



Die Poisson-Gleichung

Simeon Denis Poisson (1781-1840) war ein französischer Physiker und Mathematiker.

Die Poisson-Gleichung

Die Laplace-Gleichung ist ein Sonderfall der allgemeineren Poisson-Differentialgleichung

$$\Delta \phi = f(x, y, z)$$

die auch als Potentialgleichung bezeichnet wird. Die Poisson-Gleichung ist bei der Beschreibung des Potentials eines elektrischen Feldes von großer Bedeutung. Die Lösung Φ der Poisson-Gleichung heißt auch Potentialfunktion oder kurz Potential.

$$\Delta \phi = f(x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

Die Poisson-Gleichung: Beispiel

Das räumliche skalare Feld $\phi = \ln r$

ist eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (r > 0)$$

$$\phi = \ln r = \ln (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2}$$