



Partielle Ableitungen



Bei einer Funktion

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

von n unabhängigen Variablen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

lassen sich insgesamt n partielle Ableitungen 1. Ordnung bilden:

- In der Funktionsgleichung werden alle unabhängigen Variablen bis auf die eine, nach der differenziert wird, als konstante Größen, d.h. als Parameter betrachtet.
- Die gegebene Funktion erscheint als eine Funktion von einer Variablen und wird unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln nach dieser Variablen differenziert. Das Ergebnis der Differentiation ist die Ableitung 1. Ordnung.



Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen

a) $f(x, y, z) = 2 \sin x + x \ln(yz)$

b) $f(x, y, z) = x^2(y + z) + e^x$

c) $f(x, y, z) = e^{x+z} + \ln(xyz)$

$$a) \quad f(x, y, z) = 2 \sin x + x \ln(yz) = 2 \sin x + x(\ln y + \ln z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x}(\sin x) + (\ln y + \ln z) \frac{\partial}{\partial x}(x) = 2 \cos x + \ln y + \ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y}(\ln y) = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x \frac{\partial}{\partial z}(\ln z) = \frac{x}{z}$$

$$b) \quad f(x, y, z) = x^2(y + z) + e^x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y + z) + e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = x^2$$

$$c) \quad f(x, y, z) = e^{x+z} + \ln(xyz) = e^{x+z} + \ln x + \ln y + \ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+z} + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{x+z} + \frac{1}{z}$$

Die Ableitungsregeln sind die gleichen wie bei den Funktionen von einer Veränderlichen.

Funktion einer Variablen:

$$f = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u \quad \Leftrightarrow \quad f' = u' v + v' u$$

Funktion von zwei Variablen:

$$f = f(x, y) = u(x, y) \cdot v(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (u v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u, \quad f_x = u_x v + v_x u$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (u v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u, \quad f_y = u_y v + v_y u$$



Funktion einer Variablen:

$$f = f(x) = F(u(x))$$

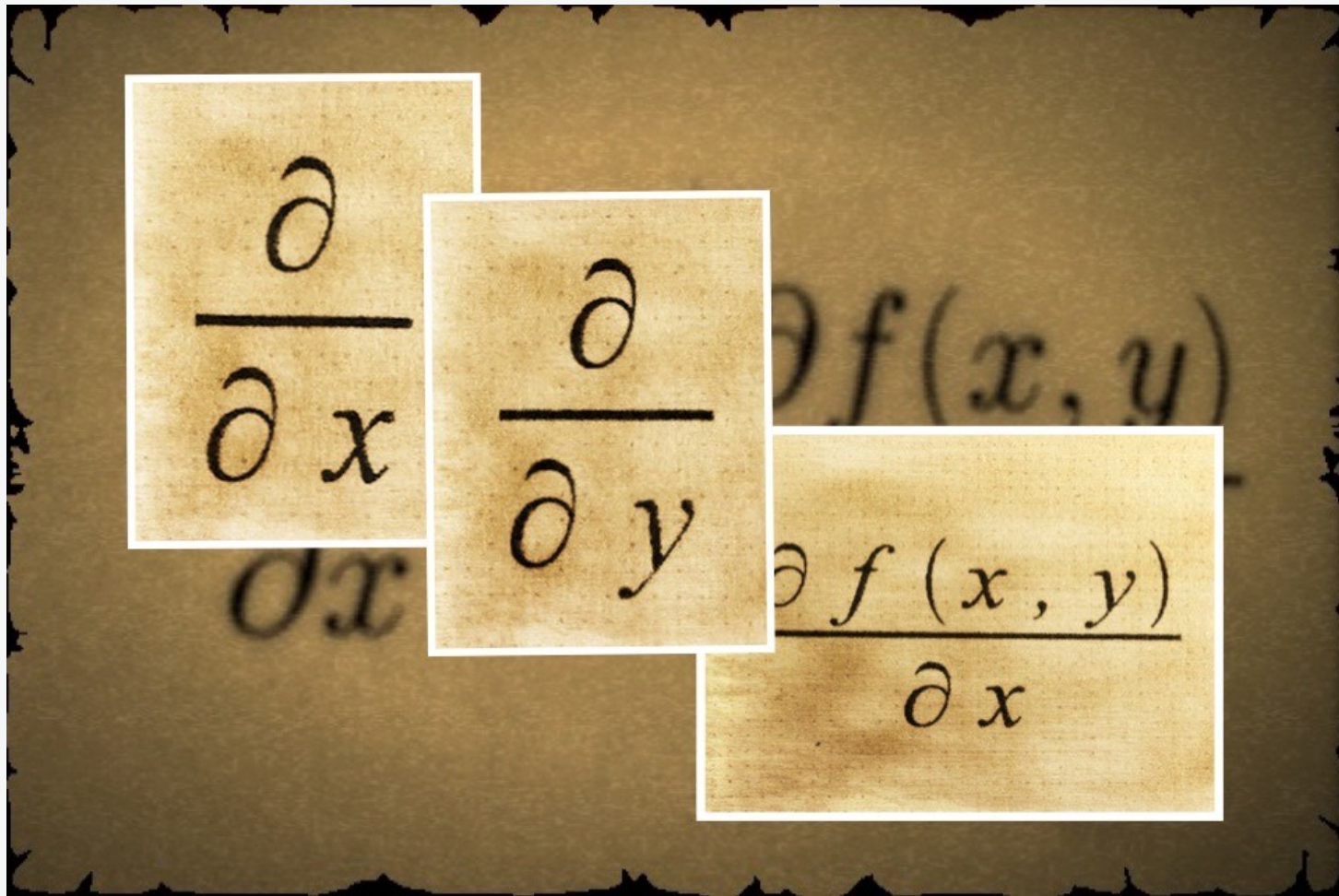
$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dF}{du} - \text{äußere Ableitung}, \quad \frac{du}{dx} - \text{innere Ableitung}$$

Funktion von zwei Variablen:

$$f = f(x, y) = F(u(x, y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial y}$$



Die partiellen Ableitungen sind nichts anderes als die gewöhnlichen Ableitungen, bei denen alle Variablen bis auf eine festgehalten werden. Die wichtige Konsequenz ist, dass sich alle Regeln für das Differenzieren von Funktionen einer Variablen auf die partielle Differentiation übertragen.



Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y)$ im Punkt P

Aufgabe 3: $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad P = P(1, 1)$

Aufgabe 4: $f(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2}$

$a) \quad P = (1, 0), \quad b) \quad P = (0, 1), \quad c) \quad P = (1, 1)$

Aufgabe 5: $f(x, y) = x^3 + 2 \cos y$

$a) \quad P = (1, \pi), \quad b) \quad P = \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad P = P(1, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2 < 0$$

Die partielle Ableitung nach x ist positiv und nach y negativ. Für eine Funktion mehrerer Variablen ist es durchaus möglich, dass eine Funktion in einem Punkt eine positive und eine negative Steigung hat. Man kann nicht erwarten, dass eine Funktion sich in alle Richtungen auf ähnliche Weise verhält.

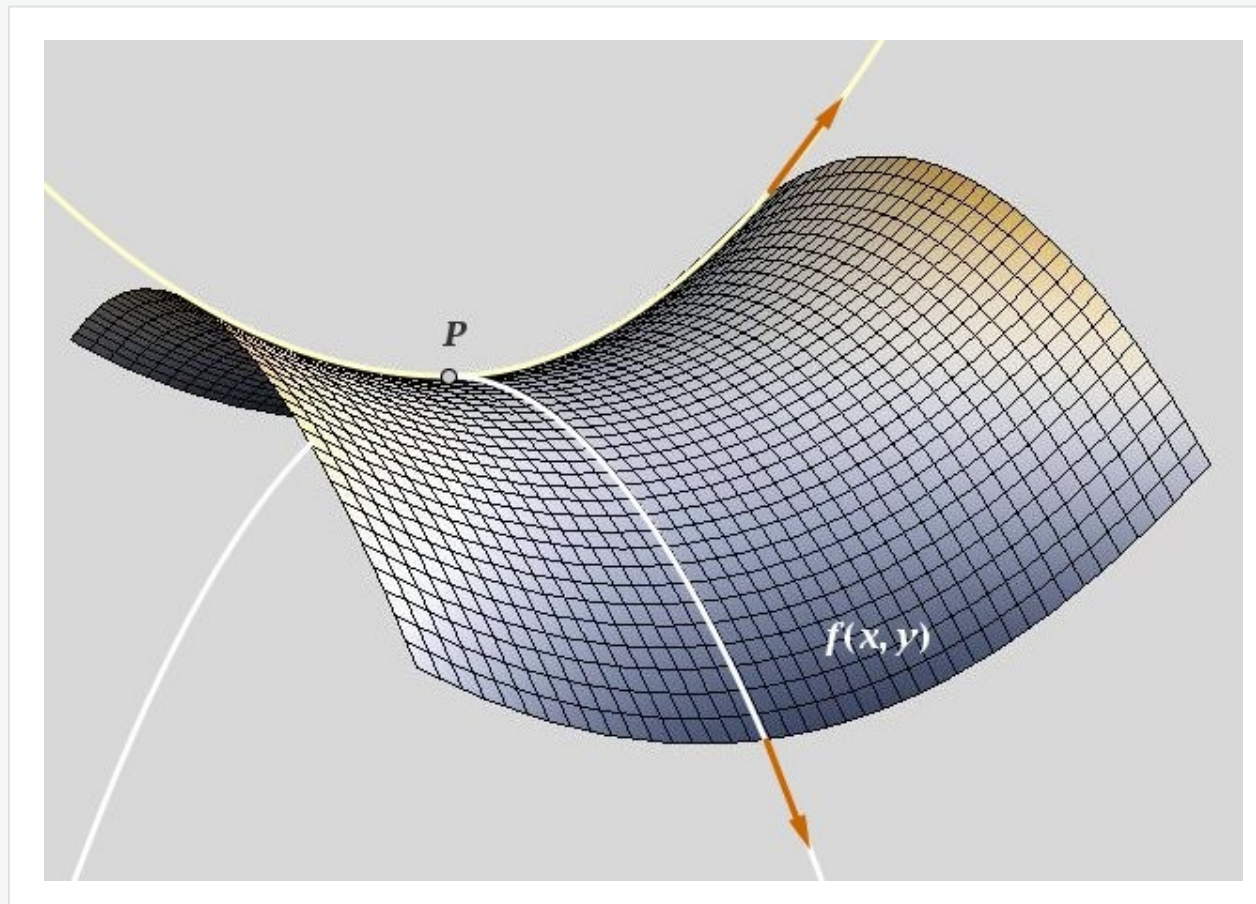


Abb. 4-1: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ (hyperbolisches Paraboloid) und der Schnittkurven mit x,z - und y,z -Ebenen

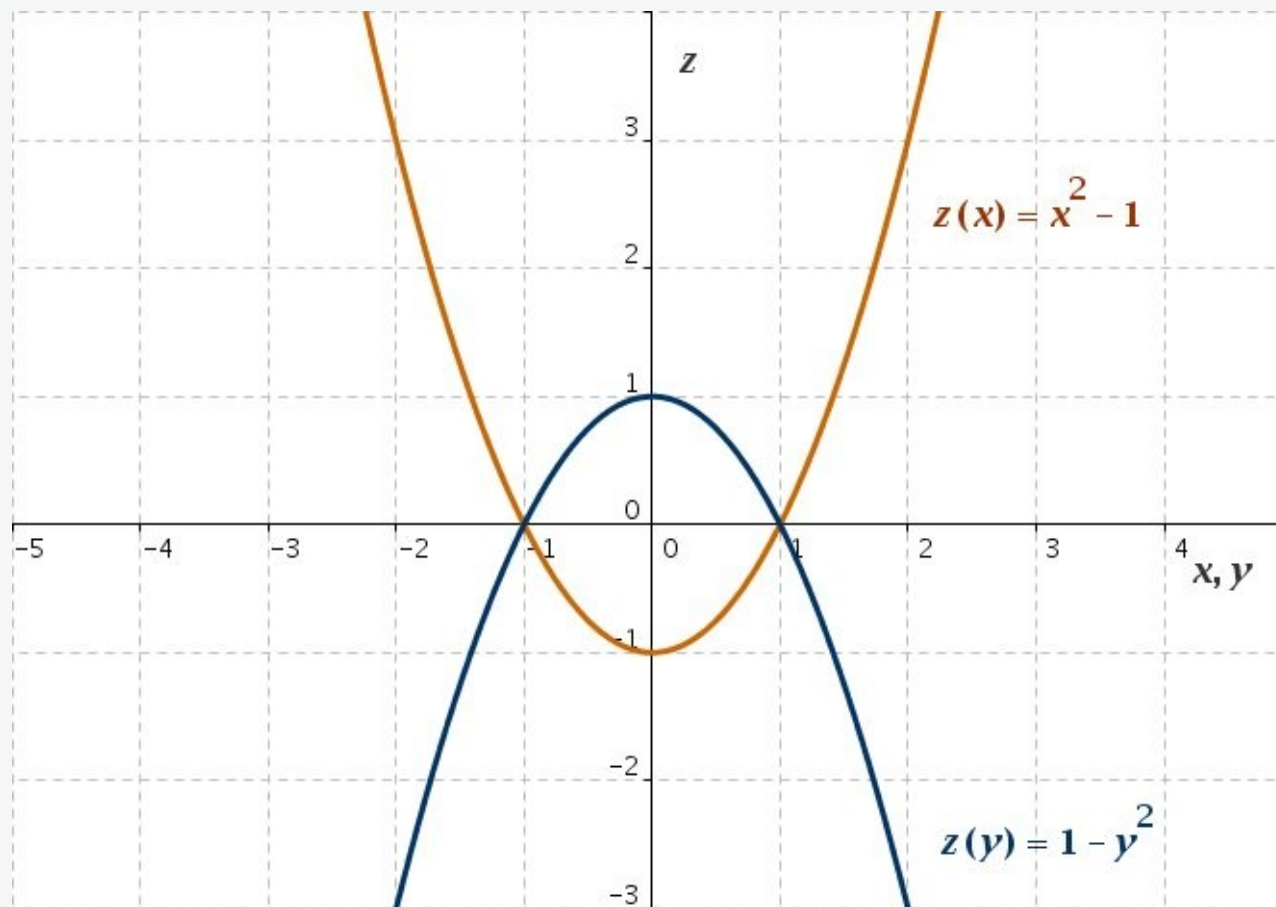


Abb. 4-2: Die Schnittkurven der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ mit der Ebene $x = 1$ und mit der Ebene $y = 1$

$$f(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2}$$

$$a) \ P = (1, 0), \quad b) \ P = (0, 1), \quad c) \ P = (1, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2} \right] = - \frac{4 x y^2}{(1 + x^2 \cdot y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} (1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x} (0, 1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} (1, 1) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2} \right] = - \frac{4 x^2 y}{(1 + x^2 \cdot y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} (1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y} (0, 1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} (1, 1) = -1$$

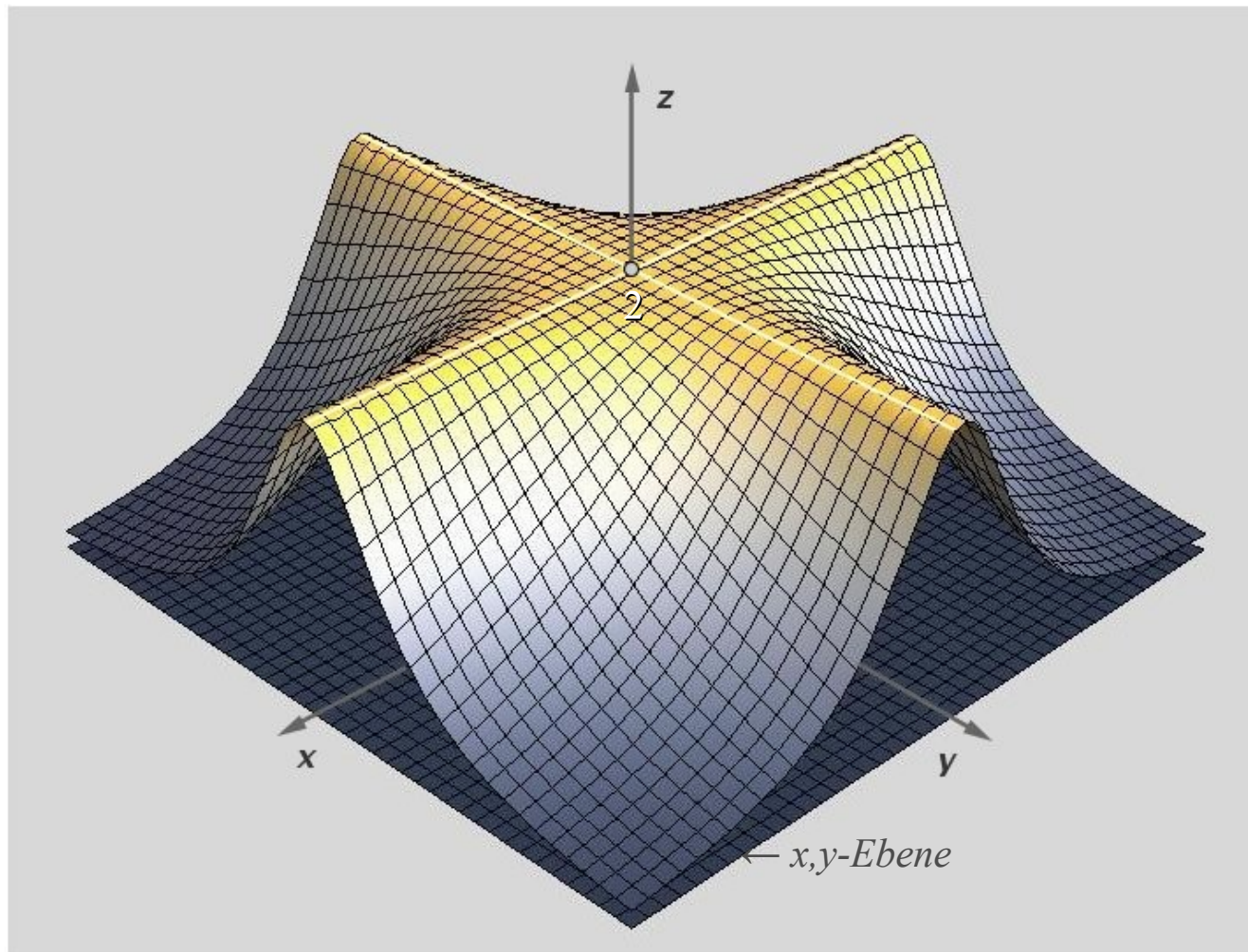


Abb. 5-1: Graphische Darstellung der Funktion $f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 \cdot y^2}$$

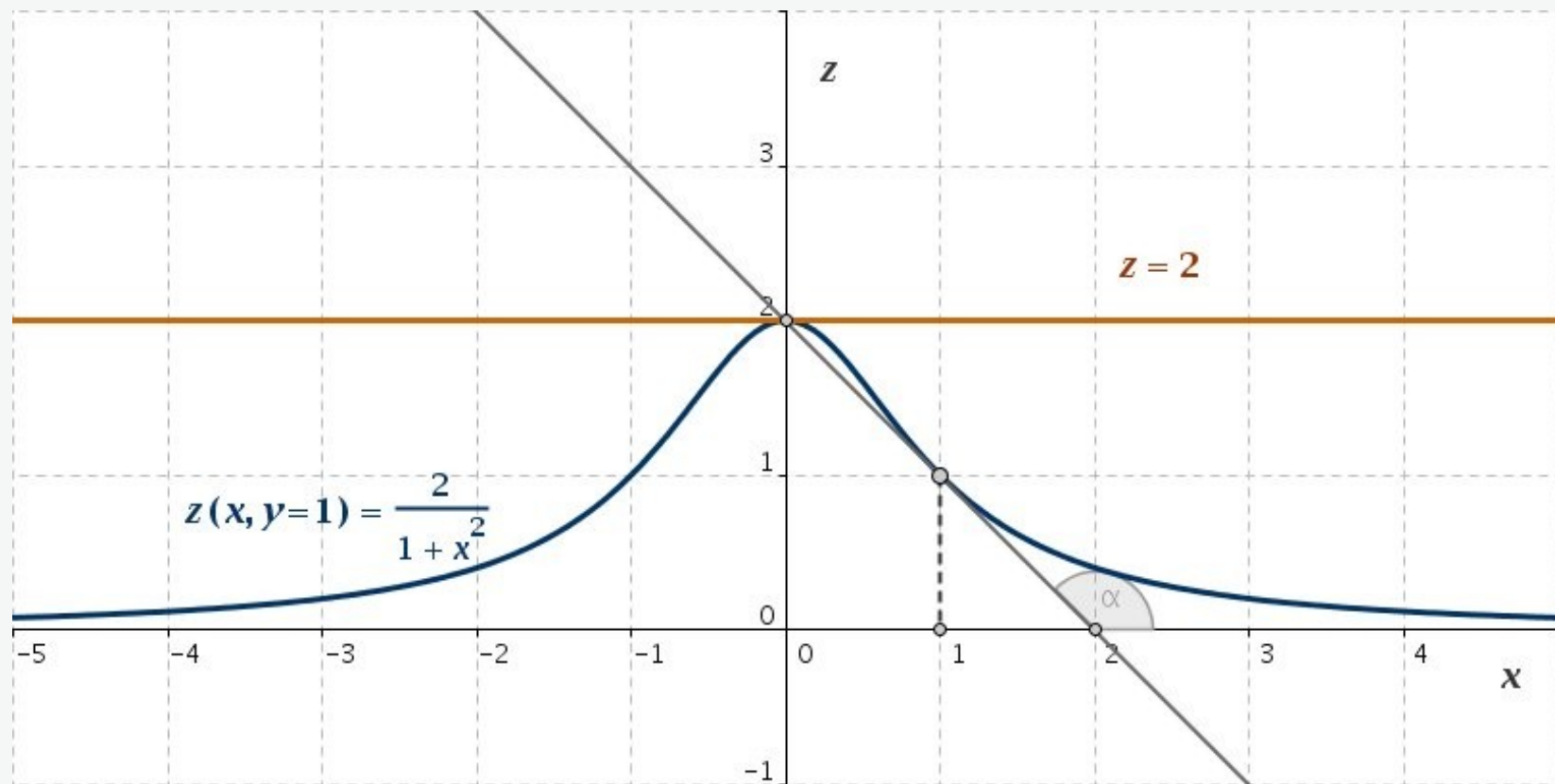


Abb. 5-2: Die Schnittkurven der Funktion $z = f(x, y)$ mit x, z -Ebene und der Ebene $y = 1$, die Tangente im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung der x -Achse

$$f(x, y) = x^3 + 2 \cos y, \quad a) \ P = (1, \pi), \quad b) \ P = \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^3 + 2 \cos y] = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(-2, \frac{\pi}{2}\right) = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^3 + 2 \cos y] = -2 \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(-2, \frac{\pi}{2}\right) = -2$$

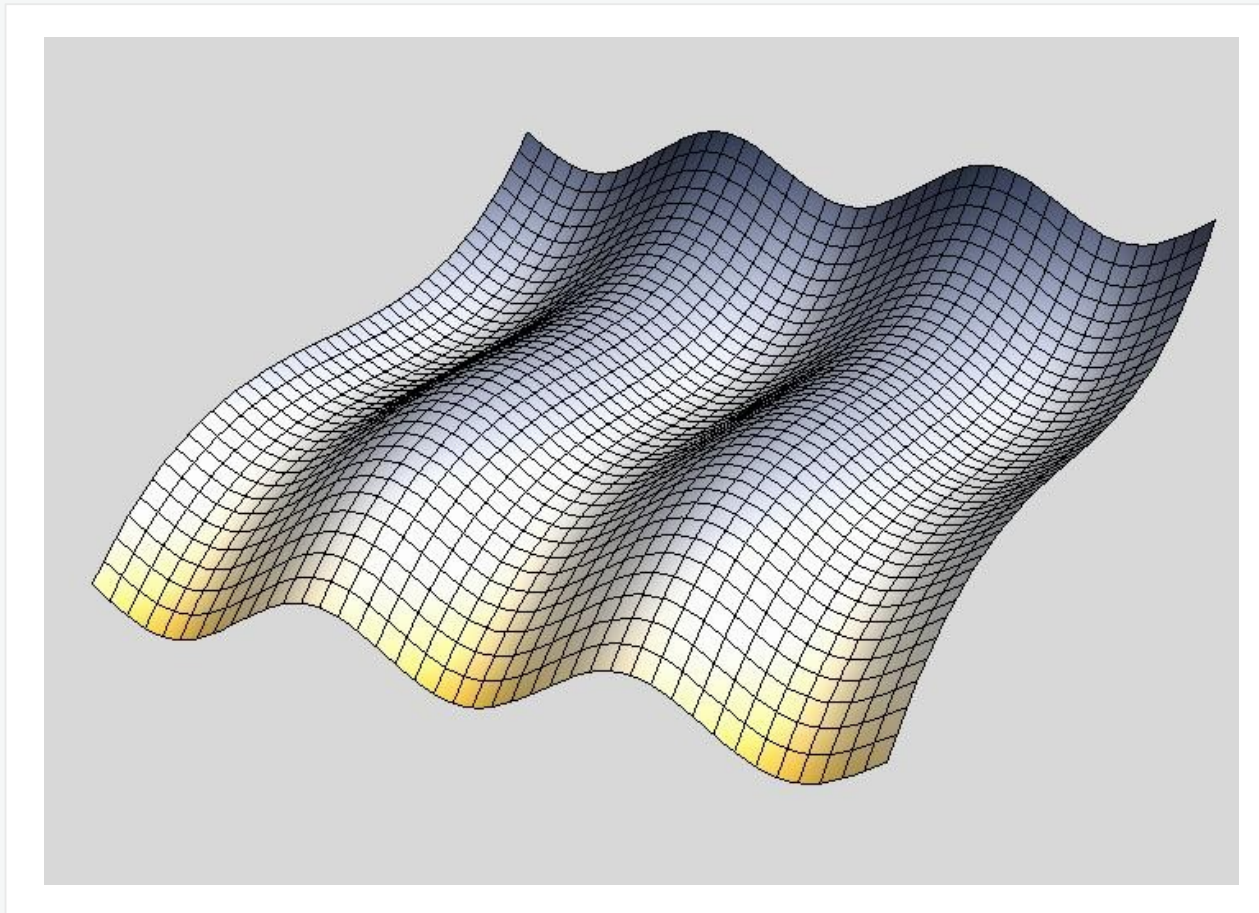


Abb. 6-1: Graphische Darstellung der Funktion $z = x^3 + 2 \cos y$

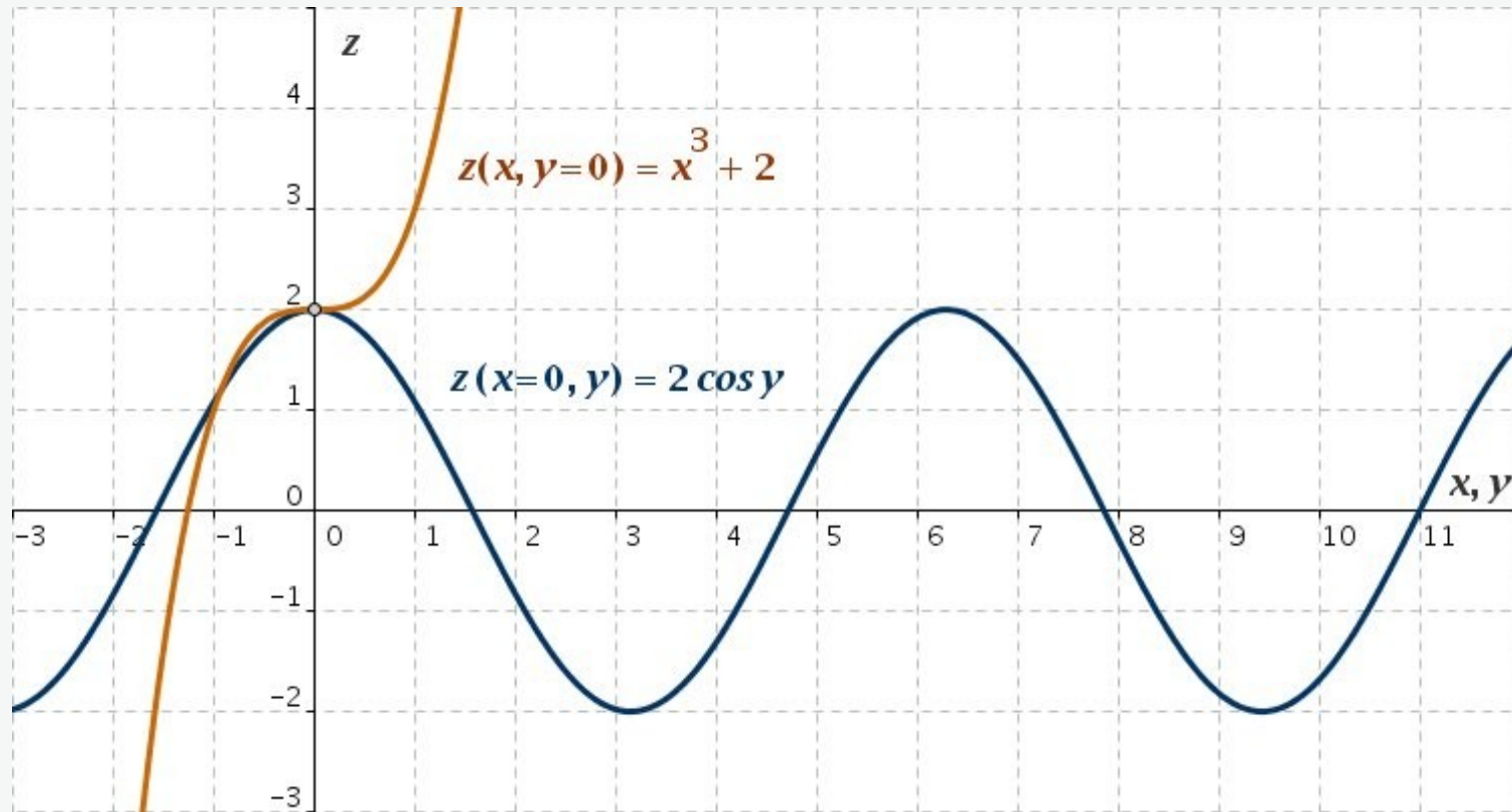


Abb. 6-2: Die Schnittkurven der Funktion $z = f(x, y)$ mit x,z -Ebene (rot) und y,z -Ebene (blau)



Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y)$ im Punkt P

Aufgabe 6: $f(x, y) = (x^2 - y^2) \sin y$

$$a) \quad P = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad b) \quad P = (1, \pi)$$

Aufgabe 7: $f(x, y) = \sqrt{x + y^2}, \quad P = P(2, -3)$

Aufgabe 8: $f(x, y) = x^2 + 2 \sin y$

$$a) \quad P = \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \quad b) \quad P = (2, \pi)$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \sin y, \quad a) \ P = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad b) \ P = (1, \pi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} (1, \pi) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin y + (x^2 - y^2) \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -2 \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} (1, \pi) = (1 - \pi^2) \cos(\pi) = \pi^2 - 1 \simeq 8.87$$

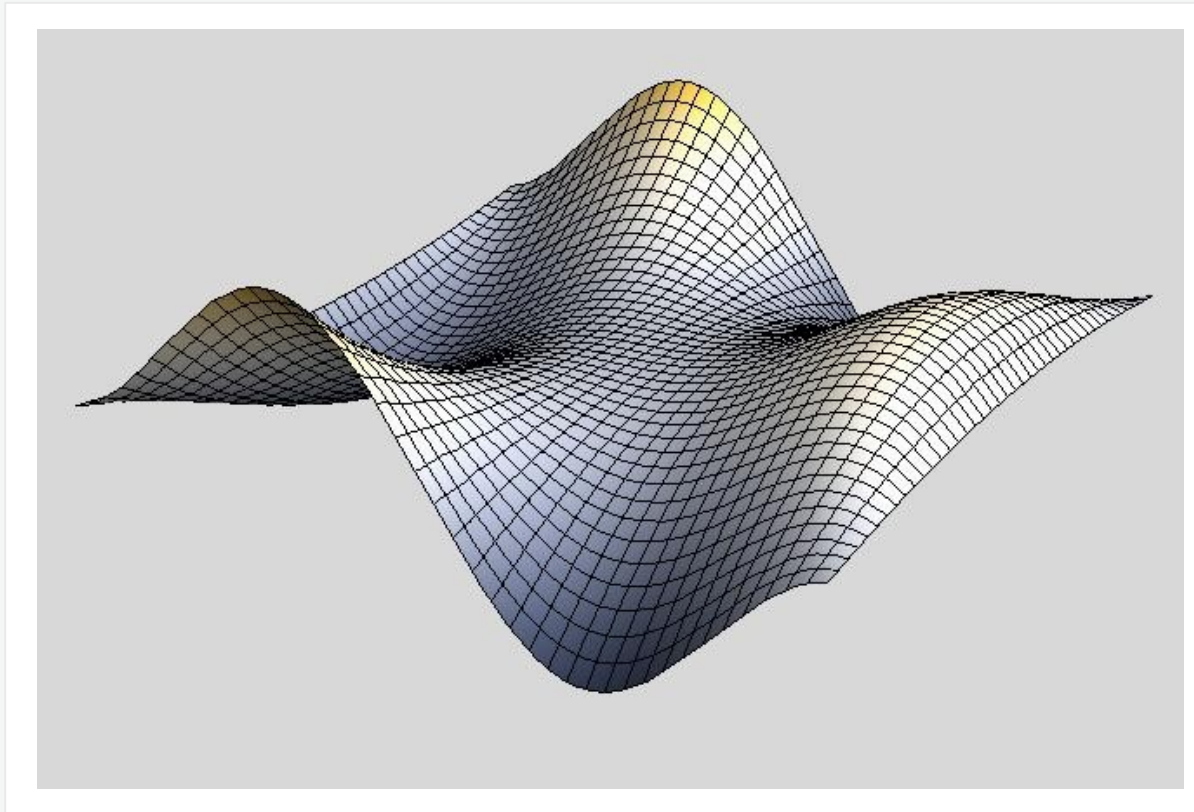


Abb. 7-1: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \sin y$$

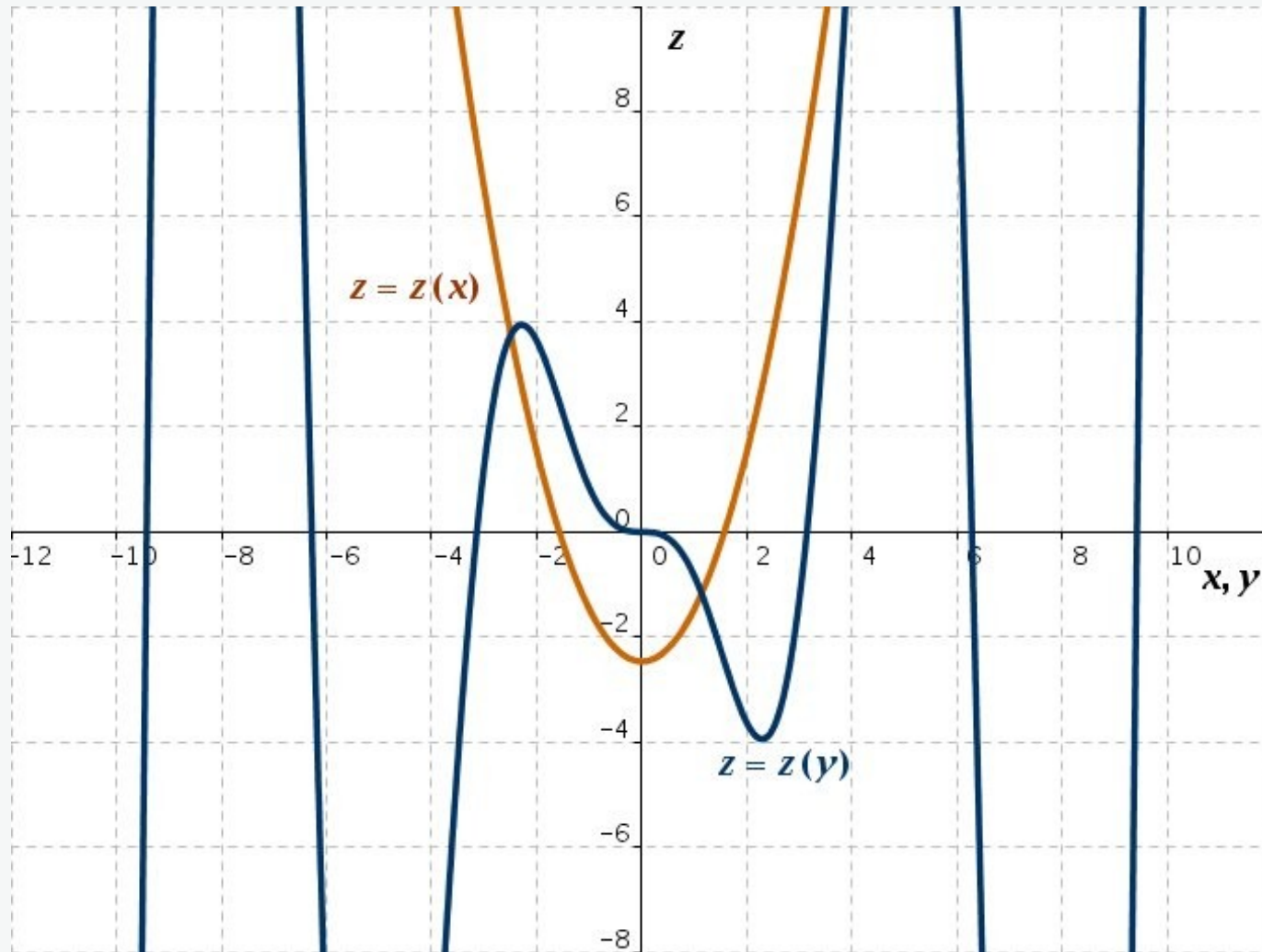


Abb. 7-2: Die Schnittkurven der Funktion $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = \pi/2$ (rot) und der y,z -Ebene ($x = 0$) (blau)

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \sin y$$

$$f(x, y) = \sqrt{x + y^2} = (x + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -3) = \left[\frac{1}{2 \sqrt{x + y^2}} \right]_{x=2, y=-3} = \frac{1}{2 \sqrt{2 + (-3)^2}} = \frac{1}{2 \sqrt{11}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) = \left[\frac{y}{\sqrt{x + y^2}} \right]_{x=2, y=-3} = \frac{-3}{\sqrt{2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$f(x, y) = x^2 + 2 \sin y, \quad a) \ P = \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \quad b) \ P = (2, \pi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} (2, \pi) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} (2, \pi) = -2$$

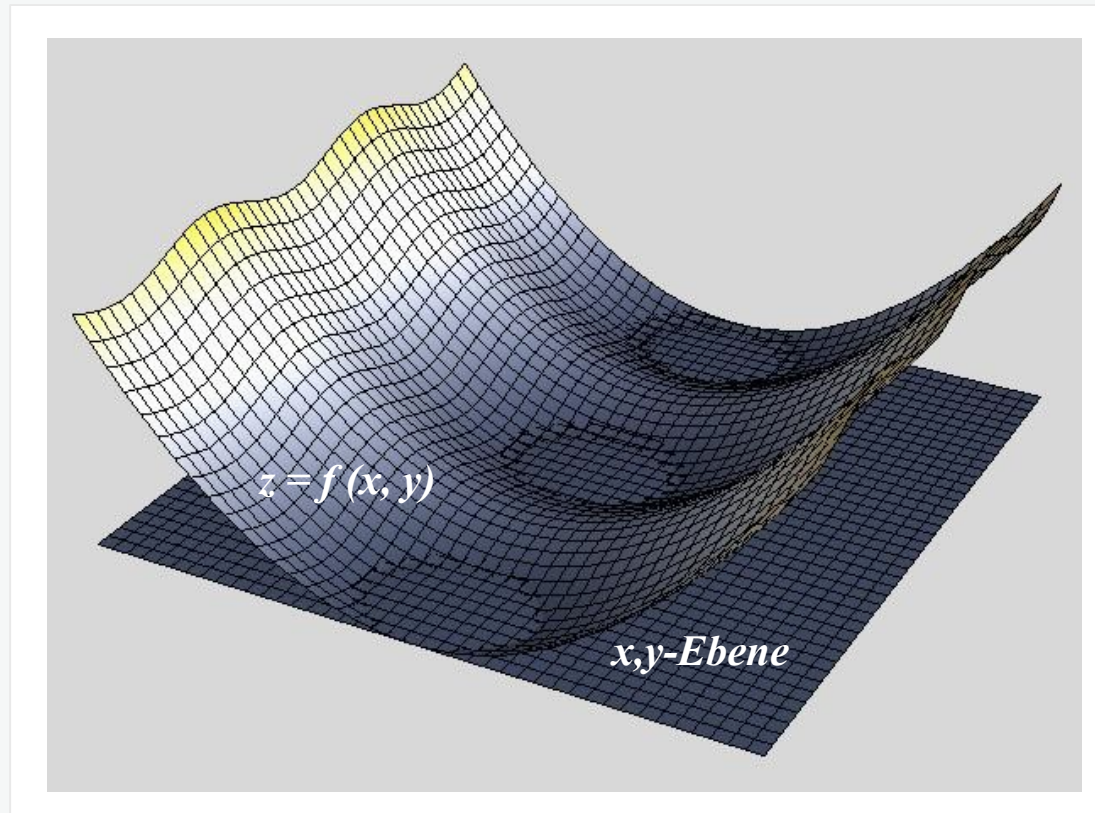


Abb. 8-1: Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = x^2 + 2 \sin y$$

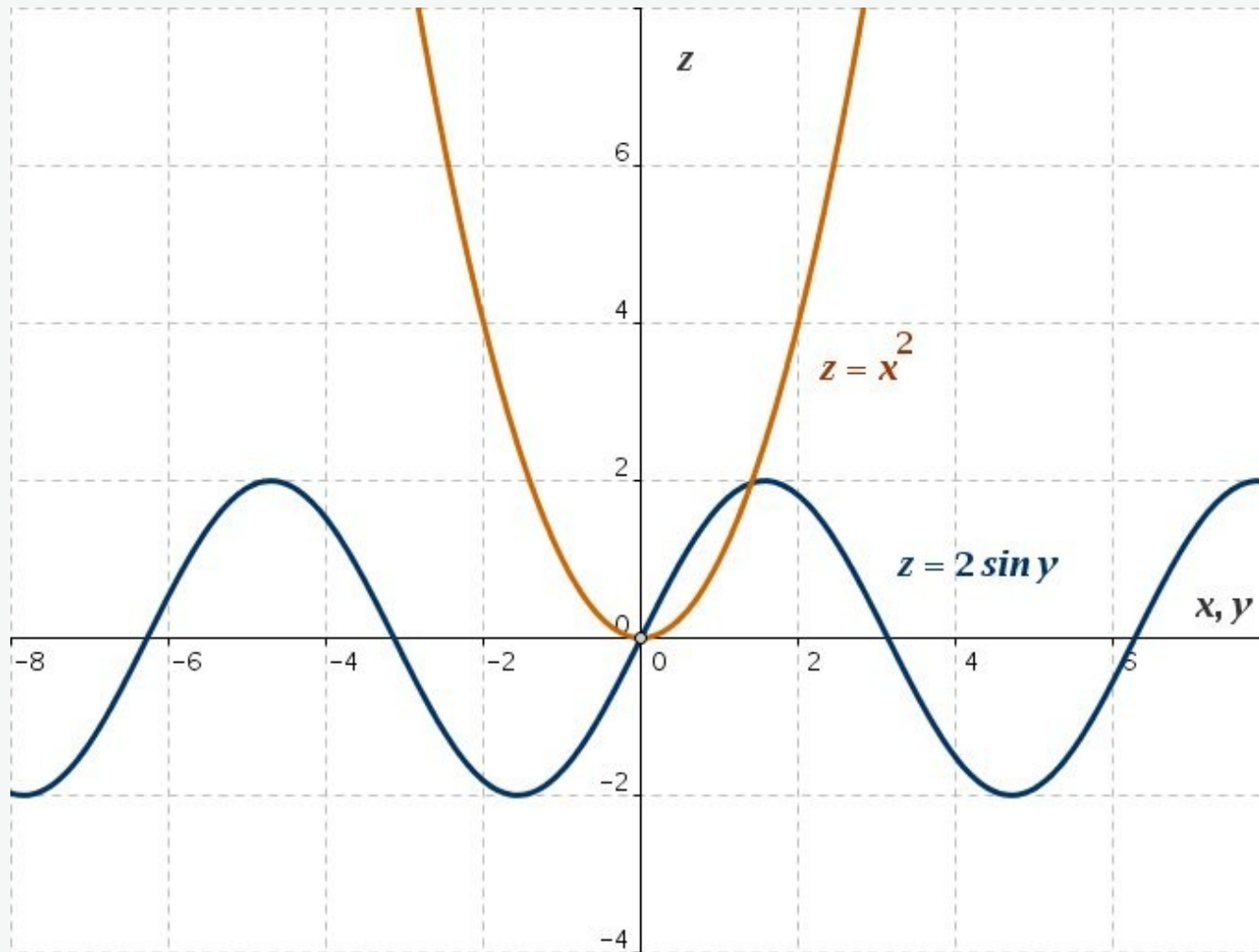


Abb. 8-2: Die Schnittkurven der Funktion $z = f(x, y)$ mit der x, z -Ebene (rot) und der y, z -Ebene (blau)

$$f(x, y) = x^2 + 2 \sin y$$

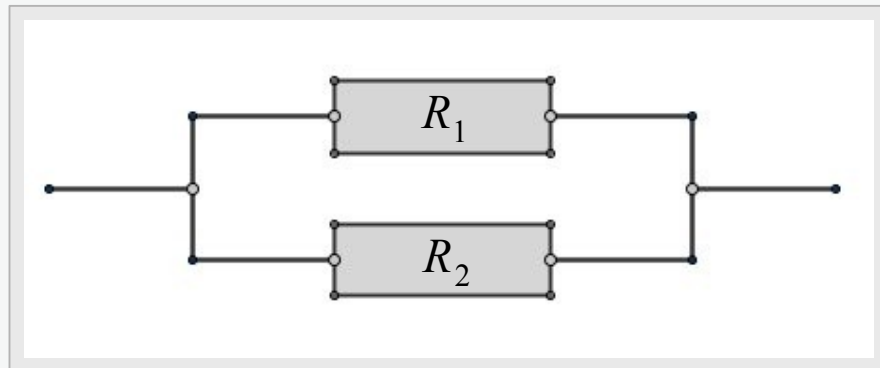


*Gustav Kirchhoff (1824 - 1887)
deutscher Physiker*

Der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter ohmscher Widerstände R_1 , R_2 berechnet sich nach dem Kirchhoff'schen Gesetz als

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Wie groß ist die Änderungsrate $\partial R / \partial R_1$? Für welches R_1 ist die Änderungsrate am größten?



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2 (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Die Änderungsrate ist maximal für $R_1 = 0$.