion von zwei Variablen

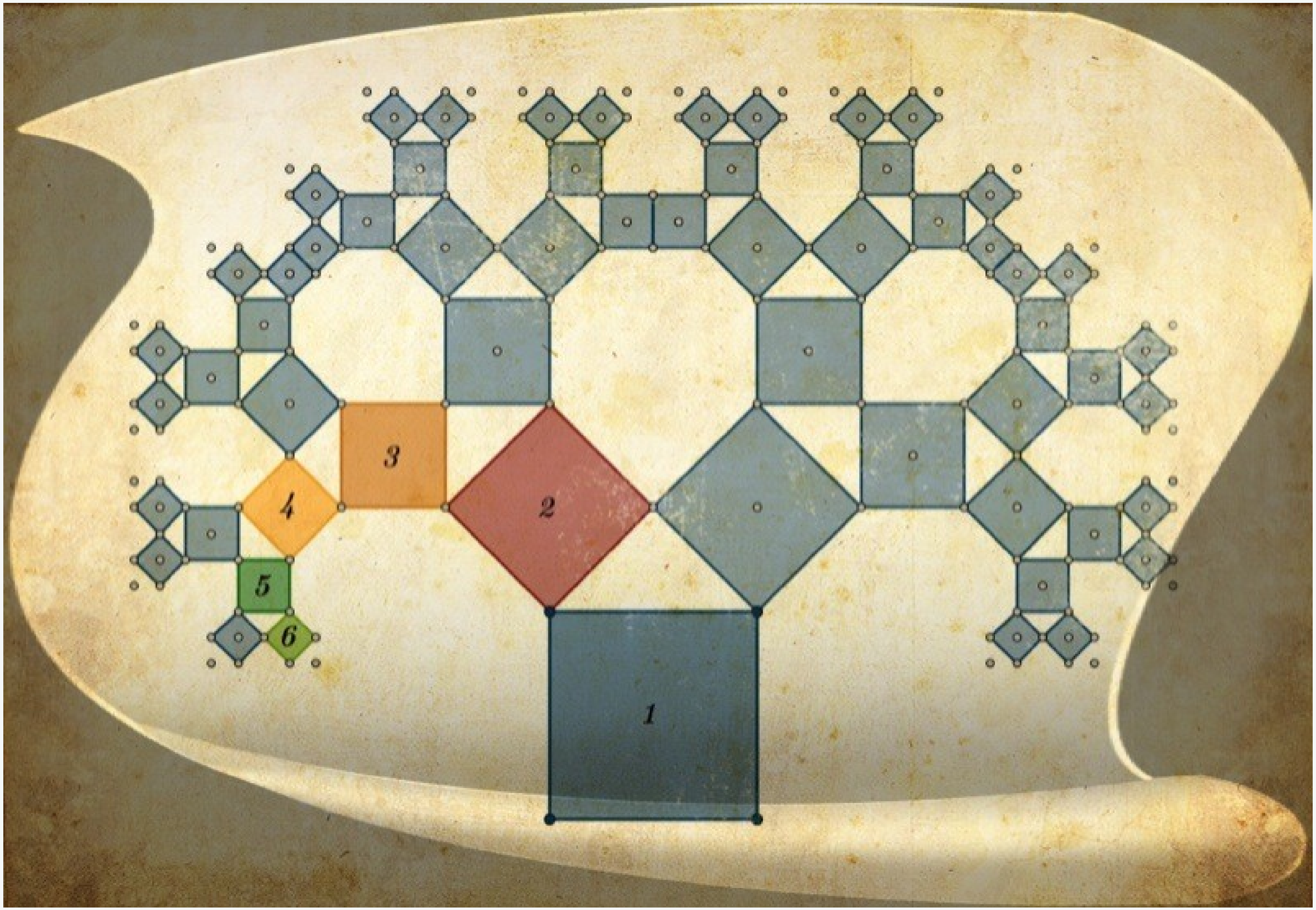


Abb. 1-3: Ein Pythagoras-Baum (dargestellt mit GeoGebra)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y)$ die partiellen Ableitungen *2*. Ordnung

Aufgabe 1: $f(x, y) = x^3 \sin(2y)$

Aufgabe 2: $f(x, y) = x^3 y + y$

Aufgabe 3: $f(x, y) = \sin x + e^{2x} \cos y$

Aufgabe 4: $f(x, y) = e^{x^2} + y^2$

$$f(x, y) = x^3 \sin(2y)$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin(2y) \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 \cos(2y)$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \sin(2y) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x^3 \sin(2y)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6x^2 \cos(2y) \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6x^2 \cos(2y)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 6x^2 \cos(2y)$$

$$f(x, y) = x^3 y + y$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 1$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 3x^2 \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3x^2$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 3x^2$$

$$f(x, y) = \sin x + e^{2x} \cos y$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + 2 e^{2x} \cos y, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{2x} \sin y$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x + 4 e^{2x} \cos y, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 e^{2x} \sin y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 e^{2x} \sin y, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{2x} \cos y,$$

$$f_{yx} = f_{xy} = -2 e^{2x} \sin y$$

$$f(x, y) = e^{x^2} + y^2$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2}, \qquad f_y = 2y$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(1 + 2x^2)\, e^{x^2}, \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yx} = 0, \qquad f_{yy} = 2$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$

Lösung 1: $f_{xy} = f_{yx} = 6x^2 \cos(2y)$

Lösung 2: $f_{xy} = f_{yx} = 3x^2$

Lösung 3: $f_{yx} = f_{xy} = -2e^{2x} \sin y$

Lösung 4: $f_{xy} = f_{yx} = 0$

Gemischte partielle Ableitungen *2*. Ordnung sind gleich. Es es eine Regel oder ein Zufall?

Partielle Ableitungen höherer Ordnung: Aufgabe 5

Bestimmen Sie für folgende partiellen Ableitungen:

$a)\quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x\,y}\,) + e^{x^2} + e^{y^2}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = ?$

$b)\quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x + y}\,) + \cos(x^2) - \sin(x\,y), \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = ?$

$c)\quad f(x, y, z) = \ln(x^2\sqrt{y}\,) + \tan(z + x\,y), \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

$d)\quad f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{y}}\right) + e^{x}\cdot y, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ?$

$e)\quad f(x, y) = \sin(\sqrt{x - 2\,y}\,), \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

$f)\quad f(x, y) = \cos(x^2 - x\,y), \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = ?$

a) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x\,y}) + e^{x^2} + e^{y^2}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{x\,y}) + e^{x^2} + e^{y^2} = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln y\right) + e^{x^2} + e^{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$$

b) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x + y}) + \cos(x^2) - \sin(x\,y), \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{2(x + y)^2} + x\,y\sin(x\,y) - \cos(x\,y)$$

c) $f(x, y, z) = \ln(x^2\sqrt{y}) + \tan(z + x\,y), \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$f(x, y, z) = \ln(x^2\sqrt{y}) + \tan(z + x\,y) = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln y + \tan(z + x\,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\,y^2} + 2\,x^2\tan(z + x\,y)\sec^2(z + x\,y)$$

$$f(x,y,z) = \ln(x^2\sqrt{y}) + \tan(z+xy)$$

$$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln y + \tan(z+xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\right) = $$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2y} + \frac{1}{\cos^2(z+xy)} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{2y^2} - \frac{x}{\cos^4(z+xy)} \cdot 2\cos(z+xy)\cdot(-\sin(z+xy)$$

$$= -\frac{1}{2y^2} + \frac{2x^2\sin(z+xy)}{\cos^3(z+xy)}$$