Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Komplexe Zahlen

1.1 Komplexe Zahlen, Probetest

1.1. Finden Sie zu den gegebenen komplexen Zahlen

$$z_1 = i, \quad z_2 = -2 + i, \quad z_3 = -4 - i, \quad z_4 = 3.5, \quad z_5 = -1.5i$$

die konjugiert komplexen Zahlen und zeichnen Sie diese konjugiert komplexen Zahlen als Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene.

1.2. Berechnen Sie die Beträge der komplexen Zahlen

$$z_1 = 4 - 3i, \quad z_2 = -2 + 5i, \quad z_3 = -7i, \quad z_4 = -\sqrt{3} + i.$$

1.3. Berechnen Sie die Terme

$$I_1 = z_1 - 3z_2^* - 2z_3, \quad I_2 = -z_1^* + z_2^* - 3z_3^*$$

für die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -3 + 2i, \quad z_3 = -1 + 4i.$$

1.4. Berechnen Sie folgende Potenzen von i: i^{17}, i^{42}, i^{87}, i^{400}, $(-i)^3$, $(-i)^{14}$, $(-i)^{100}$.

1.5. Berechnen Sie den Ausdruck $i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28}$.

1.6. Berechnen Sie $(2 + i)^2$ und $(1 + 2i)^2 - (3 - i)^2$.

1.7. Berechnen Sie $(3 - 2i)^2$, $(2 - \frac{i}{2})^2$, $(5 - 3i)^2$, $(5i^2 + i)^2$.

1.8. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{1}{4 - i}, \quad z_2 = \frac{7}{5 + 3i}, \quad z_3 = \frac{2}{5 - 2i}, \quad z_4 = \frac{3 - 2i}{4 + i}.$$

1.9. Stellen Sie die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im}(z) \leqslant 2\}$ in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Probetest:

1.1 Die konjugiert komplexen Zahlen $z_1^* = -i$, $z_2^* = -2 - i$, $z_3^* = -4 + i$, $z_4^* = 3.5$ und $z_5^* = 1.5i$ sind in Abb. 1.1 dargestellt.

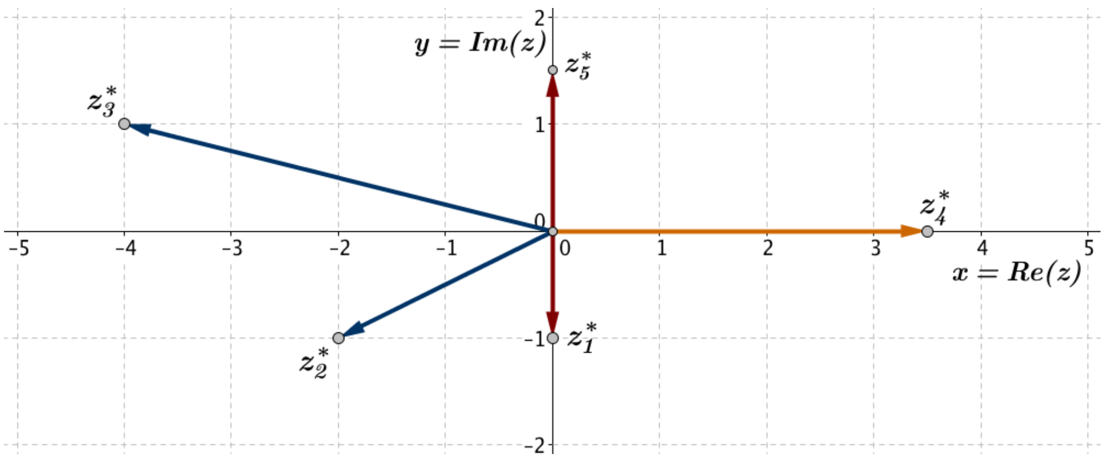

Abb. 1.1 Darstellung der konjugiert komplexen Zahlen der Aufgabe 1.1 in der Gaußschen Zahlenebene.

1.2 Der Betrag $|\,z\,|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ wird nach Gleichung

$$|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

bestimmt:

$$
\begin{aligned}
|\,z_1\,| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5, \\
|\,z_2\,| &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, \\
|\,z_3\,| &= \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = \sqrt{7^2} = 7, \\
|\,z_4\,| &= \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{(-1)^2(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}
$$

1.3

$$
\begin{aligned}
I_1 &= z_1 - 3z_2^* - 2z_3 = (2 + i) - 3(-3 - 2i) - 2(-1 + 4i) = 2 + 9 + 2 + (1 + 6 - 8)i = \\
&= 13 - i, \\
I_2 &= -z_1^* + z_2^* - 3z_3^* = -(2 - i) + (-3 - 2i) - 3(-1 - 4i) = -2 - 3 + 3 + \\
&+ i(1 - 2 + 12) = -2 + 11i.
\end{aligned}
$$

1.4 Um i^m zu berechnen, stellen wir den Exponenten m der imaginären Einheit folgendermaßen dar: $m = 4n + a$, wobei die natürliche Zahl a nur die Werte 1, 2 und 3 annehmen kann. $i^{17} = i^{4\cdot 4+1} = i$, $i^{42} = i^{4\cdot 10+2} = i^2 = -1$, $i^{87} = i^{4\cdot 21+3} = i^3 = -i$, $i^{400} = i^{4\cdot 100} = 1$. Die Berechnung von $(-i)^m$ erfolgt auf gleiche Weise. Man kann die Zahl aber zuerst darstellen als: $(-i)^m = ((-1)\cdot i)^m = (-1)^m \cdot i^m$. Der Faktor $(-1)^m$ ist 1 bei geraden m und -1 bei ungeraden m. $(-i)^3 = (-1)^3 \cdot i^3 = -i^3 = i$, $(-i)^{14} = (-1)^{14} \cdot i^{14} = i^{14} = i^{4\cdot 3+2} = i^2 = -1$, $(-i)^{100} = (-1)^{100} \cdot i^{100} = i^{100} = i^{25\cdot 4} = 1$, $(-i)^{1001} = -i^{1001} = -i^{1000+1} = -i^{4\cdot 250+1} = -i$.

1.5 Wir geben zwei Möglichkeiten an:

$$i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28} = i^{25}(1 + i + i^2 + i^3) = i^{25}(1 + i - 1 - i) = 0,$$

$$i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28} = i^{24}i + i^{24}i^2 + i^{24}i^3 + i^{28} = i + i^2 + i^3 + 1 = i - 1 - i + 1 = 0.$$

1.6 Das Quadrat von $x \pm iy$ kann man mit den Binomischen Formeln $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ berechnen:

$$(2 + i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i,$$

$$(1 + 2i)^2 - (3 - i)^2 = -3 + 4i - (8 - 6i) = -3 - 8 + 4i + 6i = -11 + 10i.$$

1.7 Folgende Zahlen werden mit den Binomischen Formeln berechnet.

$$(3 - 2i)^2 = 5 - 12i, \quad \left(2 - \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} - 2i, \quad (5 - 3i)^2 = 16 - 30i,$$

$$(5i^2 + i)^2 = (-5 + i)^2 = 24 - 10i.$$

1.8 Um die Nenner der Brüche reell zu machen, erweitern wir die Brüche mit einer zum Nenner konjugiert komplexen Zahl.

$$z_1 = \frac{1}{4-i} = \frac{1}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{4+i}{4^2+1^2} = \frac{4+i}{17} = \frac{4}{17} + i\,\frac{1}{17}, \quad \operatorname{Re}(z_1) = \frac{4}{17}, \quad \operatorname{Im}(z_1) = \frac{1}{17},$$

$$z_2 = \frac{7}{5+3i} = \frac{7}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{7(5-3i)}{5^2+3^2} = \frac{7(5-3i)}{34} = \frac{35}{34} - i\,\frac{21}{34},$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = \frac{35}{34}, \quad \operatorname{Im}(z_2) = -\frac{21}{34},$$

$$z_3 = \frac{2}{5-2i} = \frac{2}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{2(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{2(5+2i)}{5^2+2^2} = \frac{10+4i}{29},$$

$$\operatorname{Re}(z_3) = \frac{10}{29}, \quad \operatorname{Im}(z_3) = \frac{4}{29},$$

$$z_4 = \frac{3-2i}{4+i} = \frac{3-2i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{(3-2i)(4-i)}{4^2+1^2} = \frac{10-11i}{17},$$

$$\operatorname{Re}(z_4) = \frac{10}{17}, \quad \operatorname{Im}(z_4) = -\frac{11}{17}.$$

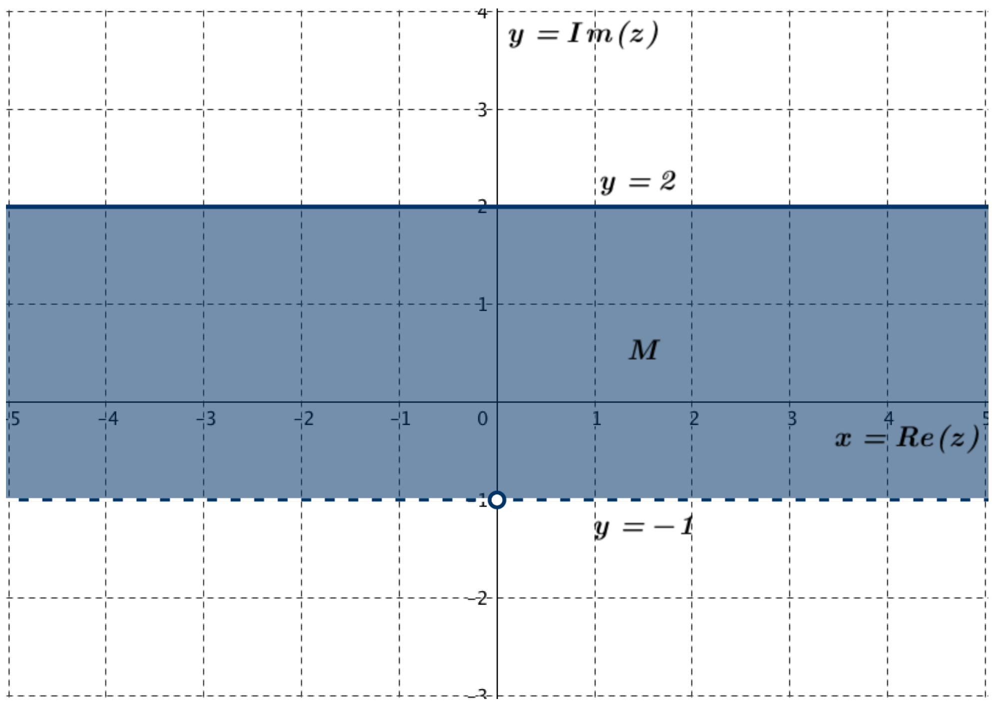

Abb. 1.2 Die Menge M der Aufgabe 1.9 in der Gaußschen Zahlenebene.

1.9 Die Menge M ist in Abb. 1.2 dargestellt.